

# 数理リテラシー 第3回

## ～ 論理 (3) ～

桂田 祐史

2021年4月28日

# 目次

- 1 連絡事項&本日の内容
- 2 命題論理 (続き)
  - 同値, 同値の証明法 (続き)
    - 論理の法則 (続き)
  - 「ならば」 ( $\Rightarrow$ )
- 3 述語論理
  - はじめに (述語とは)
  - 「任意の」, 「すべての」,  $\forall$
  - ある〇〇が存在して...,  $\exists$
- 4 宿題 2
- 5 オンライン講義でのノート・メモ取り

# 連絡事項 & 本日の内容

- 緊急事態宣言が発出されたため、明治大学は活動制限指針をレベル2に引き上げました。今回は安全第一でオンライン授業 (オンデマンド講義) としました。次回以降どうするかは、COVID19 の流行の状況を精査した上で検討します。対面授業となった場合も、希望者のオンラインでの受講を可能にします。
- オンデマンド講義では、講義動画と、動画で用いたスライド PDF を提供します。授業日から1週間以内に動画を全て視聴した場合に出席と認めます。
- 本日の授業内容
  - 1.1 「命題論理」の残り (§1.8 「ならば」) を終えて、1.2 「述語論理」に入ります (講義ノート [1] の §2 に入る、ということ)。
- 宿題1 は既に 94% の人が提出しています。返却を始めますが、解説は次回に回すので、未提出な人はこれからでもぜひ提出して下さい。
- 宿題2 を出します (プリントは配れないが、PDF を公開するので、自分で印刷して下さい。解答をレポート用紙に書いてスキャンして提出することも認めます。)。べ切は5月3日 13:30 としますが、その後1週間の提出を認めます。なお次回 (宿題3) からは遅延提出は認めません。
- 質問は (i) メール (アドレスは「シラバスの補足」にある)、(ii) 宿題の余白に書く、(iii) 木曜 12:30~13:30 の Zoom オフィスアワー (今週はお休み) のいずれかを使って質問して下さい。

## 1.6.3 論理の法則 (3) 例題: ド・モルガン律の証明

このスライドは 4/22 の授業のやり残しです。

前のスライドに書いた法則は意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、複雑なものほどどのように確認すればよいだろう？

**例題** 真理値表を用いて  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$  を示せ。

(解答)

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ . □

**練習問題** 真理値表を用いて  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$  を示せ。

## 1.8 「ならば」 ( $\Rightarrow$ )

命題  $p, q$  に対して、新しい命題を表す記号  $p \Rightarrow q$  を導入する。

読み方は「 $p$ ならば $q$  (が成り立つ)」, “If  $p$ , then  $q$  (holds).”

(テキストによっては、 $p \rightarrow q$  と表すこともある。また、 $p \rightarrow q, p \Rightarrow q$  両方導入し、違う意味にしたりすることもある。)

次のように  $p \Rightarrow q$  の真理値を定める。

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

**例** 「 $1+1=2 \Rightarrow \pi$ は無理数」の真理値は、「 $1+1=2$ 」と「 $\pi$ は無理数」のどちらの真理値も T であるから、T である。

**注** 数学では、普通  $\Rightarrow$  は“条件”(後で説明)について使う(例えば、 $x$ が実数  $\Rightarrow x^2 \geq 0$ )。「 $1+1=2$ 」や「 $\pi$ は無理数」のような命題について使うのは、違和感を感じるかもしれない。

## 1.8 「ならば」 ( $\Rightarrow$ ) (続き)

(再掲  $p \Rightarrow q$  の真理値表)

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前半の2行は、特に違和感を感じないであろう。

後半の2行は、(もしかすると) 不思議な感じがするかもしれない。

$p \Rightarrow q$  を考えるとき、 $p$  が成り立たない場合のことは考えないことが多いのでは？

$p$  が成り立たないときは、 $q$  がどちらでも  $p \Rightarrow q$  は真、と表を埋めておく ( $p$  が成り立たないときも  $p \Rightarrow q$  の真偽を定める)。

## 1.8 「ならば」 ( $\Rightarrow$ ) 大事な式 $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

実は任意の命題  $p, q$  に対して次式が成り立つ。

$$(1) \quad p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q \quad (\text{覚えるべき式})$$

(証明)  $(\neg p) \vee q$  の真理値表を書き、前のページの  $p \Rightarrow q$  と比較する。

$p$	$q$	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

(第3列は第1列から、第4列は第2,3列から求めた。第5列は前ページで紹介した定義である。) 第4列と第5列の真偽が一致するので、 $(\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q$ .  $\square$

(注) 我々は  $p \Rightarrow q$  の真偽を真理値表で与えて  $p \Rightarrow q$  を定義したが、 $p \Rightarrow q$  とは  $(\neg p) \vee q$  のことである、として  $p \Rightarrow q$  を定義するテキストもある。いずれにしても、違いは最初だけで、ここから後はどちらでも同じである。

## 1.8 「ならば」 ( $\Rightarrow$ ) 有名な問題 $p \Rightarrow q$ の否定は？

$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$  であるから

$$\begin{aligned}\neg(p \Rightarrow q) &\equiv \neg((\neg p) \vee q) \\ &\equiv (\neg(\neg p)) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge (\neg q).\end{aligned}$$

ゆえに

$$(2) \quad \neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q) \quad (\text{覚えるべき式}).$$

すなわち「 $p$ ならば $q$ 」の否定は、「 $p$  and not  $q$ 」, 「 $p$ かつ( $q$ でない)」である。単に「 $p$ かつ $q$ でない」と言うとき  $\neg(p \wedge q)$  のことと混同されてしまいそうなので、かっこ ( ) を書いたが、苦しまぎれかもしれない。

逆接を用いて「 $p$ であるのに、 $q$ でない」と書くと、間違えにくく、覚えやすいかもしれない。— これは暗記術みたいで気が引けるけれど、「 $p$ かつ( $q$ でない)」とかっこを使うよりは良いかもしれない。



## 1.8 「ならば」 ( $\Rightarrow$ ) 対偶 (高校の復習?)

$p \Rightarrow q$  に対して、 $q \Rightarrow p$  を**逆**、 $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$  を**対偶**、 $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$  を**裏**と呼ぶ。

**練習**  $(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q$  を示せ。 (「対偶は元の命題と同値。」)

### 注意 3.1 (念のため確認)

$p \Rightarrow q$  と、その逆  $q \Rightarrow p$  は同値ではない。また、 $p \Rightarrow q$  と、その裏  $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$  も同値ではない。 $p \Rightarrow q$  が真であっても、逆や裏は真でないことがある(「逆は必ずしも真ならず」)。

一方、裏は「逆の対偶」であるから、逆と裏は同値である。

## 2 述語論理

### 2.1 はじめに (述語とは)

まず例から始める。

#### 例 3.2

$x$  は実数の範囲を動く変数とするとき、 $x > 3$  という式は、変数  $x$  の値を定めると命題となる。

$x = 1$  のとき、 $x > 3$  は  $1 > 3$  であるから偽な命題、 $x = 10$  のとき、 $x > 3$  は  $10 > 3$  であるから真な命題である。

このように、変数  $x$  の値を定める ( $x$  に代入する) と命題となる式を、 $x$  についての**条件** (condition), **述語** (predicate), **命題関数** などと呼ぶ。

$x$  についての述語を  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\dots$  のように表す。

(普通の関数については慣れているであろう、として以下の説明を行う。)

$\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  を述語に対しても用いる。

述語に関して論じる**述語論理**では、2つの**量称記号** (quantifier, 限定記号ともいう)  $\forall$ ,  $\exists$  が非常に重要である。

## 2.2 「任意の」, 「すべての」, $\forall$

ある一定の範囲内で、何かあることが、一つの例外もなく成立する、ということがある。

**例:** 「三角形の内角の和は  $180^\circ$  である。」 (平面内のすべての三角形の3つの内角の和は  $180^\circ$  である。)

つまり、次のような形の命題がしばしば現れる、ということである。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の} \\ \text{すべての} \end{array} \right\} \square \text{ に } \left\{ \begin{array}{l} \text{対して} \\ \text{ついて} \end{array} \right\} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ \cdot \end{array} \right\}$$

「任意の  $x$  について  $p(x)$  が成り立つ」、英語では「For all  $x$ ,  $p(x)$  holds.」これを

$$\forall x \quad p(x)$$

と表す。

$\forall$  は、All の頭文字 A を逆立ちさせて作った記号である。

## 2.2 「任意の」, 「すべての」, $\forall$ ( $\forall x : p_1(x)$ ) $p_2(x)$

### 例 3.3

$$\forall x \quad (x \text{ は実数} \Rightarrow x^2 \geq 0)$$

この例がそうであるように、多くの場合、 $\forall x p(x)$  の  $p(x)$  は、 $p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$  という形をしている。つまり

$$\forall x \quad (p_1(x) \Rightarrow p_2(x))$$

これを次のように書くことにする。

$$(\forall x : p_1(x)) \quad p_2(x)$$

これを「 $p_1(x)$  を満たすようなすべての  $x$  に対して  $p_2(x)$  が成り立つ」と読むと分かりやすいかもしれない。 $p_1(x)$  を  $x$  についての前提条件、付帯条件のようにみなすわけである。

( $\forall \Delta : \Delta$  は平面内の三角形)  $\Delta$  の3つの内角の和は  $180^\circ$ 。

# 集合の記号の前倒し導入 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

集合についてパートIIで詳しく説明するが、使うと記述に便利である。

集合の記号をフライングして使う。

ものの集まりを集合という。

$a$  が集合  $A$  の要素であることを  $a \in A$  と表す (高校で習ったはず)。

$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	(自然数 <i>natural number</i> )
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	(ドイツ語で数 <i>Zahl</i> )
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	(比 <i>quotient</i> )
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	(実数 <i>real number</i> )
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合	(複素数 <i>complex number</i> )

集合の記号を使うと、「 $x$  が実数である」ことを「 $x \in \mathbb{R}$ 」と短く表すことができる。

## 2.2 「任意の」, 「すべての」, $\forall$ 例で慣れよう

書くのが面倒だと、省略記法を使いたくなる。

### 例 3.4

$$(\forall x: x \text{ は実数}) x^2 \geq 0.$$

$$(\forall x: x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0.$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq 0. \quad \text{「任意の実数 } x \text{ に対して } x^2 \geq 0 \text{.} \text{」}$$

### 例 3.5

$$(\forall x: x > 0) x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

$$(\forall x > 0) x + \frac{1}{x} \geq 2. \quad \text{「任意の正の数 } x \text{ に対して } x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{.} \text{」}$$

1つうっかりしがちな大事なことがある。

$p_1(x)$  を満たす  $x$  が1つも存在しないときは、 $(\forall x : p_1(x))p_2(x)$  の真偽はどう定める? → これについては後述する。

## 2.3 ある○○が存在して…, $\exists$

「 $p(x)$  が成り立つような  $x$  が (少なくとも 1 つ) 存在する。」

$$\text{ある } x \left\{ \begin{array}{l} \text{が存在して} \\ \text{について} \end{array} \right\} p(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{が成り立つ。} \\ \text{が成立する。} \\ \text{である。} \\ \cdot \end{array} \right\}$$

There exists  $x$  such that  $p(x)$  holds.

これを次のように表す。

$$\exists x \quad p(x)$$

$\exists$  は exists の頭文字の大文字 E の鏡文字である。

$\exists x$  s.t.  $p(x)$  と書く人も多い。この辺は気分の問題である。

## 2.3 ある〇〇が存在して…, $\exists$ ( $\exists x: p_1(x)$ ) $p_2(x)$

### 例 3.6 (方程式の実数解の存在)

方程式  $x^3 - x + 1 = 0$  の実数解  $x$  が存在する。

ある  $x$  が存在して、 $x$  は実数かつ  $x^3 - x + 1 = 0$ .

$\exists x (x \in \mathbb{R} \wedge x^3 - x + 1 = 0)$ .

この例がそうであるように、多くの場合、 $p(x)$  は  $p_1(x) \wedge p_2(x)$  の形をしていて、 $p_1(x)$  が考察の範囲などを表している。このとき

$$\exists x (p_1(x) \wedge p_2(x))$$

を次のように表す。

$$(\exists x : p_1(x)) p_2(x).$$

### 例 3.6 (続き)

$(\exists x: x \in \mathbb{R}) x^3 - x + 1 = 0$ .

$(\exists x \in \mathbb{R}) x^3 - x + 1 = 0$ .

「ある実数  $x$  が存在して、 $x^3 - x + 1 = 0$ 。」



## 2.3 ある○○が存在して…, $\exists$ ( $\exists x: p_1(x)$ ) $p_2(x)$

似た例を追加する。

### 例 3.7 ( $\sqrt{2}$ の存在)

$$\exists x (x > 0 \wedge x^2 = 2).$$

$$(\exists x: x > 0) \quad x^2 = 2.$$

$$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2.$$

「ある正の数  $x$  が存在して  $x^2 = 2$ 。」

## 宿題 2

締め切り 5月3日(月) 13:30. 今回も締め切り後1週間までの提出を認める。

解答を A4 サイズの単一の PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2021/toi2.pdf>

にある (Oh-o! Meiji のレポート課題 2)。

出題の狙い: 同値変形による証明, 量称記号  $\forall, \exists$  に慣れる (日本語の文を論理式に、論理式を日本語に翻訳)。

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

[http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how\\_to\\_pdf/](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/)

「宿題提出についての注意」を見て下さい。

# オンライン講義でのノート・メモ取り

普通の講義のようにノートを取る、スライド資料を印刷してメモを取る、色々考えられます。

省略なしの文章なので、全部書き取るのは面倒でしょう。適当に省略しながら書くと良いでしょう (普通の数学ならば、定義・定理・例などは書く、と方針が立てやすいですが、数理リテラシーの場合は少し分かりにくい)。記号や用語の使い方などは、書いた方が覚えやすいです。

スライド資料を印刷する場合、2つ提供している PDF のうち、印刷向けとしてある方を、1枚の紙に4ページくらい詰め込んで印刷すると良いと思います (Mac のプレビューの印刷メニューならば、レイアウトで指定可能)。その形で PDF 出力すればコンビニでも詰め込み印刷ができるはず。



- [1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理,  
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/logic.pdf>  
(2013–2021).