

数理リテラシー 第11回

～ 写像 (3) ～

桂田 祐史

2021年6月30日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 写像 (続き)
 - 単射, 全射, 全単射
 - 単射, 全射, 全単射の定義
 - 単射, 全射, 全単射の例
- 3 付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性
- 4 宿題7について補足
- 5 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題 20%, 期末試験(または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射 (非常に**重要**)
- 宿題 8(問 8) の解説を行います。
- 宿題 9 を出します。締め切りは 7 月 5 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 7 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)。
- 質問は、授業直後に直接尋ねてもらっても良いですが、メールあるいは Zoom オフィスアワー (木曜 12:30 から 1 時間, URL はシラバスの補足にある) も利用できます。
- 宿題 7(集合) は難しかったという感想が多いので、前回話したことをスライド化しました (この PDF の末尾に載せます)。

4 単射, 全射, 全単射

4.6 単射, 全射, 全単射の定義

定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

(i) $f: X \rightarrow Y$ が ^{たんしゃ}単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

(iii) $f: X \rightarrow Y$ が ^{ぜんしゃ}全射 (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは **上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

(iv) $f: X \rightarrow Y$ が **全単射** あるいは **双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、 f が全射かつ単射であることをいう。

(注 最近はあまり使われないが、**1対1対応** (one-to-one correspondence) という言葉があり、これは全単射という意味である。)

日本の高校では、 x' を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では“ x **prime**” 「エックス **プライム**」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835 「ダッシュ」」 [▶ Link](#) によると

渡辺正, 「ダッシュ」と「活動写真」, 『数学セミナー』1985年11月号, p. 13

にある程度詳しい事が載っているとか。

個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。 □

4.6 単射, 全射, 全単射の定義 図によるイメージ

写像が単射であるとは、2つ以上の矢が刺さっている的がないこと。

写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

4.6 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯) $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$ は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

全射の条件 (b) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$ は

$$(bb) \quad Y = f(X) \quad (\text{終域が値域に等しい})$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。実際

$$((\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)) \Leftrightarrow Y \subset f(X) \Leftrightarrow Y = f(X).$$

(\Leftrightarrow は、 $f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$ を思い出すと分かる。また、一般に $Y \supset f(X)$ が成り立つので、 \Leftrightarrow の \Rightarrow 方向が分かる。)

4.6 単射, 全射, 全単射の定義 練習

問

- ① $f: X \rightarrow Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。
- ② $f: X \rightarrow Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

解答

- ① $(\exists x \in X) (\exists x' \in X: x \neq x') f(x) = f(x')$.
あるいは $(\exists x \in X) (\exists x' \in X) (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$.
- ② $(\exists y \in Y) (\forall x \in X) y \neq f(x)$. □

4.6 単射, 全射, 全単射の例

例 $X = Y = \{1, 2\}$ とする。 X から Y への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方 X の各要素 1, 2 の像が何か (Y のどの要素か) 調べる。

解答 次の f_j ($j = 1, 2, 3, 4$) が X から Y への写像である。

j	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

f_1, f_4 は

- 2つ以上の矢が刺さっているものがあるので単射でない。
- 矢の刺さっていないものがあるので全射でない。

f_2, f_3 は

- 2つ以上の矢が刺さっているものがないので単射である。
- すべての的に少なくとも1つの矢が刺さっているので全射である。

4.6 単射, 全射, 全単射の例

例 11.2 (学生番号)

X = ある時点での明治大学の学生全体, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ = 学生 x の学生番号 とするとき、 f は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。) \square

例 11.3 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間 I で定義された実数値関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である**。

証明 $x, x' \in I$, $x \neq x'$ とする。このとき、(i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のいずれかが成り立つ。

(i) のとき $f(x) < f(x')$. (ii) のとき $f(x) > f(x')$. いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$. ゆえに f は単射である。 \square

同様に狭義単調減少関数が定義されて、**狭義単調減少関数は単射である**。

4.6 単射, 全射, 全単射の例

例 11.4

次の f_j ($1 \leq j \leq 4$) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- f_1, f_3 は単射でない $\because x = -1, x' = 1$ とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}$,
 $x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$.
- f_2, f_4 は単射である $\because f_j'(x) = 2x > 0$ ($x \in (0, \infty)$) であるから、 f_j は定義域 $[0, \infty)$ で狭義単調増加である。ゆえに f_j は単射である。
- f_1, f_2 は全射でない $\because y = -1$ とすると $y \in \mathbb{R}$ であり、 $y = f(x)$ を満たす x が存在しない。
- f_3, f_4 は全射である \because 任意の $y \in [0, \infty)$ に対して、 $x := \sqrt{y}$ とおくと、
 $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \wedge y = f(x)$.

4.6 単射, 全射, 全単射の例

例 11.5 (恒等写像)

X を空でない集合とする。恒等写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$ に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$ ならば、 $x_1 = x_2$ が成り立つので、 id_X は単射である。

また、任意の $y \in X$ に対して、 $x := y$ とおくと、 $x \in X$ であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$ であるから、 id_X は全射である。

以上から、 id_X は全単射である。

例 11.6 (包含写像)

$\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i: X \rightarrow Y$ は単射である。

(恒等写像の単射性の証明と同様。)

例 11.7 (射影作用素)

空でない集合 X, Y に対して、射影作用素 $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ は全射である。

(すでに $\text{pr}_X(X \times Y) = X$ を示してある。ゆえに pr_X は全射である。)

付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性

(講義時間に余裕があれば講義するが、フツーは宿題のネタにする程度。)
実は次の命題が成り立つ。

命題 11.8 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)

X, Y が有限集合であるとする。 X と Y の要素の個数をそれぞれ $\#X, \#Y$ と書く。このとき、以下の (1)-(4) が成り立つ。

- ① X から Y への単射が存在する $\Leftrightarrow \#X \leq \#Y$.
- ② X から Y への全射が存在する $\Leftrightarrow \#X \geq \#Y$.
- ③ X から Y への全単射が存在する $\Leftrightarrow \#X = \#Y$.
- ④ $\#X = \#Y$ ならば、任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。
(i) f は単射 (ii) f は全射 (iii) f は全単射

付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性

証明 $n := \#X$, $m := \#Y$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

- ① $f: X \rightarrow Y$ が単射であれば、 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) はどの二つも相異なり、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、要素の個数を比較して $\#X = n \leq \#Y$. 逆に $n \leq m$ とすると、 $f(x_i) = y_i$ ($1 \leq i \leq n$) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$ を定義すると、 f は単射となる。
- ② $f: X \rightarrow Y$ が全射であれば、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$ であるから、 $\#X = n \geq \#Y$. 逆に $n \geq m$ とすると、 $f(x_i) = y_i$ ($1 \leq i \leq m$), $f(x_i) = y_1$ ($m < j \leq n$) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$ を定義すると、 f は全射となる。
- ③ X から Y への全単射が存在すれば、(1) から $\#X \leq \#Y$, (2) から $\#X \geq \#Y$ であるから $\#X = \#Y$. 逆に $\#X = \#Y$ とすると、(1) から X から Y への単射 f が存在する。(3) から f は全単射である。
- ④ (i) \Leftrightarrow (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i) \Rightarrow (iii) と (ii) \Rightarrow (iii) が導かれる)。
 $f: X \rightarrow Y$ が単射とする。 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) が相異なるので、 $|\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\}| = n$, 仮定からそれが $\#Y$ に等しく、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$. ゆえに f は全射である。
一方、 $f: X \rightarrow Y$ が全射とする。 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$. 仮定から $n = \#Y$ であるから、 $f(x_i)$ ($1 \leq i \leq n$) はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに f は単射である。 □

命題 11.9 (参考: 線形代数バージョン)

X, Y が体 K 上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ $\dim X, \dim Y$ と書く。

- ① X から Y への単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$.
- ② X から Y への全射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$.
- ③ X から Y への全単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$.
- ④ $\dim X = \dim Y$ ならば、任意の線形写像 $f: X \rightarrow Y$ について、以下は同値である。
 - (i) f は単射
 - (ii) f は全射
 - (iii) f は全単射

宿題7について補足 (1)

まず (1) $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$ について。

- 集合の等式 $A = B$ の証明は、

$A \subset B$ と $B \subset A$ を示す

あるいは (同じことだが)

任意の x に対して、 $x \in A \Rightarrow x \in B$ と、 $x \in B \Rightarrow x \in A$ を示す

のが基本 (まず考えるべきやり方という意味) である。

- 「ドモルガン律から正しい」と書いた人がいたが、(1) はド・モルガン律そのもので、それを証明しなさい、という問題である。集合のド・モルガン律は、2 個の場合を証明してあって、それから数学的帰納法で、有限個の集合の場合に成り立つことは簡単に分かるけれど、数学的帰納法で無限個の場合の証明はできない。
- 集合族の合併、共通部分は、直観的には $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$,

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$ ということだが、 $\cap \dots$ や $\cup \dots$ は曖昧で、証明す

るときは使えないと考えること。一方、 $\cup \dots$ や $\cap \dots$ を書かずに n 番目で止めるのは (結構多かった)、はっきり間違いである。

問7について補足 (2)

(2) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{n}\}$ について $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ を証明する。

集合が空集合であることの証明は、少しやりにくい。これについては、特別に説明をしている (第7回授業のスライド10 ページ。「空集合でない」と仮定すると」と背理法にするのがお勧めである。

任意の自然数 n に対して $0 < x \leq \frac{1}{n}$ が成り立つことから、どうやって矛盾を導くか。授業中の類題では、アルキメデスの公理を使う方法と、極限の議論 (ここでは、はさみうちの原理) に持ち込む方法を紹介した。はさみうちの原理よりも、次の定理を使うとした方が分かりやすいかも。

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n$$

が成り立つならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

注意 仮定を $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < b_n$ に変えても、結論は $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ である。

この定理を、 a_n として x , b_n として $\frac{1}{n}$ を当てはめると、 $x \leq 0$ が得られる。

問7について補足 (3)

(3) は完答した人も多かったが、とりこぼした人も結構いる。

- a) $\{0\}$ は 0 というただ 1 つの要素を持つ (それ以外の要素は持たない) 集合である。ゆえに $0 \in \{0\}$ は正しい。
(任意の数学的対象 a に対して $a \in \{a\}$ は正しい。)
- b) しかし $0 \neq \{0\}$ であるから、 $\{0\} \in \{0\}$ は成り立たない。
- c) $\{0\} \subset \{0\}$ を偽と間違えた人が数人いた。まず、明らかに $\{0\} = \{0\}$ 。ところで、一般に $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$ であるので、 $A = B$ のとき $A \subset B$ は真である。
- d) $\{4, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3, 4\}$, (e) $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$ について。集合を要素を書き並べて表すとき、順序は問わない、重複しても良いことにする、という注意をした。どちらも真である。
- f) $(1, 2, 3, 4) = (4, 3, 1, 2)$ について。順序対なので、順番を入れ換えたら等しくなくなる。

参考文献