数理リテラシー 第9回
～ 写像 (2) ～

桂田 祐史

2021 年 6 月 16 日

目次

本日の内容＆連絡事項

本日の内容＆連絡事項

- 緊急事態宣言が 6 月 20 日までに解除された場合、明治大学はレベル 1 に戻ります。数理リテラシーも対面授業を行います。
- 対面授業に戻った場合も、体調不良などの理由でやむを得ず欠席した人向けのオンライン講義資料は提供します (内容は検討中)。対面授業に出席しなくとも、対面授業から (あるいは資料提供から)1 週間以内にすべてを視聴すれば、出席したと認めます。
- 体調不良のときは無理をしないで欠席して下さい。理由の説明は不要とします。一方 (天候不順でもあるし、忙しい時期でもあるし、むつかしいですが) できる範囲で体調の維持に努めて下さい。

本日の内容＆連絡事項

- 緊急事態宣言が 6 月 20 日までに解除された場合、明治大学はレベル 1 に戻ります。数理リテラシーも対面授業を行います。
- 対面授業に戻った場合も、体調不良などの理由でやむを得ず欠席した人向けのオンライン講義資料は提供します (内容は検討中)。対面授業に出席しなくとも、対面授業から (あるいは資料提供から)1 週間以内にすべてを視聴すれば、出席したと認めます。
- 体調不良のときは無理をしないで欠席して下さい。理由の説明は不要とします。一方 (天候不順でもあるし、忙しい時期でもあるし、むつかしいですが) できる範囲で体調の維持に努めて下さい。
- 本日の授業内容: 写像の例 (続き), 合成写像
- 宿題 7(問 7) の解説を行います。
- 宿題 8 を出します。〆切は 6 月 21 日 (月曜)13:30 です。

本日の内容&連絡事項

- 緊急事態宣言が 6 月 20 日までに解除された場合、明治大学はレベル 1 に戻ります。数理リテラシーも対面授業を行います。
- 対面授業に戻った場合も、体調不良などの理由でやむを得ず欠席した人向けのオンライン講義資料は提供します (内容は検討中)。対面授業に出席しなくとも、対面授業から (あるいは資料提供から)1 週間以内にすべてを視聴すれば、出席したと認めます。
- 体調不良のときは無理をしないで欠席して下さい。理由の説明は不要とします。一方 (天候不順でもあるし、忙しい時期でもあるし、むつかしいですが) できる範囲で体調の維持に努めて下さい。
- 本日の授業内容: 写像の例 (続き), 合成写像
- 宿題 7(問 7) の解説を行います。
- 宿題 8 を出します。〆切は 6 月 21 日 (月曜)13:30 です。
- (アナウンス済) 中間試験を行うことにしていましたが、今年は行いません。
- 次回はこれまで宿題について、提出された答案で多かった間違いなどを解説します。質問する良い機会なので、自分が提出した宿題のフィードバックを見て準備しておいて下さい。

例 9.1 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$$\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X \text{ を } \mathrm{pr}_X((x,y)) = x \ ((x,y) \in X \times Y),$$

例 9.1 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$$\mathrm{pr}_X\colon X\times Y\to X \text{ を } \mathrm{pr}_X((x,y))=x\ ((x,y)\in X\times Y),$$
$$\mathrm{pr}_Y\colon X\times Y\to Y \text{ を } \mathrm{pr}_Y((x,y))=y\ ((x,y)\in X\times Y)$$

で定める。

例 9.1 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$$\mathrm{pr}_X\colon X\times Y\to X \text{ を } \mathrm{pr}_X((x,y))=x\ ((x,y)\in X\times Y),$$
$$\mathrm{pr}_Y\colon X\times Y\to Y \text{ を } \mathrm{pr}_Y((x,y))=y\ ((x,y)\in X\times Y)$$

で定める。

それぞれ X への**射影**、Y への**射影** と呼ぶ。

例 9.2 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、$c \in Y$ とするとき、$f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

例 9.3 (特性関数)

X は空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**指示関数** (the indicator function of A) とよぶ。

(**定義関数**と呼ぶ人もいる。確率論では、Fourier 変換のことを特性関数と言うので、特性関数というとそのことと誤解する人が多そう。)

例 9.3 (特性関数)

X は空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**指示関数** (the indicator function of A) とよぶ。

(**定義関数**と呼ぶ人もいる。確率論では、Fourier 変換のことを特性関数と言うので、特性関数というとそのことと誤解する人が多そう。)

Dirichlet の関数 $D \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、$\chi_{\mathbb{Q}}$ である。

例 9.4 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ならば、$f' \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

例 9.4 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能である。つまり $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ ならば、$f' \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

$D(\sin) = \cos$.
$F(x) = x^2$, $G(x) = 2x$ とするとき、$D(F) = G$.

例 9.5 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。

例 9.5 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

例 9.5 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、

例 9.5 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。
逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。
結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない**。

例 9.5 (実数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない**。

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f\colon X\to Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

(a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、

(b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{ x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは$\cdots$

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \lor y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{ x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは$\cdots$

$$f_2(X) = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.
(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

4.4 練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{ x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \lor y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{\sin x \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.
(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.　(b) $f_4(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.　□

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x\ (x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'\ (f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x\ (x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'\ (f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X)$

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ D(x)=\begin{cases}1 & (x\in\mathbb{Q})\\ 0 & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad-bc\neq 0$ を満たす実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f((x,y))=(ax+by,cx+dy)\ ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq\emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X\to X,\ \mathrm{id}_X(x)=x\ (x\in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ D(f)=f'\ (f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R})=\{0,1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ は解 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y))=(u,v)$. ゆえに $(u,v)\in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X)=\{\mathrm{id}_X(x)\mid x\in X\}$

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x\ (x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'\ (f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\}$

4.4 練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**
4. $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**
4. $D(C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.　($\because$ 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ に対して、$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ とおくと、$F' = f$ かつ F は無限回微分可能 $(F \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ であるから、$D(F) = f$. ゆえに $D(C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})) \supset C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

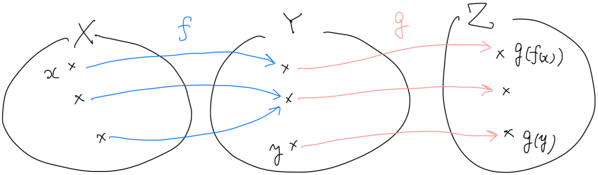
定義 9.6 (合成写像)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h\colon X \to Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、$g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)),$$



実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 9.7 (合成写像の別の定義)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Z$, $f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h\colon X \to Z, \quad h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

4.5.1 定義　細かい注意

実は合成写像の定義については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 9.7 (合成写像の別の定義)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Z$, $f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h\colon X \to Z, \quad h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、$Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。$Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、$g\left(f(x)\right)$ が意味を持つので h が定義できる。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z,\ h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f: X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

4.5.2 写像の合成についての結合律

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、 $h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 9.8 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明 $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに、$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

宿題8(問8)について

問題文は以下においてある。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi8.pdf

内容は値域を求める練習。慣れるまでは記号にとまどう人が多い。

最初に、問題の写像を表す記号、定義域を把握する。それぞれ f, X であれば、

$$f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

と書いて、さらに $f(x)$ を定義式に置き換えたりする。

上の例でも、そのように進めたことが多い。

f が関数でグラフが描けるならば、描くことで解決に近づくかも。

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).