数理リテラシー 第7回

～ 集合 (3) ～

桂田 祐史

2020年6月2日

目次

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容: 集合族 (特に無限集合族の合併と共通部分), 集合についての定理の証明 (講義ノート桂田 [1] の §3.11–3.13 に該当する)。少し難しく感じるかもしれません。
- 宿題 5(問 5) の解説を行います。
- 宿題 6 を出します。締め切りは 6 月 7 日 (月曜) 13:30 です。それ以降 6 月 9 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっと `meiji` ドット `ac` どっと `jp`)。
- 宿題のフィードバックがようやくできます。今後は質問を宿題の余白に書くのもありだと思います。

3.13 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

3.13 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$　2 つの集合 $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A} = 2^A$ (A のベキ集合).

3.13 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$　2 つの集合 $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A} = 2^A$ (A のベキ集合).

ここで $\mathcal{A}$ は A のカリグラフィック・フォント (の 1 つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィク・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

3.13 集合族

要素が集合である集合 (集合の集合) を**集合族** (a family of sets) という。「族」の代わりに「類」(class) を使うこともある。

例. $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1,2,3\}\}$ 2 つの集合 $\{1\}$, $\{1,2,3\}$ からなる集合

例. A を集合として、$\mathcal{A} = 2^A$ (A のベキ集合).

ここで $\mathcal{A}$ は A のカリグラフィック・フォント (の 1 つ) である。

(これまで、集合は大文字 (capital letters, upper case), その要素は小文字 (small letters, lower case) で表すという慣習に従ってきた。集合族を表す文字をどうするか迷うところだが、カリグラフィク・フォントで書く人が結構いるので、真似してみた。)

無限個の集合からなる集合族の和集合 (合併集合)、積集合 (共通部分) に慣れることを目標とする (頻出するので必要)。特に自然数で番号をつけられる集合 $A_1, A_2, \cdots$ に対して、和集合 (合併集合) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, 積集合 (共通部分) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を扱う (この方針は、教科書 中島 [2] と同じ)。

3.13 集合族　有限個の集合の和集合と積集合

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

$(\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ の真似)

3.13 集合族　有限個の集合の和集合と積集合

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

$(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ の真似)

後のために整理しておく。

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k \quad \Leftrightarrow \quad x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow$$

3.13 集合族　有限個の集合の和集合と積集合

$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ の話をするための前フリ

集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ があるとき、次のように定める。

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

$(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ の真似)

後のために整理しておく。

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k &\Leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \text{ある } k\ (1 \le k \le n) \text{ が存在して } x \in A_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{k=1}^{n} A_k &\Leftrightarrow x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \text{すべての } k\ (1 \le k \le n) \text{ に対して } x \in A_k. \end{aligned}$$

すべての自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、和集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く), 積集合 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書く) を次のように定める。

(1) $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

(2) $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}.$$

極限により定義するのでは**ない！**

(1), (2) はしっかり覚える

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例　$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ とするとき、

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k, \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例 $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1, \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n.$

可算無限個の集合の和集合と積集合

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例 $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例　$A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_1$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k=A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=A_1=(-1,1),\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{0\}.$$

例　$A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid -n<x<n\}$ とするとき、

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例　$A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k=A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=A_1=(-1,1),\quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{0\}.$$

例　$A_n=\{x\in\mathbb{R}\mid -n<x<n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k=A_1$.

可算無限個の集合の和集合と積集合

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例 $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例 $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1, 1).$$

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例 $A_n=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k=A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=A_1=(-1,1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{0\}.$$

例 $A_n=\{x\in\mathbb{R} \mid -n<x<n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k=A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=\mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1=A_1=(-1,1).$$

例 $A_n=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -n<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1,1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例　$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1,1).$$

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -n < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (-n,1)$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = (-1,1/n)$.

各例で $n=1,2,3$ に対して A_n を図示して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例 $A_n=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1,1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

例 $A_n=\{x\in\mathbb{R} \mid -n<x<n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1,1).$$

例 $A_n=\left\{x\in\mathbb{R} \mid -n<x<\frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (-n,1)$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = (-1,1/n)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty,1) = \{x\in\mathbb{R} \mid x<1\}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1,0].$$

3.13 集合族　可算無限個の集合の和集合と積集合

各例で $n = 1, 2, 3$ に対して A_n を図示して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ を求めてみよう。$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ が分かるかな？

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_n$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-1, 1), \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}\,.$$

例　$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_n$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = A_1 = (-1, 1).$$

例　$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -n < x < \frac{1}{n}\right\}$ とするとき、$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (-n, 1)$, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = (-1, 1/n)$.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}\,, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_1 = (-1, 0].$$

証明できるかな？直観だけでは間違えそう。少し準備して次回挑戦する。

3.14 集合についての定理, それらの証明

定理 7.1 (これで全部という訳でもないけれど)

以下 X は全体集合であり、A, B, C は X の部分集合とする。

1. $A \subset A$ (反射律), $A \subset B \land B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (推移律), $A \subset B \land B \subset A \Rightarrow A = B$ (反対称律)
2. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律)
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律)
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律)
5. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律)
7. $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律)
8. $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$, $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ (ド・モルガン律)
9. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

3.14 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるときの参考にするけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族についてはヴェン図も描きようがないし…)

3.14 集合についての定理, それらの証明

高校では、**ヴェン図** (Venn diagram) を描いて考えた。前のスライドに載せた命題が正しいことは、ヴェン図を描けば「わかる」であろう。

この講義では、ヴェン図を考えるときの参考にするけれど、ヴェン図を使った説明は証明にはならない、というスタンスで進める。(無限個の要素からなる集合族についてはヴェン図も描きようがないし…)

以下の定義が基礎となる。

1. $A = B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)) \land (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A))$
2. $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$
3. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A^{\complement}$, $A \times B$, 2^A, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ などの定義

3.14 集合についての定理, それらの証明

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. □

ド・モルガン律 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ の証明

任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\complement} &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^{\complement}) \wedge (x \in B^{\complement}) \\ &\Leftrightarrow x \in A^{\complement} \cap B^{\complement} \end{aligned}$$

が成り立つから、 $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$. □

3.14 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ を示せ。

3.14 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ **を示せ。**

証明 1 背理法を用いて証明する。$A \cap A^{\complement} \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^{\complement}$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^{\complement}$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

3.14 集合についての定理, それらの証明

空集合であることの証明は、知らないと戸惑いそうなので、一つ例をあげておく。

$A \cap A^{\complement} = \emptyset$ **を示せ。**

証明 1　背理法を用いて証明する。$A \cap A^{\complement} \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して $x \in A \cap A^{\complement}$. ゆえに $x \in A$ かつ $x \in A^{\complement}$. すなわち $x \in A$ かつ $x \notin A$. これは矛盾である。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

証明 2 (本質的には同じことであるが)

$$A \cap A^{\complement} = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \wedge x \in A^{\complement} \right\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A\}.$$

任意の x に対して $x \in A \wedge x \notin A$ は偽である。言い換えると、条件 $x \in A \wedge x \notin A$ を満たす x は存在しない。ゆえに $A \cap A^{\complement} = \emptyset$. □

3.14 集合についての定理, それらの証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

3.14 集合についての定理, それらの証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. □

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

3.14 集合についての定理, それらの証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。上で注意したように、一般に $A \cap B \subset B$ が成り立つので、仮定と合わせて $A = A \cap B \subset B$. ゆえに $A \subset B$. $\square$

3.14 集合についての定理, それらの証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

　準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明
　$A \cap B = A$ と仮定する。上で注意したように、一般に $A \cap B \subset B$ が成り立つので、仮定と合わせて $A = A \cap B \subset B$. ゆえに $A \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ を証明しよう。

準備として、一般に

$$(\sharp) \qquad A \cap B \subset B$$

が成り立つことを注意する (上の定理に入ってない)。実際、$x \in A \cap B$ とすると、$x \in A$ かつ $x \in B$. 特に $x \in B$ であるから、$A \cap B \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ の証明

$A \cap B = A$ と仮定する。上で注意したように、一般に $A \cap B \subset B$ が成り立つので、仮定と合わせて $A = A \cap B \subset B$. ゆえに $A \subset B$. $\square$

$A \cap B = A \Leftarrow A \subset B$ の証明

(i) $A \subset B$ と仮定すると、$A \subset A \cap B$ (実際、$x \in A$ とするとき、仮定から $x \in B$ が成り立つので、$x \in A \wedge x \in B$, すなわち $x \in A \cap B$ が成り立つ。).

(ii) 一方、一般に $A \cap B \subset A$ が成り立つ (やはり $(\sharp)$ を使う)。

(i), (ii) から $A \cap B = A$ が成り立つ。$\square$

問 5 解説

動画で解説する。

例の追加

集合に関する命題の証明について、「集合が部分集合であること」の証明のやさしい例を追加します。

例 7.2

集合 A, B, C が $A \subset B$, $B \subset C$ を満たすとき、$A \subset C$ が成り立つことを示せ。
(証明) $A \subset B$, $B \subset C$ を仮定する。
x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ であるから $x \in B$. $B \subset C$ であるから $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/set.pdf (2013–2021).

[2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).