

# 数理リテラシー 第11回

## ～ 写像 (3) ～

桂田 祐史

2021年6月30日

# 目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 写像 (続き)
  - 単射, 全射, 全単射
    - 単射, 全射, 全単射の定義
    - 単射, 全射, 全単射の例
- 3 付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性
- 4 宿題7について補足
- 5 参考文献

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題 20%, 期末試験(または期末レポート)80%となります。

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題 20%, 期末試験 (または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射 (非常に**重要**)

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題 20%, 期末試験(または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射(非常に**重要**)
- 宿題 8(問 8) の解説を行います。

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題20%, 期末試験(または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射(非常に**重要**)
- 宿題8(問8)の解説を行います。
- 宿題9を出します。締め切りは7月5日(月曜)13:30です。それ以降7月7日15:20までに提出されたものは1/2にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい(katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)。

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題20%、期末試験(または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射(非常に**重要**)
- 宿題8(問8)の解説を行います。
- 宿題9を出します。締め切りは7月5日(月曜)13:30です。それ以降7月7日15:20までに提出されたものは1/2にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい(katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)。
- 質問は、授業直後に直接尋ねてもらっても良いですが、メールあるいはZoom オフィスアワー(木曜12:30から1時間、URLはシラバスの補足にある)も利用できます。

# 本日の内容&連絡事項

- 念のため: このままレベル1が続いた場合、期末試験は対面で行う予定です。レベル2になった場合は、期末試験の代わりに期末レポート課題を出します(問題を公開してから比較的短期間に解答して提出)。成績評価は、宿題 20%, 期末試験 (または期末レポート)80%となります。
- 本日の講義内容: 単射・全射・全単射 (非常に**重要**)
- 宿題 8(問 8) の解説を行います。
- 宿題 9 を出します。締め切りは 7 月 5 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 7 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji どっと ac ドット jp)。
- 質問は、授業直後に直接尋ねてもらっても良いですが、メールあるいは Zoom オフィスアワー (木曜 12:30 から 1 時間, URL はシラバスの補足にある) も利用できます。
- 宿題 7(集合) は難しかったという感想が多いので、前回話したことをスライド化しました (この PDF の末尾に載せます)。



# 4 単射, 全射, 全単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義

### 定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

# 4 単射, 全射, 全単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義

### 定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

(i)  $f: X \rightarrow Y$  が <sup>たんしゃ</sup>単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

# 4 単射, 全射, 全単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義

### 定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

(i)  $f: X \rightarrow Y$  が <sup>たんしゃ</sup>単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

(ii)  $f: X \rightarrow Y$  が <sup>ぜんしゃ</sup>全射 (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは **上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

# 4 単射, 全射, 全単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義

### 定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

(i)  $f: X \rightarrow Y$  が **単射**<sup>たんしゃ</sup> (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

(iii)  $f: X \rightarrow Y$  が **全射**<sup>ぜんしゃ</sup> (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは **上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

(iv)  $f: X \rightarrow Y$  が **全単射** あるいは **双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、 $f$  が全射かつ単射であることをいう。

# 4 単射, 全射, 全単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義

### 定義 11.1 (単射, 全射, 全単射)

(i)  $f: X \rightarrow Y$  が <sup>たんしゃ</sup>単射 (an injection, 形容詞は injective) あるいは **1対1** (one to one) であるとは、

$$(ii) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことをいう。

(ii)  $f: X \rightarrow Y$  が <sup>ぜんしゃ</sup>全射 (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは **上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことをいう。

(iii)  $f: X \rightarrow Y$  が **全単射** あるいは **双射** (a bijection, 形容詞は bijective) であるとは、 $f$  が全射かつ単射であることをいう。

(注 最近はあまり使われないが、**1対1対応** (one-to-one correspondence) という言葉があり、これは全単射という意味である。)

## 余談 ' の読み方

日本の高校では、 $x'$  を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “x **prime**” 「エックス **プライム**」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

日本の高校では、 $x'$  を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “x **prime**” 「エックス **プライム**」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835 「ダッシュ」」 [▶ Link](#) によると

渡辺正, 「ダッシュ」と「活動写真」, 『数学セミナー』 1985年  
11月号, p. 13

にある程度詳しい事が載っているとか。

日本の高校では、 $x'$  を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、現代の英語では “ $x$  **prime**” 「エックス **プライム**」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う。

「ことばの話 1835 「ダッシュ」」 [▶ Link](#) によると

渡辺正, 「ダッシュ」と「活動写真」, 『数学セミナー』1985年  
11月号, p. 13

にある程度詳しい事が載っているとか。

個人的に、古い英語 (England で使っているやつ) では、dash と読んだらしい、というのはどこかで目にした覚えがあったので、納得出来た。 □



## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 図によるイメージ

写像が単射であるとは、2つ以上の矢が刺さっている的がないこと。

写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯)  $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$  は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる**対偶**)。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯)  $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$  は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯)  $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$  は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

全射の条件 (b)  $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$  は

$$(bb) \quad Y = f(X) \quad (\text{終域が値域に等しい})$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 条件の言い換え

単射の条件 (♯)  $(\forall x \in X)(\forall x' \in X) (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$  は

$$(##) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (いわゆる対偶)。また

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X : x \neq x') \quad f(x) \neq f(x')$$

と書くことも出来る (後で使うことがある)。

全射の条件 (b)  $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$  は

$$(bb) \quad Y = f(X) \quad (\text{終域が値域に等しい})$$

とも書ける (ぜひ覚えよう)。実際

$$((\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)) \Leftrightarrow Y \subset f(X) \Leftrightarrow Y = f(X).$$

( $\Leftrightarrow$  は、 $f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\}$  を思い出すと分かる。また、一般に  $Y \supset f(X)$  が成り立つので、 $\Leftrightarrow$  の  $\Rightarrow$  方向が分かる。)

## 4.6 単射, 全射, 全単射の定義 練習

### 問

- ①  $f: X \rightarrow Y$  が単射でないことを論理式で表わせ。
- ②  $f: X \rightarrow Y$  が全射でないことを論理式で表わせ。

### 問

- ①  $f: X \rightarrow Y$  が単射でないことを論理式で表わせ。
- ②  $f: X \rightarrow Y$  が全射でないことを論理式で表わせ。

### 解答

- ①  $(\exists x \in X) (\exists x' \in X: x \neq x') f(x) = f(x')$ .  
あるいは  $(\exists x \in X) (\exists x' \in X) (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$ .

### 問

- ①  $f: X \rightarrow Y$  が単射でないことを論理式で表わせ。
- ②  $f: X \rightarrow Y$  が全射でないことを論理式で表わせ。

### 解答

- ①  $(\exists x \in X) (\exists x' \in X: x \neq x') f(x) = f(x')$ .  
あるいは  $(\exists x \in X) (\exists x' \in X) (x \neq x' \wedge f(x) = f(x'))$ .
- ②  $(\exists y \in Y) (\forall x \in X) y \neq f(x)$ . □



## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

例  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

**例**  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

**考え方**  $X$  の各要素  $1, 2$  の像が何か ( $Y$  のどの要素か) 調べる。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

**例**  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

**考え方**  $X$  の各要素 1, 2 の像が何か ( $Y$  のどの要素か) 調べる。

**解答** 次の  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) が  $X$  から  $Y$  への写像である。

$j$	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

例  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。  $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方  $X$  の各要素 1, 2 の像が何か ( $Y$  のどの要素か) 調べる。

解答 次の  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) が  $X$  から  $Y$  への写像である。

$j$	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1			
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2			

$f_1, f_4$  は

- 2つ以上の矢が刺さっているものがあるので単射でない。
- 矢の刺さっていないものがあるので全射でない。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

例  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方  $X$  の各要素 1, 2 の像が何か ( $Y$  のどの要素か) 調べる。

解答 次の  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) が  $X$  から  $Y$  への写像である。

$j$	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1	×	×	×
2	1	2			
3	2	1			
4	2	2	×	×	×

$f_1, f_4$  は

- 2つ以上の矢が刺さっているのがあるので単射でない。
- 矢の刺さっていないのがあるので全射でない。

$f_2, f_3$  は

- 2つ以上の矢が刺さっているのがないので単射である。
- すべての的に少なくとも1つの矢が刺さっているのだから全射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

例  $X = Y = \{1, 2\}$  とする。 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるか全射であるか調べよ。

考え方  $X$  の各要素 1, 2 の像が何か ( $Y$  のどの要素か) 調べる。

解答 次の  $f_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) が  $X$  から  $Y$  への写像である。

$j$	$f_j(1)$	$f_j(2)$	単射	全射	全単射
1	1	1	×	×	×
2	1	2	○	○	○
3	2	1	○	○	○
4	2	2	×	×	×

$f_1, f_4$  は

- 2つ以上の矢が刺さっているのがあるので単射でない。
- 矢の刺さっていないのがあるので全射でない。

$f_2, f_3$  は

- 2つ以上の矢が刺さっているのがないので単射である。
- すべての的に少なくとも1つの矢が刺さっているのだから全射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.2 (学生番号)

$X =$  ある時点での明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) =$  学生  $x$  の学生番号 とするとき、 $f$  は単射

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.2 (学生番号)

$X =$  ある時点での明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) =$  学生  $x$  の学生番号 とするとき、 $f$  は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。)  $\square$

### 例 11.3 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。



## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.2 (学生番号)

$X =$  ある時点での明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) =$  学生  $x$  の学生番号 とするとき、 $f$  は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。)  $\square$

### 例 11.3 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である**。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.2 (学生番号)

$X$  = ある時点での明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  = 学生  $x$  の学生番号 とするとき、 $f$  は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。)  $\square$

### 例 11.3 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である**。

**証明**  $x, x' \in I$ ,  $x \neq x'$  とする。このとき、(i)  $x < x'$  (ii)  $x > x'$  のいずれかが成り立つ。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.2 (学生番号)

$X$  = ある時点での明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x)$  = 学生  $x$  の学生番号 とするとき、 $f$  は単射のはずである。

(もしそうでないと、違う学生に同じ学生番号が振られていることになる。それでは学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。)  $\square$

### 例 11.3 (狭義単調ならば単射)

実軸上の区間  $I$  で定義された実数値関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  が、**狭義単調増加**であるとは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。一般に**狭義単調増加関数は単射である**。

**証明**  $x, x' \in I$ ,  $x \neq x'$  とする。このとき、(i)  $x < x'$  (ii)  $x > x'$  のいずれかが成り立つ。

(i) のとき  $f(x) < f(x')$ . (ii) のとき  $f(x) > f(x')$ . いずれの場合も  $f(x) \neq f(x')$ . ゆえに  $f$  は単射である。  $\square$

同様に狭義単調減少関数が定義されて、**狭義単調減少関数は単射である**。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である  $\because f_j'(x) = 2x > 0$  ( $x \in (0, \infty)$ ) であるから、 $f_j$  は定義域  $[0, \infty)$  で狭義単調増加である。ゆえに  $f_j$  は単射である。



## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である  $\because f_j'(x) = 2x > 0$  ( $x \in (0, \infty)$ ) であるから、 $f_j$  は定義域  $[0, \infty)$  で狭義単調増加である。ゆえに  $f_j$  は単射である。
- $f_1, f_2$  は全射でない

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}$ ,  
 $x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である  $\because f_j'(x) = 2x > 0$  ( $x \in (0, \infty)$ ) であるから、 $f_j$  は定義域  $[0, \infty)$  で狭義単調増加である。ゆえに  $f_j$  は単射である。
- $f_1, f_2$  は全射でない  $\because y = -1$  とすると  $y \in \mathbb{R}$  であり、 $y = f(x)$  を満たす  $x$  が存在しない。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}, x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である  $\because f_j'(x) = 2x > 0$  ( $x \in (0, \infty)$ ) であるから、 $f_j$  は定義域  $[0, \infty)$  で狭義単調増加である。ゆえに  $f_j$  は単射である。
- $f_1, f_2$  は全射でない  $\because y = -1$  とすると  $y \in \mathbb{R}$  であり、 $y = f(x)$  を満たす  $x$  が存在しない。
- $f_3, f_4$  は全射である

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.4

次の  $f_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) が単射であるか、全射であるか、全単射であるか、答えよ。

		単射	全射	全単射
$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$	$f_1(x) = x^2$			
$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$	$f_2(x) = x^2$			
$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty),$	$f_3(x) = x^2$			
$f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty),$	$f_4(x) = x^2$			

- $f_1, f_3$  は単射でない  $\because x = -1, x' = 1$  とすると、 $x, x' \in \mathbb{R}$ ,  
 $x \neq x' \wedge f_j(x) = f_j(x')$ .
- $f_2, f_4$  は単射である  $\because f_j'(x) = 2x > 0$  ( $x \in (0, \infty)$ ) であるから、 $f_j$  は定義域  $[0, \infty)$  で狭義単調増加である。ゆえに  $f_j$  は単射である。
- $f_1, f_2$  は全射でない  $\because y = -1$  とすると  $y \in \mathbb{R}$  であり、 $y = f(x)$  を満たす  $x$  が存在しない。
- $f_3, f_4$  は全射である  $\because$  任意の  $y \in [0, \infty)$  に対して、 $x := \sqrt{y}$  とおくと、  
 $x \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \wedge y = f(x)$ .

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$  に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$  ならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つので、 $\text{id}_X$  は単射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$  に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$  ならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つので、 $\text{id}_X$  は単射である。

また、任意の  $y \in X$  に対して、 $x := y$  とおくと、 $x \in X$  であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$  であるから、 $\text{id}_X$  は全射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$  に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$  ならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つので、 $\text{id}_X$  は単射である。

また、任意の  $y \in X$  に対して、 $x := y$  とおくと、 $x \in X$  であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$  であるから、 $\text{id}_X$  は全射である。

以上から、 $\text{id}_X$  は全単射である。

### 例 11.6 (包含写像)

$\emptyset \neq X \subset Y$  とするとき、包含写像  $i: X \rightarrow Y$  は単射である。



## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$  に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$  ならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つので、 $\text{id}_X$  は単射である。

また、任意の  $y \in X$  に対して、 $x := y$  とおくと、 $x \in X$  であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$  であるから、 $\text{id}_X$  は全射である。

以上から、 $\text{id}_X$  は全単射である。

### 例 11.6 (包含写像)

$\emptyset \neq X \subset Y$  とするとき、包含写像  $i: X \rightarrow Y$  は単射である。  
(恒等写像の単射性の証明と同様。)

### 例 11.7 (射影作用素)

空でない集合  $X, Y$  に対して、射影作用素  $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$  は全射である。

## 4.6 単射, 全射, 全単射の例

### 例 11.5 (恒等写像)

$X$  を空でない集合とする。恒等写像  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  は全単射である。

実際、 $x_1, x_2 \in X$  に対して、 $\text{id}_X(x_1) = \text{id}_X(x_2)$  ならば、 $x_1 = x_2$  が成り立つので、 $\text{id}_X$  は単射である。

また、任意の  $y \in X$  に対して、 $x := y$  とおくと、 $x \in X$  であり、 $\text{id}_X(x) = x = y$  であるから、 $\text{id}_X$  は全射である。

以上から、 $\text{id}_X$  は全単射である。

### 例 11.6 (包含写像)

$\emptyset \neq X \subset Y$  とするとき、包含写像  $i: X \rightarrow Y$  は単射である。  
(恒等写像の単射性の証明と同様。)

### 例 11.7 (射影作用素)

空でない集合  $X, Y$  に対して、射影作用素  $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$  は全射である。  
(すでに  $\text{pr}_X(X \times Y) = X$  を示してある。ゆえに  $\text{pr}_X$  は全射である。)

# 付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性

(講義時間に余裕があれば講義するが、フツーは宿題のネタにする程度。)  
実は次の命題が成り立つ。

## 命題 11.8 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)

$X, Y$  が有限集合であるとする。 $X$  と  $Y$  の要素の個数をそれぞれ  $\#X$ ,  $\#Y$  と書く。このとき、以下の (1)-(4) が成り立つ。

- ①  $X$  から  $Y$  への単射が存在する  $\Leftrightarrow \#X \leq \#Y$ .
- ②  $X$  から  $Y$  への全射が存在する  $\Leftrightarrow \#X \geq \#Y$ .
- ③  $X$  から  $Y$  への全単射が存在する  $\Leftrightarrow \#X = \#Y$ .
- ④  $\#X = \#Y$  ならば、任意の写像  $f: X \rightarrow Y$  について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

(i)  $f$  は単射    (ii)  $f$  は全射    (iii)  $f$  は全単射

# 付録 有限集合の間の写像の全射性、単射性

**証明**  $n := \#X$ ,  $m := \#Y$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

- ①  $f: X \rightarrow Y$  が単射であれば、 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) はどの二つも相異なり、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$  であるから、要素の個数を比較して  $\#X = n \leq \#Y$ . 逆に  $n \leq m$  とすると、 $f(x_i) = y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$  を定義すると、 $f$  は単射となる。
- ②  $f: X \rightarrow Y$  が全射であれば、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$  であるから、 $\#X = n \geq \#Y$ . 逆に  $n \geq m$  とすると、 $f(x_i) = y_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x_i) = y_1$  ( $m < j \leq n$ ) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$  を定義すると、 $f$  は全射となる。
- ③  $X$  から  $Y$  への全単射が存在すれば、(1) から  $\#X \leq \#Y$ , (2) から  $\#X \geq \#Y$  であるから  $\#X = \#Y$ . 逆に  $\#X = \#Y$  とすると、(1) から  $X$  から  $Y$  への単射  $f$  が存在する。(3) から  $f$  は全単射である。
- ④ (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i) $\Rightarrow$ (iii) と (ii) $\Rightarrow$ (iii) が導かれる)。  
 $f: X \rightarrow Y$  が単射とする。 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) が相異なるので、 $|\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\}| = n$ , 仮定からそれが  $\#Y$  に等しく、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$  であるから、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$ . ゆえに  $f$  は全射である。  
一方、 $f: X \rightarrow Y$  が全射とする。 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$ . 仮定から  $n = \#Y$  であるから、 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに  $f$  は単射である。

## 命題 11.9 (参考: 線形代数バージョン)

$X, Y$  が体  $K$  上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ  $\dim X, \dim Y$  と書く。

- ①  $X$  から  $Y$  への単射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$ .
- ②  $X$  から  $Y$  への全射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$ .
- ③  $X$  から  $Y$  への全単射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$ .
- ④  $\dim X = \dim Y$  ならば、任意の線形写像  $f: X \rightarrow Y$  について、以下は同値である。
  - (i)  $f$  は単射
  - (ii)  $f$  は全射
  - (iii)  $f$  は全単射

## 宿題7について補足 (1)

まず (1)  $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$  について。

# 宿題7について補足 (1)

まず (1)  $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$  について。

- 集合の等式  $A = B$  の証明は、

$A \subset B$  と  $B \subset A$  を示す

あるいは (同じことだが)

任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Rightarrow x \in B$  と、 $x \in B \Rightarrow x \in A$  を示す

のが基本 (まず考えるべきやり方という意味) である。

# 宿題7について補足 (1)

まず (1)  $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$  について。

- 集合の等式  $A = B$  の証明は、

$A \subset B$  と  $B \subset A$  を示す

あるいは (同じことだが)

任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Rightarrow x \in B$  と、 $x \in B \Rightarrow x \in A$  を示す

のが基本 (まず考えるべきやり方という意味) である。

- 「ドモルガン律から正しい」と書いた人がいたが、(1) はド・モルガン律そのもので、それを証明しなさい、という問題である。集合のド・モルガン律は、2 個の場合を証明してあって、それから数学的帰納法で、有限個の集合の場合に成り立つことは簡単に分かるけれど、数学的帰納法で無限個の場合の証明はできない。



# 宿題7について補足 (1)

まず (1)  $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$  について。

- 集合の等式  $A = B$  の証明は、

$A \subset B$  と  $B \subset A$  を示す

あるいは (同じことだが)

任意の  $x$  に対して、 $x \in A \Rightarrow x \in B$  と、 $x \in B \Rightarrow x \in A$  を示す

のが基本 (まず考えるべきやり方という意味) である。

- 「ドモルガン律から正しい」と書いた人がいたが、(1) はド・モルガン律そのもので、それを証明しなさい、という問題である。集合のド・モルガン律は、2 個の場合を証明してあって、それから数学的帰納法で、有限個の集合の場合に成り立つことは簡単に分かるけれど、数学的帰納法で無限個の場合の証明はできない。
- 集合族の合併、共通部分は、直観的には  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ ,

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$  ということだが、 $\cap \dots$  や  $\cup \dots$  は曖昧で、証明するときには使えないと考えること。一方、 $\cup \dots$  や  $\cap \dots$  を書かずに  $n$  番目で止めるのは (結構多かった)、はっきり間違いである。

## 問7について補足 (2)

(2)  $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{n}\}$  について  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$  を証明する。

集合が空集合であることの証明は、少しやりにくい。これについては、特別に説明をしている (第7回授業のスライド10ページ。「空集合でないと仮定すると」と背理法にするのがお勧めである。

## 問7について補足 (2)

(2)  $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{n}\}$  について  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$  を証明する。

集合が空集合であることの証明は、少しやりにくい。これについては、特別に説明をしている (第7回授業のスライド10 ページ。「空集合でない」と仮定すると」と背理法にするのがお勧めである。

任意の自然数  $n$  に対して  $0 < x \leq \frac{1}{n}$  が成り立つことから、どうやって矛盾を導くか。授業中の類題では、アルキメデスの公理を使う方法と、極限の議論 (そこでは、はさみうちの原理) に持ち込む方法を紹介した。はさみうちの原理よりも、次の定理を使うとした方が分かりやすいかも。

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  がともに収束列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n$$

が成り立つならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

**注意** 仮定を  $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n < b_n$  に変えても、結論は  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  である。

この定理を、 $a_n$  として  $x$ ,  $b_n$  として  $\frac{1}{n}$  を当てはめると、 $x \leq 0$  が得られる。

## 問7について補足 (3)

(3) は完答した人も多かったが、とりこぼした人も結構いる。

- a)  $\{0\}$  は 0 というただ 1 つの要素を持つ (それ以外の要素は持たない) 集合である。ゆえに  $0 \in \{0\}$  は正しい。  
(任意の数学的対象  $a$  に対して  $a \in \{a\}$  は正しい。)
- b) しかし  $0 \neq \{0\}$  であるから、 $\{0\} \in \{0\}$  は成り立たない。
- c)  $\{0\} \subset \{0\}$  を偽と間違えた人が数人いた。まず、明らかに  $\{0\} = \{0\}$ 。ところで、一般に  $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$  であるので、 $A = B$  のとき  $A \subset B$  は真である。
- d)  $\{4, 3, 2, 1\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , (e)  $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$  について。集合を要素を書き並べて表すとき、順序は問わない、重複しても良いことにする、という注意をした。どちらも真である。
- f)  $(1, 2, 3, 4) = (4, 3, 1, 2)$  について。順序対なので、順番を入れ換えたら等しくなくなる。

# 参考文献