数理リテラシー 第4回

～ 論理 (4) ～

桂田 祐史

2021 年 5 月 12 日

目次

連絡事項&本日の内容

- 既に伝えたように、緊急事態宣言が発令されている5月中(5/12, 5/19, 5/26)はオンライン形式(オンデマンド型)で授業することに決めました。COVID19も変異株が増加して、個人的にはこれまでの対応を今一度見直す必要があると考えています。オンライン講義にはいくつか困難がありますが、ぜひ克服して行きたいです。
- 本日の授業内容は、複数の量称を含む命題の読み方と証明の仕方(中島[1], 桂田[2])。非常に重要です。
- 宿題1(問1)の解説を行います。
- 宿題3を出します。締め切りは5月17日(月曜)13:30とする。宿題3の解説は次回授業で行う。そのため、(1週間延長ルールはやめて)5月19日15:10以降の提出は認めません。大部分の人は締め切りが守れているので大丈夫だと考えています。(何か困ったことがあったら連絡して下さい。)

2 つ以上の変数を含む述語 (条件) がある。

例 3.1

$xy = x$ は、x と y に数を代入すると命題になる。
$x = 0,\ y = 0$ を代入すると $0 \cdot 0 = 0$ となり、真な命題である。
$x = 1,\ y = 0$ を代入すると $1 \cdot 0 = 1$ となり、偽な命題である。

2 変数 $x,\ y$ を含む述語は、$p(x, y)$ のように表せる。

2.4.1 2 変数の述語で 1 つの変数に量称記号をつける

2 変数 x, y を含む述語 $p(x,y)$ に対して、

$$\forall y \quad p(x,y) \quad と \quad \exists y \quad p(x,y)$$

は、どちらも x についての述語になる。

例 3.2

(1) $$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

(2) $$(\exists y \in \mathbb{R}) \quad xy = x$$

いずれも、x についての述語である。例えば

(1) に $x = 0$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(1) に $x = 1$ を代入すると	$(\forall y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは偽な命題
(2) に $x = 0$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$0 \cdot y = 0$	これは真な命題
(2) に $x = 1$ を代入すると	$(\exists y \in \mathbb{R})$	$1 \cdot y = 1$	これは真な命題

2.4.2 2つの変数を持つ述語に2つの量称記号をつける

$(\forall y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、$(\exists y \in \mathbb{R})\ xy = x$ も、変数 x についての述語であるから、$\forall x$ あるいは $\exists x$ をつけて命題が出来る。

- $\forall x(\forall y\ p(x,y))$　「任意の x (に対して), 任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x が存在して、任意の y に対して $p(x,y)$」
- $\forall x(\exists y\ p(x,y))$　「任意の x (に対して), ある y が存在して $p(x,y)$」
- $\exists x(\forall y\ p(x,y))$　「ある x (が存在して)、ある y が存在して $p(x,y)$」

青いカッコ ( ) は省略できる。

3つ以上の変数を持つ述語に対しても同様である。

2.4.3 慣れるための練習 (1)

例 3.3

$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$ が成り立つ。」
これは実は真。どんな x に対しても $y = x - 1$ とすれば…証明の書き方は後述

例 3.4

$(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{N})\ x > y$
「ある実数 y が存在して、任意の自然数 x に対して $x > y$ が成り立つ。」
これも実は真。$y = -1$ とすれば…

例 3.5

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + y^2 \geq 2xy$$

「任意の実数 x, 任意の実数 y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」
「任意の実数 x, y に対して $x^2 + y^2 \geq 2xy$.」

2.4.3 慣れるための練習 (2)

例 3.6 (3 変数の場合、ピタゴラス数)

3 つでも同様で

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

を次のように書く。

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

「ある自然数 x, y, z が存在して $x^2 + y^2 = z^2$」

この命題は真である。$x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ とすると条件を満たす。

2.4.4 読み方についての議論

$\exists x\ P(x)$ の読み方として、

ⓐ 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」

ⓑ 「$P(x)$ が成り立つような x が存在する。」

という 2 つの読み方を紹介した。

(a) よりも (b) の方が日本語としては自然かもしれないが、(a) を使うことを勧める (と言いました)。

その理由を、次のスライドで、2 つの命題

- $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x < y$
- $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x < y$

を題材にして説明する。

注 $\exists x\ P(x)$ を英語で読むと、"There exists x such that $P(x)$ holds." となる。関係代名詞を使って書かれた文は、後ろの節から訳す、という話を思い起こさせる。この辺は日本語と英語の違いに係るところである。

2.4.4 読み方についての議論 (続き)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

(*) 「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x < y$ が成立する。」
どんな実数に対しても、それより大きい実数がある。これは真な命題である。

読み方 (b) を使うことにすると

「任意の実数 x に対して、$x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となるであろう。これは誤解の危険がある。なぜか？
次の命題と混同されやすいから。

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x < y.$$

読み方 (a) を使えば
(**) 「ある実数 y が存在して、任意の実数 x に対して $x < y$ が成立する。」
(どんな実数よりも大きいような (チャンピオンの？) 実数があるという意味。これは偽。)
読み方 (b) を使うことにすると、(**) は

「任意の実数 x に対して $x < y$ が成り立つような実数 y が存在する」

となりそうである。

私の意見　青と水色はとても紛らわしい。読点「、」を見落とさなければ大丈夫 (区別できる) という意見もあるけれど、それは聴いただけでは分からない。

機械的な読み方 (a) を採用して、(*) や (**) のように読むことを勧める。

2.4.5 ∀ と ∃ 入れ替えると違ってしまう

上に出て来た

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x > y$$

で分かるように、∀ と ∃ の順番が変わると、まったく異なる命題になる。

一方、2 つの連続する ∀ や、2 つの連続する ∃ を変えても、変わらない。例えば

$$(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad P(x, n)$$

と

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x > 0) \quad P(x, n)$$

は、述語 $P(x, n)$ が何であっても真偽は一致する。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント

万能の証明方法はないけれど、これは試すべき、という方法を紹介する。

☆1　$\forall x$ を見たら「x を任意の$\boxed{}$とする」のようなことを書く。
(「任意の」を省略するテキストも多いけれど、意味は「任意の」なので、この講義では省略せずに書く。)

例 3.7

$(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 \geq 0.$

証明　x を任意の実数とする。　(とにかくこう書いてみる。)
$x > 0$ の場合 $x^2 = x \cdot x > 0$ (正の数 x の積は正)
$x = 0$ の場合 $x^2 = 0^2 = 0$
$x < 0$ の場合 $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$ (正の数 $-x$ の積は正)
いずれの場合も　$x^2 \geq 0$ が成り立つ。 □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (1)

☆2　$\exists x$ を見たら、条件を満たす x が見つからないか考える。もし具体的に発見できたなら、ほぼ解決する。「x を$\boxed{}$とおくと」あるいは「x を$\boxed{}$とすると」と書き出せばよい。

例 3.8

$(\exists x \in \mathbb{R})\ x^2 - 3x + 2 = 0.$
(x を探す…実数で $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすもの …… 方程式を解くと、$(x-1)(x-2) = 0$ から $x = 1, 2$)
証明　$x = 1$ とおくと、x は実数であり、

$$x^2 - 3x + 2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

ゆえに $x^2 - 3x + 2 = 0.$ □

注　方程式の解がつねに具体的に求まるとは限らないので、上に説明した手順は実行できないかもしれない。

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (2)

☆3　複数の量称 ($\forall$, $\exists$) がある場合は、前から順に処理する。

例 3.9

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0.$$

証明　x を任意の整数とする。($\forall x \in \mathbb{Z}$ を見て、まずこうする。)
(次に $(\exists y \in \mathbb{Z})$ $\cdots$ を見て、y を探す…整数で、$x + y = 0$ を満たすもの。y として $y = -x$ が見つかる。そこで…)
　$y = -x$ とおくと、y は整数であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに $x + y = 0$. □

2.5 量称を含む命題の証明を書くためのヒント (3)

もう一つ例をあげる。

例 3.10

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y.$$

$\exists x$ を見て、x を探す気持ちになる。$(\forall y \in \mathbb{Z})\ x + y = y$ を満たす x として、$x = 0$ が見つかる。そこで…

証明　$x = 0$ とおくと、x は整数であり、任意の整数 y に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに $x + y = y$. □

宿題３の紹介

締め切り 5 月 17 日 (月) 13:30. 遅れても 5 月 20 日 (水) 15:10 まで (何か事情があったら連絡して下さい)。
解答を A4 サイズの単一の PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。
問題文は、Oh-o! Meiji のレポート課題 3、あるいは次のところにある。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2021/toi3.pdf`

出題の狙い: 複数の量称を含む命題の読み方と証明

〆切までの提出が最優先であるが、気をつけてもらいたいこと

- 画像の場合、複数ページを一つのファイルにまとめにくい。PDF 形式ならば、プレビューで 1 つにまとめられる。
- 写真を撮って直接 PDF に変換した場合、サイズが大きかったり (他の人の 650 倍とか…)、明暗があって見づらかったりする。

出来る限りスキャナーあるいはスキャン・アプリを使うことを勧める。詳しいことは

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/`

宿題１の解説, 宿題への向き合い方

解答は手書きで説明する。

初めて返却（フィードバック) するので、いくつか改めて注意しておく。

添削して返却することで、理解を深めてもらうことを目的としている。

特に得点をつけてはいない。直した方が良いと思われることは、細かいこと、字の書き方についてまでコメントしてある (読み取りやすい、読み間違いの起こりにくい字を書くように心がけて欲しい)。

マル３つ書いて添削終了と言う答案もあるが、色々なことを指摘されて真っ赤になる答案も少なくない。軽いショックを受ける人が毎年いるようだ。個々の指摘については、冷静に理解して、「そうか、次から直そう」と考えてもらいたい。

繰り返しになるけれど、指摘が多い答案の点を低くするつもりはまったくない。**指摘されたことを理解して直すことに注力**して欲しい。

宿題1答案を見ての具体的注意

- 真理値表の真偽を間違えた人は少ないが、p, q, r の順番が樹形図を書いて出来るもの (辞書式順序) と異なる人がかなりいた。理解して改めるべきである。
- やっていることは計算であるが、目的は証明なので、途中でむやみに省略しないこと。
- $\wedge$, $\vee$ が $\cap$, $\cup$ に見えたり、F が「下」に見えたり、q が数字の 9 に見えたり、おかしなものは指摘しておいた。深刻に受け取る必要はないけれど、気をつけて下さい。
- 論理式で、演算の結合順を指定するカッコは ( ) だけを使うのが普通 (これは言い忘れた)。{ } や [ ] は使わないのが普通である。
  - その点は数式での習慣と違うので頭を切り替えること。
  - そもそも一種類で十分なはず。深さで変えることにしていたら、いくつあっても足りない。
  - 特に中括弧 (braces) { } は、集合を表すために使われるため、演算の結合順の指定に使用するのは極力さけるべき。せいぜい ( ) (parentheses) と [ ] (brackets) くらいにしよう。
  - ちなみに数式でも、英語圏では ( ), [ ], { } の順に使うのが普通である。めったに { } は出て来ない。

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).

[2] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/logic.pdf (2013–2021).