数理リテラシー 第8回

〜 集合 (4), 写像 (1) 〜

桂田 祐史

2020 年 6 月 9 日

目次

本日の内容＆連絡事項

- 6 月 16 日も授業はオンライン (オンデマンド形式) で行います。緊急事態宣言が解除された場合、明治大学はレベル 1 にすみやかに戻す予定で、その場合は対面授業を行います。ただし、オンラインでも受講できるようにする予定です。

本日の内容＆連絡事項

- 6 月 16 日も授業はオンライン (オンデマンド形式) で行います。緊急事態宣言が解除された場合、明治大学はレベル 1 にすみやかに戻す予定で、その場合は対面授業を行います。ただし、オンラインでも受講できるようにする予定です。
- 当初、シラバスには中間試験を行うと書きましたが、最初の対面授業が試験というのも辛いので、その代わりに宿題で良くある間違いを解説する授業を行う予定です。

本日の内容&連絡事項

- 6 月 16 日も授業はオンライン (オンデマンド形式) で行います。緊急事態宣言が解除された場合、明治大学はレベル 1 にすみやかに戻す予定で、その場合は対面授業を行います。ただし、オンラインでも受講できるようにする予定です。
- 当初、シラバスには中間試験を行うと書きましたが、最初の対面授業が試験というのも辛いので、その代わりに宿題で良くある間違いを解説する授業を行う予定です。
- 本日の授業内容: 集合族 無限集合族の合併と共通部分について、証明に取り組みます。これで第 II 部「集合」はおしまいです。その後、いよいよ最終第 III 部「写像」に入ります。
- 宿題 7 を出します。締め切りは 6 月 14 日 (月曜)13:30 です。それ以降 6 月 16 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい
- 宿題 6(問 6) の解説を行います。

次は良く使う (単調な集合列の場合の共通部分と合併)。

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.
- (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

次は良く使う (単調な集合列の場合の共通部分と合併)。

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.
- (b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(a) の証明　一般に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が成り立つ。これは直観的に明らかに感じる人も多いだろう。次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に ($n = 1$ として) $x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

次は良く使う (単調な集合列の場合の共通部分と合併)。

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(a) の証明 一般に $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ が成り立つ。これは直観的に明らかに感じる人も多いだろう。次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に ($n = 1$ として) $x \in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$.

逆向きの包含関係 $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は次のように示せる。$x \in A_1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、仮定を用いて

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \quad \text{であるから} \quad A_1 \subset A_n.$$

ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. □

3.15.1 単調な集合列の場合の合併と共通部分 (続き)

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})$ $A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ の証明

3.15.1 単調な集合列の場合の合併と共通部分 (続き)

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ **ならば** $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ **の証明**

一般に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1$ が成り立つ。実際、$x \in A_1$ とすると、$n = 1$ に対して $x \in A_n$. ゆえに $(\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n$ が成立する。ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

3.15.1 単調な集合列の場合の合併と共通部分 (続き)

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ の証明

一般に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supset A_1$ が成り立つ。実際、$x \in A_1$ とすると、$n = 1$ に対して $x \in A_n$. ゆえに $(\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n$ が成立する。ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

一方 $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ は次のように証明できる。$x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、$x \in A_n$. 仮定より $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A_2 \subset A_1$. ゆえに $A_n \subset A_1$. ゆえに $x \in A_1$. 従って $\displaystyle\bigcup_{n\in A} A_n \subset A_1$. □

3.15.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

3.15.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

1. $\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ であること:

3.15.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

(i) $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

3.15.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

(i) $\{0\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$ であること:

3.15.2 前回の例の等式の証明

$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ の場合、

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

である、と述べたが、証明してみよう。

この場合、$A_{n+1} \subset A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つので、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ が成り立つ。以下、$\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ であることを証明しよう。

(i) $\displaystyle\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ であること: $x \in \{0\}$ とすると $x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n}$ であるから $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. 従って $\displaystyle x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

(ii) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \{0\}$ であること: $\displaystyle x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. ゆえに $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$.

3.15.2 前回の例の等式の証明 (続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

3.15.2 前回の例の等式の証明 (続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

1. アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」 を認めての証明. 背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえにある自然数 n が存在して $n|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{n}$. これは $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$.

3.15.2 前回の例の等式の証明 (続き)

$x \in \mathbb{R}$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば $x = 0$ であることの証明を 2 つ与える。

1. アルキメデスの公理「$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$」 を認めての証明. 背理法を用いる。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえにある自然数 n が存在して $n|x| > 1$. ゆえに $|x| > \frac{1}{n}$. これは $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ に矛盾する。ゆえに $x = 0$.
2. はさみうちの原理と、 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を認めての証明: $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理によって $0 \le x \le 0$. ゆえに $x = 0$. □

写像とは

写像とは　関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

で x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**（しゃぞう）と呼ぶ、ということ。

写像とは　関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

で x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**(しゃぞう)と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

写像とは　関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

で x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**(しゃぞう)と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

「数列は写像である」も正しい。

写像とは　関数を一般化したもの。考え方は同じ。ものすごくおおざっぱに言うと

$$y = f(x)$$

で x と y が数でないものも扱うことにして、それを**写像**(しゃぞう)と呼ぶ、ということ。

「関数は写像である」は正しい。

「数列は写像である」も正しい。

　写像のことを関数と呼ぶ人、テキストもある。この講義ではそうしない (関数は写像であるが、写像の中には関数でないものもある、という立場)。

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を **x の f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では "f of x" と読む。

4.2 写像の定義

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を **x の f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では "f of x" と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

4.2 写像の定義

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。　$f(x)$ を x **の** f **による像** (the image of x under f)、あるいは f **の** x **における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では “f of x” と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f, the domain of f) と呼ぶ。

4.2 写像の定義

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。 $f(x)$ を **x の f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では “f of x” と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f, the domain of f) と呼ぶ。

この講義では、Y を **f の終域**と呼ぶことにする (英語では codomain と呼ばれたりする)。

定義 8.1 (写像)

X と Y は集合とする。X の任意の要素 x に対して、Y の要素 $f(x)$ がただ 1 つ定まっているとき、f は X から Y への**写像** (mapping, map) であるといい、このことを

$$f\colon X \to Y \quad \text{あるいは} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

で表す。　$f(x)$ を **x の f による像** (the image of x under f)、あるいは **f の x における値** (the mapping value at x) と呼ぶ。英語では “f of x” と読む。

x の f による像が y であることを $y = f(x)$ と表すことが出来るが、$f\colon x \mapsto y$ と表すこともある。

X を f の**定義域** (the domain of definition of f, the domain of f) と呼ぶ。

この講義では、Y を **f の終域**と呼ぶことにする (英語では codomain と呼ばれたりする)。

集合

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\}$$

を写像 **f の値域** (the range of f), **f による X の像**と呼ぶ。

注 1　これはユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注 1　これはユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注 2　実は Y に名前をつけないテキストが多い。特に和書。「レインジ」は教科書 (中島 [1]) で採用してあるが、ちょっと変わっている。真似をしない方が良いかも。range の訳語のつもりだろうけれど、それは普通「値域」と訳され、後の $f(X)$ の意味であることが多い (高校の数学でもそういう意味である)。

注 1　これはユルイ定義で、厳密な定義 ($X \times Y$ の部分集合としてグラフを定義して、写像とはグラフである、と定める) は後で行う。

注 2　実は Y に名前をつけないテキストが多い。特に和書。「レインジ」は教科書 (中島 [1]) で採用してあるが、ちょっと変わっている。真似をしない方が良いかも。range の訳語のつもりだろうけれど、それは普通「値域」と訳され、後の $f(X)$ の意味であることが多い (高校の数学でもそういう意味である)。

注 3　定義域、値域は高校でも出て来たが、値の範囲ということで、答は不等式で書くのが普通であった。上の X, Y, $f(X)$ は集合である！

例 8.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。

例 8.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

例 8.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x)=x+2$ の場合、すべての実数 x に対して、$x+2$ が意味を持つので、$\mathbb{R}$ が定義域である。

例 8.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x) = x + 2$ の場合、すべての実数 x に対して、$x + 2$ が意味を持つので、$\mathbb{R}$ が定義域である。

$f(x) = \frac{1}{x}$ の場合は、$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が定義域である。

例 8.2 (高校数学の関数は写像である)

高校数学に現れた関数は写像である。ただし、高校では関数の定義域と終域を明記しないことが多かった。明記しない場合は、変数 x の関数 $f(x)$ について、式 $f(x)$ が意味を持つような実数 x の全体の集合を定義域とする、という暗黙のルールがあった、とみなすことにする。

$f(x)=x+2$ の場合、すべての実数 x に対して、$x+2$ が意味を持つので、$\mathbb{R}$ が定義域である。

$f(x)=\frac{1}{x}$ の場合は、$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ が定義域である。

$f(x)=\sqrt{x}$ の場合は、$\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ が定義域である。

例 8.3 (Dirichlet の関数)

写像 $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1,\ D(1/2) = 1,\ D(\sqrt{2}) = 0,\ D(\pi) = 0.$

例 8.3 (Dirichlet の関数)

写像 $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1$, $D(1/2) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi) = 0$.

D を **Dirichletの関数**（ディリクレ）と呼ぶ。(歴史上、関数概念を見直す大きな契機となったことで有名な関数である。)

例 8.3 (Dirichlet の関数)

写像 $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。例えば $D(1) = 1$, $D(1/2) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$, $D(\pi) = 0$.

D を **Dirichlet(ディリクレ)の関数**と呼ぶ。(歴史上、関数概念を見直す大きな契機となったことで有名な関数である。)

例 8.4 (多角形の面積)

$X :=$ 平面内の多角形全体の集合, $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積, として、$f\colon X \to Y$ が定まる。

$f(A)$ を具体的に式で書けなくても、写像 (関数) とみなす。 □

例 8.5 ($\mathbb{R}^2$ の 1 次変換)

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とするとき、$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。$f(x, y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした f を $\mathbb{R}^2$ の **1 次変換**という。$ad - bc \neq 0$ のとき、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。

例 8.6 (恒等写像)

X は空集合でない集合とする。写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad (x \in X)$$

で定める。id_X を X の**恒等写像** (the identity map of X) と呼ぶ。
恒等写像というのは、集合ごとに 1 つ定まるものである。

例 8.6 (恒等写像)

X は空集合でない集合とする。写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を

$$\mathrm{id}_X(x) = x \quad (x \in X)$$

で定める。id_X を X の**恒等写像** (the identity map of X) と呼ぶ。
恒等写像というのは、集合ごとに1つ定まるものである。

例 8.7 (包含写像)

$X \subset Y$ のとき、$i\colon X \to Y$ を $i(x) = x$ ($x \in X$) で定める。この i を **包含写像**(ほうがんしゃぞう) (the inclusion map) と呼ぶ。i の代わりに ι と書くことも多い。

問７について

問題文は以下にあります。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi7.pdf

　今日で集合の話はおしまいなので、本日の話題「無限集合族の合併・共通部分」以外に、簡単だけれど、うっかり間違えそうな問を１つつけてあります。

参考文献

[1] 中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).