数理リテラシー　第10回

これまでの宿題を振り返る

（今日は宿題なし）

問1は　はるか昔のこと・・・・

思い出そう。

例年だと中間試験。

全般的

◎ ~~「数学は式だけ書けばよい。」~~ 基本は 文章を書く，と考えること。

式だけの文章もある。 $1+2+3=3+3=6 \quad \therefore 1+2+3=6.$

式がならんでいるだけでは文章にならないこと多い。言葉でつなぐ。

言葉は，どうすればよい？ 真似をしよう。

主語・目的語を省略せずに書こう。 これは意識しないとできない。 たとえばこのスライド省略多い。

◎ 式で書けることは式で書くことをすすめる。

◎ 授業中に類題を出すようにしている。（できてほしいことをテストに
テストできるように宿題出す
宿題解けるように授業する）

数値を変えるだけでないので類題とわかりにくいかもしれないけど。

問1 (1)の式は

$(\bigcirc \land \square) \lor \triangle$ ……※

(2)の式は

$\bigcirc \lor (\square \land \triangle)$ ……※※

第2回授業内容と ∧ と ∨ を入れかえただけ。

(1)の真理値表以外は本当にそれだけ。

わからない言葉、まちがえた記号は放置しない。

調べる。

自己チェックする。

練習する。

辞書式順序

結合法則

・・・

◎ (1) を 1) のように書く人多い。"勝手に"変えない。

数理リテラシー 宿題 No. 1 (2021 年 4 月 21 日出題, 26 日 13:30 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は裏面も使用可)

以下では、交換法則 $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ や結合法則 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ は用いて良い。

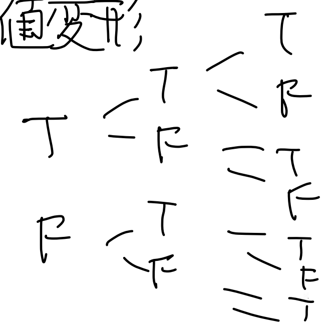
(1) 真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

(2) (1) の結果を用いて、$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ を示せ。

(3) (1) と (2) の結果を用いて、次式を示せ。

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)\,.$$

問1　命題の証明　①真理値表　②同値変形



① 順番は辞書式順序で ← 理解すること

(1)[証明] 真理値表を書く.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

辞書式順に
なってない。

上の表より、2列目と5列目の真偽が等しいので

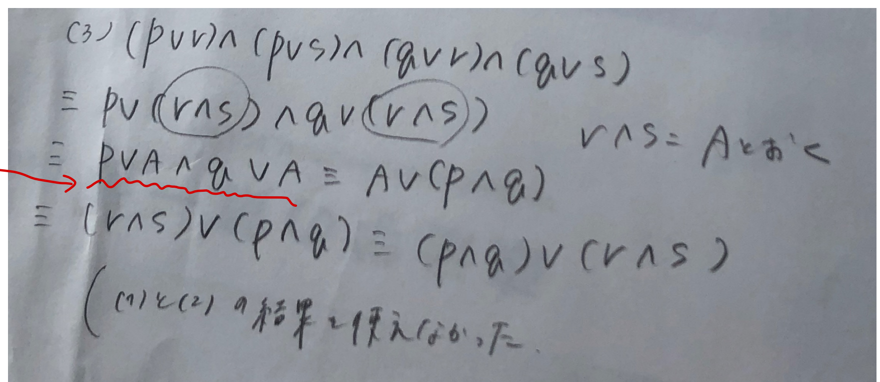
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ は成立する ■

② ・法則の名前をまちがえないように。

・計算で証明する。目的は他人に説明すること。途中を省略しすぎない。

・特に基本的な法則の証明では、法則そのものを知っているので、何を使ってよいか注意する。

・∧と∨　両方あるときは、かっこ必要



(3) $(p\vee r)\wedge(p\vee s)\wedge(q\vee r)\wedge(q\vee s)$

$\equiv p\vee(r\wedge s)\wedge q\vee(r\wedge s)$　　$r\wedge s = A$とおく

$\equiv p\vee A\wedge q\vee A \equiv A\vee(p\wedge q)$

$\equiv (r\wedge s)\vee(p\wedge q) \equiv (p\wedge q)\vee(r\wedge s)$

((1)と(2)の結果を使えなかった。

こういう式書いてはいけない。

数理リテラシー 宿題 No. 2 (2021年4月28日出題, 5月3日 13:30までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名______________　(解答は裏面も使用可. 表裏を1つのPDFにして提出。)

(1) 一般に $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ が成り立つことを認めて、$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$ を同値変形で証明せよ。

(2) 次の命題を記号 (論理式) で表せ。

(a) すべての複素数 z に対して $z + 0 = z$ が成り立つ。

(b) ある正の数 θ が存在して $\sin\theta = 1$ が成り立つ。
($\sin\theta = 1$ を満たすような正の数 θ が存在する。)

(3) 次の式で書かれた命題を日本語の文で表せ (不等式、等式は式のままで構わない)。

(a) $(\exists n \in \mathbb{Z})\ n + 1 = 0.$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$

問2

◎ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ まちがえないように。「使って練習」

もう一度 自然数全体の集合は, N でなく $\mathbb{N}$ か $\mathbf{N}$ と書く。

コンピューター入力する人で N と書く人数人いる、改めよう。

一方, 普通の集合で問題文で A と書いてあるものは

$\mathbb{A}$ でなく A と書くべき。

◎「正の数」をまちがえる人多い。 x は正の数は $x>0$.

なぜか $x \in \mathbb{Z}$ としたり (整数と混同?) $x \in \mathbb{N}$ とした人がいる。

$$(\forall x > 0) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

なぞのまちがい

「任意の○が存在して」 意味不明 ありえない表現

今回は少数だった。実は2年生以上で増加する。

「任意の○が存在して」はNG表現です。

$(\forall x \in A)\ x \in B$ が真としても、

$x \in A$ や $x \in B$ をみたす x が存在するとは言ってない。 A が ϕ のときとか。

$\forall$ は存在と無関係

数理リテラシー 宿題 No. 3　(2021 年 5 月 12 日出題, 5 月 17 日 13:30 までに Oh-o! Meiji で提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 3

(1) 次の命題を記号 (論理式) で表せ。

(a) 任意の正の数 a に対して、ある実数 x が存在して $x^2 = a$ が成り立つ。

(b) 任意の有理数 x, y に対して、$x^2 + y^2 \geq 0$ が成り立つ。

(2) 次の式で書かれた命題を日本語の文で表せ (不等式は式のままで構わない)。

(a) $(\exists x \in \mathbb{N})\ (\exists y \in \mathbb{N})\ x^2 + y^2 = 50.$

(b) $(\exists L \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x \geq L.$

(3) 次の各命題を証明せよ。

(a) 任意の正の数 x に対して、ある正の数 y が存在して、$xy = 1$ が成り立つ。

(b) $(\exists x \in \mathbb{Z})\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y^2 > x.$

問3

復習したいときは，第4回授業のスライド見て。

$(\exists x > 0)\ P(x)$

「$P(x)$ が成り立つ（を満たす）ような正の数 x が存在する。」

自分で書くときは，

「ある正の数 x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」をすすめる。

「すべて」vs「任意の」　どちらでも良いことが多いけれど…

「すべての実数 x に対して $x^2 \geqq 0$ が成り立つ。」…(*)

この証明を書こうとする。たとえば　$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geqq 0$

$x > 0$ ならば …

$x = 0$ ならば …

$x < 0$ ならば …

のようなことをするとして、書き出しは、

x は実数とする。特別なものではなくて、実数である以外の条件は何もつけない

何でもあり（すべての実数についての議論だから）。

そのことを示すのに「x を任意の実数とする。」と

書き始める。そういうことだと思われる。

（個人的には (*) を「任意の実数 x に対して…」とするのはキライ。）

一方　証明中で「x をすべての実数とする」ははっきり変

第4回スライド
§2.5を復習

(3) 証明も多くは真似から始めること。

(a) (a) **任意の正の数 x に対して、ある正の数 y が存在して、$xy = 1$ が成り立つ。**

xを任意の正の数とする。
$y = \frac{1}{x}$とおくと，yは正の数であり，
$$xy = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$
$\therefore xy = 1.$

∀あったら「任意」は必要。
一方，証明中に「ある」を書く必要はない。

(b) $(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})\ y^2 > x$ を証明せよ。

$x = -1$とおくと xは整数であり，
任意の整数 yに対して
$$y^2 \geq 0 > -1 = x$$
$\therefore y^2 > x$

かけ算のつもりで * を書く人がちらほら。

プログラミング言語の影響？

数理リテラシー 宿題 No. 4　(2021 年 5 月 19 日出題, 5 月 24 日 13:30 までに Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 4　(1) 次の論理式の否定を作れ。ただし、(a) では A は $\mathbb{R}$ の部分集合, (b) では $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は数列とする。(説明を書いたけれど、この問題を解くのにこれらの情報はほとんど必要がない。)

(a) $(\exists U \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ x \leq U.$　(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ (\forall m \in \mathbb{N}\colon\ m \geq N)\ |x_n - x_m| < \varepsilon.$

(2) 「-5 は自然数ではないが整数であり、$\sqrt{19}$ は有理数ではないが実数である。」を式で表せ。

(3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (x$ は 28 の約数$)\}$ を要素を並べる書き方 (外延的表現) で表せ。

(4) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ を条件を示す書き方 (内包的表現) で表せ (答は無数にあるが 1 つで良い)。

問4

(1)

(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}:\ n \geq N)\ (\forall m \in \mathbb{N}:\ m \geq N)$

$|x_n - x_m| < \varepsilon.$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N}: m \geq N)\ |x_n - x_m| < \varepsilon$

の否定をまちがえた人多い。

"$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}: n \overset{\geq}{<} N)(\exists m \in \mathbb{N}: m \overset{\geq}{<} N)$" $|x_n - x_m| \geq \varepsilon$

$|x_n - x_m| < \varepsilon$ が次の行になって、見落したせい？

(2) 「-5 は自然数ではないが整数であり、$\sqrt{19}$ は有理数ではないが実数である。」を式で表せ。

(2) $-5 \notin \mathbb{N}$, $-5 \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{19} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{19} \in \mathbb{R}$

$$-5 \notin \mathbb{N} \wedge -5 \in \mathbb{Z} \wedge \sqrt{19} \notin \mathbb{Q} \wedge \sqrt{19} \in \mathbb{R}$$

2つの命題 p, q をどちらも主張するには $p \wedge q$

この講義では，あいまいさのないように ， でなく $\wedge$ で書いて下さい。 … と言ってあります。

実際のテキスト文章中の ， は $\wedge$ であるか $\vee$ であるか，あいまい。

区切りはカンマ , で, 読点、やピリオド(ポイント, ドット) . とはっきり区別できるように書いて下さい。

(3) $A=\{1、2, 4、7. 14, 28\}$

集合の表し方　　　大きく分けて２つのやり方

$B = \{x \in \mathbb{Z}$ かつ $-2 \leq x \leq 2\}$

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ かつ $-2 \leq x \leq 2\}$

省略しない。

(5) $A = \{x \mid 1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

余計

$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

(3) $\mathbb{A} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$

(4) $\mathbb{B} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leqq x \leqq 2\}$

A, B と書くべき。

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ はよくない。問題文でそうなっていないのだから。

どうしてもそうしたければ、「A のことを $\mathbb{A}$ と書く」のように

断り書きが必要.

数理リテラシー 宿題 No. 5 (2021 年 5 月 26 日出題, 5 月 31 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 5

(1) A と B を集合とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A の定義を書け。また、それぞれ何と呼ばれるか答えよ。ただし、全体集合を X とする。

(2) $A = \{-1, 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 全体集合を $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 3\}$ とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^B を求めよ (要素をすべて書き並べる方法で表せ。)。

(3) 次の各文の内容を式で表せ。ただし A, B, X は集合とする。

(a) A と B の共通部分は、1 以上 3 以下の実数全体の集合である。

(b) A の補集合は、X と A の差集合に等しい。

(c) x が A と B の合併集合の要素であるためには、x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。

(d) A と B が等しいためには、A が B の部分集合であり、かつ B が A の部分集合であることが必要十分である。

問5

(1)

A∪B : ~~ある数xについて~~ x∈A または x∈B が成り立つ (和集合)

AとBの ← 省略しない

ような x 全体の集合

「A∪Bは、AとBの少なくとも一方に含まれる要素全体の集合」

式で書く方が、なれれば楽で、誤解の余地少ない。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

= は := でもよい。これは定義のときに使われる記号。

左辺に書いてある記号で右辺に書いてあるものを表す、という意味。

$\overset{\text{def.}}{=}$ という記号もあるけれど、左辺と右辺の区別あいまい。

なぜか : = と離す人がいる。くっつけて書く。:=

問5の 添削を 見直すと ずい分ミスをしている。

まちがえたのを 見すごしたとか、

あっているのに × にしたとか。

後で解答公開

$$A \times B = \{(-1,0), (-1,1), (-1,2),$$
$$(0,0), (0.1), (0.2)\}$$

カンマ書くべき

$$2^B = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0.1\},$$
$$\{1.2\}, \{0.2\}, \{0,1.2\}\}$$

$$2^B = \{\phi, \{0\}. \{1\}. \{2\}. \{0,1\}, \{0,2\}. \{1,2\}. \{0.1.2\}\}.$$

いつの間にか、点になっている。

良くある間違い

$$A \times B = \{\{-1,0\},\{-1,1\},\{-1,2\},\{0,0\},\{0,1\},\{0,2\}\}$$

順序対なので，{ }でなく( )を使う。

$$A \times B = \{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,0),(0,1),(0,2)\}$$

$$2^B = \{\emptyset,(0),(1),(2),(0,1)(0,2)(1,2)(0,1,2)\}$$

集合なので( )でなく{ }を使う。

$$2^B = \{\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$$

(3) 次の各文の内容を式で表せ。ただし A, B, X は集合とする。

(a) A と B の共通部分は、1 以上 3 以下の実数全体の集合である。

(b) A の補集合は、X と A の差集合に等しい。

定義するわけでないので := はおかしい。= とすべき。

(a) $A \underset{\cap}{\cup} B := \{\underbrace{x \mid}_{\in \mathbb{R}} 1 \leq x \leq 3\}$

$$A \cap B = \{x|(\cancel{\exists} x \in \mathbb{R}) \overset{\wedge}{,} 1 \leq x \leq 3\}.$$

$A \cap B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 \leq x \leq 3\}$

(b) $A^c = X/A$ $A^C = X¥A$ 差集合は / や ¥ でなく \

$A^c = X \setminus A$

$X - A \cancel{= \{y \mid (\exists x \in X)(\exists a \in A)\ y = x - a\}}$

(c) x が A と B の合併集合の要素であるためには、x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。

「◯ であるためには □ であることが必要十分」は ◯ ⇔ □ と書く。

◯ と □ は条件である。集合を書く人が多い。それはまちがい。

(c) $x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$$\underbrace{x \in (A \cup B)}_{\text{条件}} := \underbrace{\{x \mid x \in A \vee x \in B\}}_{\text{集合}}$$

おかしい。

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \cup x \in B$ 　$\vee$

⇔ を ⇒ や ⇐ にするのはNG。

$\vee$ と $\cup$ をまちがえない。　$\wedge$ と $\cap$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

$\in$ を $\subset$ にしてしまうまちがい意外と多い。

(d) A と B が等しいためには、A が B の部分集合であり、かつ B が A の部分集合であることが必要十分である。

$(\ )$ はなくてもよい。

$$A = B \iff (A \subset B \wedge B \subset A)$$

$(\ )$

$$(A = B) = \{ A \in B \wedge B \in A \}$$

$\iff$ $\subset$ $\subset$

数理リテラシー 宿題 No. 6　(2021 年 6 月 2 日出題, 6 月 7 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 6

(1) $A = \{0, 1\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

(2) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

任意の自然数 n に対して $A_n := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{n} < x \leq 2n\right\}$ とする。以下の (a), (b), (c) に答えよ。

(a) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

(b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (今週は証明しなくて良い)。

(c) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (今週は証明しなくて良い)。

(3) 集合 A, B, C, D が $A \subset B$, $C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。

問6

(1) $A = \{0, 1\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

$B = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

こがわからない、という人が多い。

$B = \{p, q, r, s\}$ のとき

$2^B = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}, \{p,q\}, \{p,r\}, \{p,s\}, \{q,r\}, \{q,s\}, \{r,s\}, \{p,q,r\}, \{p,q,s\}, \{p,r,s\}, \{q,r,s\}, \{p,q,r,s\}\}$

であるから、$p = \emptyset$, $q = \{0\}$, $r = \{1\}$, $s = \{0, 1\}$ を代入して

$$
\begin{aligned}
C = 2^B = \{&\emptyset, \\
&\{\emptyset\}, \{\boxed{\{0\}}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}, \\
&\{\emptyset, \{0\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}\}, \{\{0\}, \{0,1\}\}, \{\{1\}, \{0,1\}\}, \\
&\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}, \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}, \\
&\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}\}.
\end{aligned}
$$

$\emptyset$ と書くべきを $\{\emptyset\}$ と書いたり、$\{0\}$ を 0 と書いたりする間違いが多かった。B の要素数が 4 なので、C の要素数は $2^4 = 16$ である。…それからカンマ ，がドット ． にしか見えない答案を書く人がまだ多い。■

$\#2^A = 2^{\#A}$

(2) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

これは次を覚えましょう，と言ってある。

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}$$

もちろん言葉で覚えてもよいけれど…

「$x\in A_n$ となる $n\in\mathbb{N}$ が存在する x 全体の集合」 かえってわかりにくくない？

(2) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ： $A_1, A_2\cdots$ に対しての和集合"

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ： $A_1, A_2\cdots$ に対しての積集合"

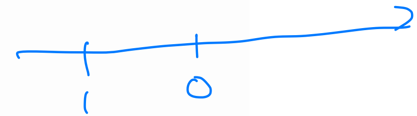
これは定義とは言えない。名前を言っただけ

(2) 任意の自然数 n に対して $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} < x \leq 2n\}$ とする。以下の (a), (b), (c) に答えよ。

(a) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

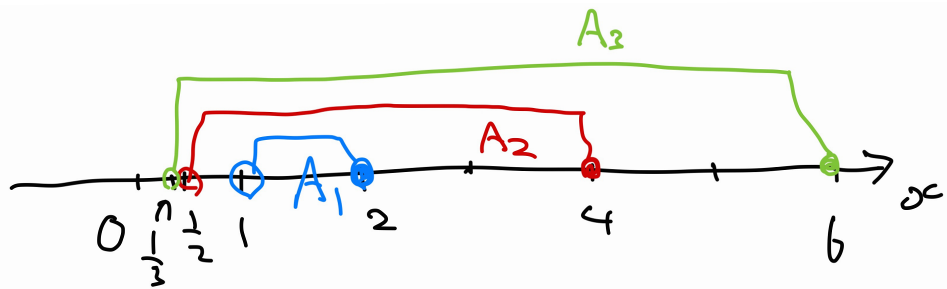
(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (今週は証明しなくて良い)。

(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (今週は証明しなくて良い)。



意外と (a) をまちがえている! (0 の左に 1 があったり, 順番めちゃくちゃ)

(a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$, $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 4\}$, $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leq 6\}$



(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0, \infty)$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$

(3) 集合 A, B, C, D が $A \subset B, C \subset D$ を満たすとき、$A \times C \subset B \times D$ が成り立つことを証明せよ。

「証明の仕方がわからない。」という人多い。 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A)\, x \in B$

第7回(§3.14)で説明したつもり… なんだけど。

例題 集合 A, B, C が $A \subset B$ と $B \subset C$ を満たすならば $A \subset C$ であることを示せ。

証明 $A \subset B$, $B \subset C$ と仮定する。

x を A の任意の要素とする。

$A \subset B$ であるから $x \in B$.

$B \subset C$ であるから .

目標 $x \in C$.

ゆえに $A \subset C$ //

(3) 解答

$$A\times C \subset B\times D$$

xを$A\times C$の任意の要素とする。
$A\times C$の定義から、ある$a\in A$, $c\in C$が存在して $x=(a,c)$
仮定 $A\subset B$ より $a\in B$. 仮定 $C\subset D$ より $c\in D$.
ゆえに $x=(a,c)\in B\times D$. ゆえに $A\times C\subset B\times D$. //

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$ 略した書き方

$$=\{x\mid (\exists a\in A)(\exists b\in B)\ x=(a,b)\}$$

数理リテラシー 宿題 No. 7　(2021 年 6 月 9 日出題, 6 月 14 日 13:30 Oh-o! Meiji に提出)

__年__ 組____番　氏名____________　　(解答は何ページでも可. 1 つの PDF にして提出)

問 7　(1) 任意の集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ について、$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^{\mathsf{C}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n^{\mathsf{C}}\right)$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x \leq \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ であることを示せ。

(3) 次の各命題の真偽を述べよ (証明は不要)。(a) $\{0\} \in \{0\}$　(b) $0 \in \{0\}$　(c) $\{0\} \subset \{0\}$
(d) $\{4,3,2,1\} = \{1,2,3,4\}$　(e) $\{1,2,2,3,3,3\} = \{1,2,3\}$　(f) $(1,2,3,4) = (4,3,1,2)$

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n^c)$$ を示せ。

$A = B \iff \forall x\,(x\in A \iff x\in B) \iff A\subset B \wedge B\subset A \iff ((\forall x\in A)\ x\in B) \wedge ((\forall x\in B)\ x\in A)$

証明

x を任意とする.

$$x\in\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c \iff \neg\left(x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$
$$\iff \neg\left((\forall n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\right)$$
$$\iff (\exists n\in\mathbb{N})\ \neg(x\in A_n)$$
$$\iff (\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n^c$$
$$\iff x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

ゆえに $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$ //