数理リテラシー 第6回

～ 集合 (2) ～

桂田 祐史

2021 年 5 月 26 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 本日の授業内容: 集合の基本用語 (定理はほぼない、習うより慣れろ) 桂田 [1] の §3.4–3.10
- 宿題 4 の解説を行います。
- 宿題 5 を出します。〆切は 5 月 31 日 (月曜)13:30 です。原則として、6 月 1 日 15:20 以降の提出は受け付けません。何か事情がある場合は連絡して下さい (`katurada` あっと `meiji` ドット ac どっと jp)。
- 質問や相談等はメールまたは、質問用 Zoom ミーティングで尋ねて下さい。

前回の復習　条件 $P(x)$ を満たす x の全体の集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す (集合の内包的定義)。

　$\{x \mid P(x)\}$ において、$P(x)$ が複数の条件を $\land$ (かつ, and) で結んだ条件であるとき、$\land$ をコンマ , で済ませることが多い。
　例えば

$$\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 < 2\right\}$$

を

$$\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 < 2\right\}$$

のように書く。

　この講義では省略せずに書く。

　(時々、文章中の , の意味が $\land$ か $\lor$ か、文脈で判断することを期待されているときもある。)

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法)　変種

いくつか変種がある。

1. $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x))\ \ y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

いくつか変種がある。

1. $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x))\ \ y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

例 6.1 (正の偶数全体の集合)

$$\{2n \mid n \text{ は自然数}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x = 2n\}.$$

いくつか変種がある。

1. $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x))\ \ y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

例 6.1 (正の偶数全体の集合)

$$\{2n \mid n \text{ は自然数}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x = 2n\}.$$

例 6.2 (平方数の全体)

$$\left\{n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{x \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{N})\ x = n^2\right\}.$$

いくつか変種がある。

1. $\{f(x) \mid P(x)\}$ は $\{y \mid (\exists x : P(x))\ \ y = f(x)\}$ という意味とする。これは高校数学でもすでに使っていたはず。

例 6.1 (正の偶数全体の集合)

$$\{2n \mid n \text{ は自然数}\} = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x = 2n\}.$$

例 6.2 (平方数の全体)

$$\left\{n^2 \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{x \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{N})\ x = n^2\right\}.$$

2. $\{x \mid x \in A \land P(x)\}$ を $\{x \in A \mid P(x)\}$ とも書く。

例 6.3

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \land 1 \leq x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}.$$

3.4.2 集合の内包的定義 (要素の条件を書く方法)

例 6.4

$$\left\{ x \;\middle|\; x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数} \right\}$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\}
\end{aligned}
$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\right\}
\end{aligned}
$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\right\}
\end{aligned}
$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
={}&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
={}&\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
={}&\left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
={}&\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x - 1 < 0\right\}
\end{aligned}
$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\left\{x \,\middle|\, x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - x - 1 < 0\right\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

例 6.4

$$
\begin{aligned}
&\{x \mid x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\} \\
&= \{x \mid x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x^2 - x - 1 < 0\} \\
&= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 1 < 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 < 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \\
&= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

ただし、最後に開区間の記号 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を用いた。

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}
$$

右側が $\infty)$, 左側が $(-\infty$ となっている場合も用いる。実数 x について、$x < \infty$ と $-\infty < x$ はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば $a < x < \infty$ は $a < x$ と書けば良い)。

$$
\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \quad (\text{無条件なので実数全体}).
\end{aligned}
$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とするとき

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}.
\end{aligned}
$$

右側が $\infty)$, 左側が $(-\infty$ となっている場合も用いる。実数 x について、$x < \infty$ と $-\infty < x$ はつねに成り立つので、その条件は書かなくても同じこと (例えば $a < x < \infty$ は $a < x$ と書けば良い)。

$$
\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}, \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R} \quad (\text{無条件なので実数全体}).
\end{aligned}
$$

注意　(a, b) は点の座標の記号とかぶる。フランスでは (の代わりに],) の代わりに [を使う。例えば $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. 合理的かもしれない。

定義 6.5 (含まれる, 含む, 部分集合)

A, B は集合とする。

$$\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (\text{これは } (\forall x \in A)\ x \in B \text{ とも書ける})$$

が成り立つとき、「A は B に**含まれる**」、「B は A を**含む**」、「A は B の**部分集合** (a subset of B)」といい、

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \supset A$$

で表す。

定義 6.5 (含まれる, 含む, 部分集合)

A, B は集合とする。

$$\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (これは\ (\forall x \in A)\ x \in B\ とも書ける)$$

が成り立つとき、「A は B に**含まれる**」、「B は A を**含む**」、「A は B の**部分集合** (a subset of B)」といい、

$$A \subset B \quad あるいは \quad B \supset A$$

で表す。また、その否定を $A \not\subset B$ あるいは $B \not\supset A$ で表す。

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

定義 6.5 (含まれる, 含む, 部分集合)

A, B は集合とする。

$$\forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (\text{これは } (\forall x \in A)\ x \in B \text{ とも書ける})$$

が成り立つとき、「A は B に**含まれる**」、「B は A を**含む**」、「A は B の**部分集合** (a subset of B)」といい、

$$A \subset B \quad \text{あるいは} \quad B \supset A$$

で表す。また、その否定を $A \not\subset B$ あるいは $B \not\supset A$ で表す。

$A \subset B$ かつ $A \neq B$ であることを $A \subsetneqq B$ と表し、A は B の**真部分集合** (proper subset of B) であるという。

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

$$\{1\} \subset \{1, 2\}, \quad \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}.$$

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合

$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

これを次のようにまとめて書くことも多い。

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}.$$

$$\{1\} \not\subset \{2\}.$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{x \mid x \text{ は正三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は二等辺三角形}\}.$$

定理 6.6

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
3. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

定理 6.6

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
3. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

証明

1. 任意の x に対して、$x \in A$ ならば $x \in A$. ゆえに $A \subset A$.
   ($p \Rightarrow p$ は $\neg p \vee p$ であるからつねに真である。)

定理 6.6

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
3. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

証明

1. 任意の x に対して、$x \in A$ ならば $x \in A$. ゆえに $A \subset A$.
   ($p \Rightarrow p$ は $\neg p \vee p$ であるからつねに真である。)
2. x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ より $x \in B$. $B \subset C$ より $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.

定理 6.6

A, B, C を任意の集合とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. $A \subset A$.
2. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.
3. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば $A = B$.

証明

1. 任意の x に対して、$x \in A$ ならば $x \in A$. ゆえに $A \subset A$.
   ($p \Rightarrow p$ は $\neg p \vee p$ であるからつねに真である。)
2. x を A の任意の要素とする。$A \subset B$ より $x \in B$. $B \subset C$ より $x \in C$. ゆえに $A \subset C$.
3. 任意の x に対して
   - $x \in A$ ならば $A \subset B$ より $x \in B$.
   - $x \in B$ ならば $B \subset A$ より $x \in A$.

   ゆえに $(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$ は真であるから $A = B$.

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合　余談

上の定理を見て、$\subset$ は、数の場合の $\leq$ と似ていると思うかもしれない。

1. $a \leq a$.
2. $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.
3. $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

$\subset$ は**半順序関係**というものになっている (詳しいことは略)。

3.5 包含関係 ($\subset$), 部分集合　余談

上の定理を見て、$\subset$ は、数の場合の $\leq$ と似ていると思うかもしれない。

1. $a \leq a$.
2. $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.
3. $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

$\subset$ は**半順序関係**というものになっている (詳しいことは略)。

A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$, A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ と書く流儀もある。これは $\leq$ と $<$ みたいで、それなりに納得感がある。

$\subset$ という記号はどちらの意味であるか (部分集合？それとも真部分集合？)、注意が必要である。(最近は、この授業で採用した定義が主流のように思われるが…)

3.6 空集合 ($\emptyset$)

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ あるいは $\varnothing$ で表す。

3.6 空集合 ($\emptyset$)

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ あるいは $\varnothing$ で表す。

元々は、ゼロ 0 や丸 $\circ$ に / を重ねたものだそうで、ギリシャ文字のファイ ϕ とは関係がない。

3.6 空集合 ($\emptyset$)

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ あるいは $\varnothing$ で表す。

元々は、ゼロ 0 や丸 $\circ$ に / を重ねたものだそうで、ギリシャ文字のファイ ϕ とは関係がない。

命題 6.7 (空集合は任意の集合の部分集合である)

任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$.

要素を 1 つも持たない集合を**空集合** (empty set) とよび、$\emptyset$ あるいは $\varnothing$ で表す。
元々は、ゼロ 0 や丸 $\circ$ に / を重ねたものだそうで、ギリシャ文字のファイ ϕ とは関係がない。

命題 6.7 (空集合は任意の集合の部分集合である)

任意の集合 A に対して $\emptyset \subset A$.

証明.

A を任意の集合とする。任意の x に対して、$x \in \emptyset$ は偽であるから

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

は真である。ゆえに $\emptyset \subset A$. □

復習　p が偽のとき、(q が何であっても) $p \Rightarrow q$ は真である。

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

3.6 空集合 ($\emptyset$)　少し考えてみよう

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

$\emptyset$ の各メンバー (要素) x に、$x \in A$ を満たすかどうか試験をして、全員合格なので $\emptyset \subset A$ が成り立つ、ということだが、メンバーが 1 人もいないわけである。

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

$\emptyset$ の各メンバー (要素) x に、$x \in A$ を満たすかどうか試験をして、全員合格なので $\emptyset \subset A$ が成り立つ、ということだが、メンバーが 1 人もいないわけである。

たとえ話になるが、受験生がいないテストは全員合格だろうか？

受験生がいなければ、合格にならない人はいないので、全員合格である、と言うと屁理屈に聞こえないだろうか？

3.6 空集合 ($\emptyset$)　少し考えてみよう

$\emptyset \subset A$ を論理式で表した $\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

とも書ける。これが真であるわけだが、納得できるだろうか？

$\emptyset$ の各メンバー (要素) x に、$x \in A$ を満たすかどうか試験をして、全員合格なので $\emptyset \subset A$ が成り立つ、ということだが、メンバーが 1 人もいないわけである。

たとえ話になるが、受験生がいないテストは全員合格だろうか？

受験生がいなければ、合格にならない人はいないので、全員合格である、と言うと屁理屈に聞こえないだろうか？

$\forall x\ P(x)$ は「すべての x について $P(x)$ が成り立つ」と日本語訳するけれど、$P(x)$ が成り立たないような x は存在しない、という意味である。
これは言葉の約束である。

これから集合の演算の話をする。まず

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad A^{\complement}$$

それから

$$A \times B, \quad 2^{A} (= \mathcal{P}(A))$$

3.7 和集合と積集合

定義 6.8 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

3.7 和集合と積集合

定義 6.8 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

を A と B の**和集合**あるいは**合併集合** (union of A and B) と呼ぶ。

3.7 和集合と積集合

定義 6.8 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

を A と B の**和集合**あるいは**合併集合** (union of A and B) と呼ぶ。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

を A と B の**積集合**, **共通部分**あるいは**交わり** (intersection of A and B) と呼ぶ。

定義 6.8 (和集合, 積集合)

A, B を集合とする。

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

を A と B の**和集合**あるいは**合併集合** (union of A and B) と呼ぶ。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

を A と B の**積集合**, **共通部分**あるいは**交わり** (intersection of A and B) と呼ぶ。

例 6.9

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2, 3\}.$$

3.8 差集合と補集合

定義 6.10 (差集合, 補集合)

A, B を集合とする。

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

を A と B の**差集合** (set-theoretic difference of A and B) と呼ぶ。$A - B$ と表すこともある。

3.8 差集合と補集合

定義 6.10 (差集合, 補集合)

A, B を集合とする。

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

を A と B の**差集合** (set-theoretic difference of A and B) と呼ぶ。$A - B$ と表すこともある。

考察する対象全体の集合 X が定まっている場合がある。そのとき X を**全体集合** (universal set) と呼び、X の任意の部分集合 A に対して、$X \setminus A$ を A の**補集合** (the complement of A) と呼び、$A^{\complement}$ で表す。

$$A^{\complement} := X \setminus A = \{x \mid x \in X \land x \notin A\}.$$

例 6.11

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

例 6.11

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^{\complement} = \{4, 5, 6\}, \quad \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = \{4, 5, 6\}^{\complement} = \{1, 2, 3\} = A.$$

例 6.11

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1,2,3,4,5,6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^{\complement} = \{4,5,6\}, \quad \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = \{4,5,6\}^{\complement} = \{1,2,3\} = A.$$

後で説明するが、$\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ は一般に成り立つ。 $\square$

例 6.11

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^{\complement} = \{4, 5, 6\}, \quad \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = \{4, 5, 6\}^{\complement} = \{1, 2, 3\} = A.$$

後で説明するが、$\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ は一般に成り立つ。 □

余談　実は補集合の記号には色々なものがある。

例 6.11

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき

$$A \setminus B = \{1\}, \quad B \setminus A = \{4\}.$$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合と考えるとき、

$$A^{\complement} = \{4, 5, 6\}, \quad \left(A^{\complement}\right)^{\complement} = \{4, 5, 6\}^{\complement} = \{1, 2, 3\} = A.$$

後で説明するが、$\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$ は一般に成り立つ。 □

余談　実は補集合の記号には色々なものがある。A の補集合を表すのに、$\complement A$ とか $\overline{A}$ とか、A' などを用いる。高校数学では $\overline{A}$ を用いたが、大学ではそれほどメジャーではない。(個人的には、$\overline{A}$ を別の意味に使いたいので、$A^{\complement}$ が好みである。)

ヴェン図 (Venn diagram) で表すと

定義 6.12 (順序対と直積集合)

2 つの対象 a, b が与えられたとき、順序を考えた組 (a, b) を a と b の**順序対** (ordered pair) と呼ぶ。(要するに**点の座標や数ベクトルと同様**のことを、数でない場合に拡張する、ということである。)

3.9 順序対と直積集合 $(A \times B)$

定義 6.12 (順序対と直積集合)

2 つの対象 a, b が与えられたとき、順序を考えた組 (a, b) を a と b の**順序対** (ordered pair) と呼ぶ。(要するに**点の座標や数ベクトルと同様**のことを、数でない場合に拡張する、ということである。)

順序対の相等は (当然) 次のように定める。

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \land b = d.$$

3.9 順序対と直積集合 ($A \times B$)

定義 6.12 (順序対と直積集合)

2 つの対象 a, b が与えられたとき、順序を考えた組 (a, b) を a と b の**順序対** (ordered pair) と呼ぶ。(要するに**点の座標や数ベクトルと同様**のことを、数でない場合に拡張する、ということである。)

順序対の相等は (当然) 次のように定める。

$$(a, b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d.$$

A と B が集合のとき、A の要素と B の要素の順序対の全体を $A \times B$ で表し、A と B の**直積集合**と呼ぶ。

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{c \mid (\exists a \in A)(\exists b \in B)\ c = (a, b)\}. \end{aligned}$$

例 6.13

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \land y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

例 6.13

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

3.9 順序対と直積集合

例 6.13

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

例 6.14

(x, y はすでに定まっているとして) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

例 6.13

$$(x, y) = (1, 2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 2.$$
$$(1, 2) \neq (2, 1), \quad (1, 1) \neq 1.$$

Cf. 集合と対比してみよう。$\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$. 全然違う。

例 6.14

(x, y はすでに定まっているとして) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ のとき

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}.$$

例 6.15

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid x \text{ と } y \text{ は実数}\}.$$

これを $\mathbb{R}^2$ と表すこともある。2 次元ベクトルの全体とみなせる。 □

3.10 ベキ集合 (2^A)

定義 6.16 (ベキ集合)

集合 A に対して、A のすべての部分集合の集合を、A の**ベキ集合** (漢字で書くと**冪集合**（べき）, the power set of A) と呼び、2^A や $\mathcal{P}(A)$, $P(A)$ などの記号で表す。

$$2^A = \mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\} = \{B \mid B \subset A\}.$$

3.10 ベキ集合 (2^A)

定義 6.16 (ベキ集合)

集合 A に対して、A のすべての部分集合の集合を、A の**ベキ集合** (漢字で書くと**冪集合**(べき), the power set of A) と呼び、2^A や $\mathcal{P}(A)$, $P(A)$ などの記号で表す。

$$2^A = \mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\} = \{B \mid B \subset A\}.$$

例 6.17

$A = \{1\}$ のとき、$2^A = \{\emptyset, \{1\}\}$.

定義 6.16 (ベキ集合)

集合 A に対して、A のすべての部分集合の集合を、A の**ベキ集合** (漢字で書くと**冪集合**(べき), the power set of A) と呼び、2^A や $\mathcal{P}(A)$, $P(A)$ などの記号で表す。

$$2^A = \mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\} = \{B \mid B \subset A\}.$$

例 6.17

$A = \{1\}$ のとき、$2^A = \{\emptyset, \{1\}\}$.

例 6.18

$B = \{1, 2\}$ のとき、$2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

例 6.19

$A = \{a\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

3.10 ベキ集合

例 6.19

$A = \{a\}$ のとき、$B = 2^A$, $C = 2^B$ を求めよ。

$$B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$$C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

解説 $B = \{p, q\}$ のとき、$2^B = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ となることは既に見た。これに $p = \emptyset$, $q = \{a\}$ を代入する。 $\square$

3.10 ベキ集合

これは省略するかも。

例 6.20

$C = \{a, b\}$ のとき

$$2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}. \tag{$\heartsuit$}$$

$a = 1$ かつ $b = 2$ のとき、

3.10 ベキ集合

これは省略するかも。

例 6.20

$C = \{a, b\}$ のとき

$$2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}. \tag{$\heartsuit$}$$

$a = 1$ かつ $b = 2$ のとき、$C = \{1, 2\}$ で、当然

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

$a = b = 1$ のとき、

3.10 ベキ集合

これは省略するかも。

例 6.20

$C = \{a, b\}$ のとき

$$(\heartsuit) \qquad 2^C = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$a = 1$ かつ $b = 2$ のとき、$C = \{1, 2\}$ で、当然

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

$a = b = 1$ のとき、$C = \{1\}$ である。($\heartsuit$) に $a = b = 1$ を代入すると

$$2^C = \{\emptyset, \{1\}, \{1\}, \{1, 1\}\} = \{\emptyset, \{1\}\} = 2^A, \quad A := \{1\}.$$

集合の外延的表記のルールとして、要素を重複して書いても良いとしてあることに注意しよう。もしそういうルールにしておかないと、($\heartsuit$) は正しくない場合があることになる。

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。(# はシャープ ♯ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。(# はシャープ ♯ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

例 6.21

$$\#\emptyset = 0,\ \#\{1\} = 1,\ \#\{1,2\} = 2,\ \#\{a,b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases}$$

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。(# はシャープ ♯ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

例 6.21

$$\#\emptyset = 0,\ \#\{1\} = 1,\ \#\{1,2\} = 2,\ \#\{a,b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases}$$

命題 6.22 (直積集合の要素数)

有限集合 A, B に対して、$\#(A \times B) = \#A\#B$ が成り立つ。

おまけ: 有限集合の要素の個数

要素の個数が 0 以上の整数である集合を**有限集合**と呼び、そうでない集合を**無限集合**と呼ぶ。

有限集合 A に対して、A の要素の個数を $\#A$ で表すことにする。(# はシャープ ♯ でなく、number sign である。その他 $|A|$ という記号で表すこともある。)

例 6.21

$$\#\emptyset = 0,\ \#\{1\} = 1,\ \#\{1, 2\} = 2,\ \#\{a, b\} = \begin{cases} 2 & (a \neq b) \\ 1 & (a = b). \end{cases}$$

命題 6.22 (直積集合の要素数)

有限集合 A, B に対して、$\#(A \times B) = \#A\#B$ が成り立つ。

命題 6.23 (冪集合の要素数)

有限集合 A に対して、$\#\left(2^A\right) = 2^{\#A}$ が成り立つ。

問 4 解説

手書きで解説する。

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part II. 集合, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/set.pdf (2013–2021).