数理リテラシー 第2回

～ 論理 (2) ～

桂田 祐史

2021 年 4 月 21 日

目次

連絡事項

- 宿題 1(問 1) を出します。〆切は 4 月 26 日 (月曜) 13:30．今回は締め切り後 1 週間までの提出を認めます。

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2021/toi1.pdf`
- 今回は、講義ノート [1] の §1.4∼§1.7 の範囲を解説します。
- 体調が悪いときは無理して出席しないで下さい。欠席した人のために、対応する昨年度の講義動画を授業終了時から 2 週間 WWW で公開します。

(欠席しても自習して宿題がちゃんと提出できれば問題ないと思います。出席回数自体は得点化していません。欠席回数が 1/3 (5 回) を超える場合は相談して下さい。)

宿題について

- 授業中にプリントを配布するが、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで PDF ファイルも公開する。授業に欠席した場合も、PDF を利用して取り組み、提出できる。
- 〆切は次回授業のある週 (普通は翌週) の月曜 13:30. それ以降も水曜 15:20 までは提出を認める (ただしフィードバックが遅くなるかも)。
- 提出は原則 A4 サイズの単一の PDF ファイル。PDF ファイル作成に慣れないうちは、画像フォーマット (JPEG 等) での提出も受け付けるが、なるべく早く PDF が作れるようになること。
- 添削結果を PDF ファイルで返却 (フィードバック) する。復習して下さい。
- 宿題はまじめに取り組み、〆切を守って提出する限り、満点とする。〆切から水曜 15:20 までの提出は半分の得点とする。
- 答を紙に書いてスキャナーやスマホアプリでスキャンして PDF を作ったり、タブレットで書いてから PDF 化したり、LaTeX や Word で書いた文書を PDF 化したり、どういうやり方でも OK とする (こちらが読めて添削できることが大事で、自分がやりやすい方法でやって下さい。やり方で評価を変えたりしません。)。

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」
`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/`

前回を振り返る

前回は、初回なのでこの科目のガイダンスを行い、それからパート I である「論理」の 1. 命題論理に入った。

以下を説明済みである。

1.1 命題とその真偽
1.2 「でない」, $\neg$
1.3 「かつ」, $\wedge$

1.4 「または」(論理和), $\vee$

2 つの命題 p と q について

「p であるか、または q である」　(p と q の少なくとも一方が成り立つ)

は命題である。

これを $p \vee q$ で表し、「p または q」,「p or q」と読む。

p と q の論理和、選言, logical disjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の 2 つは) 覚えなくても良い。

$p \vee q$ の真理値は、次のように約束する。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

1.4 「または」(論理和), $\vee$　排他的論理和

前のページの真理値表の１行目

$$p \text{ が T, } q \text{ が T のとき } p \vee q \text{ は T}$$

に違和感があるかも。

日常語の「または」は、どちらか一方だけ (両方はダメ)、を意味することが多いかもしれない (「金の斧または銀の斧を選んで下さい」)。
そういうのは**排他的論理和** (exclusive or, XOR) という。

しかし数学では、「または」は上の意味とするのが普通である。
これは数学的真理というものではなく、単に言葉・記号の約束である。

ただ、そう約束する方が便利、という理由はある。

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ または } b = 0$$

これは「または」の意味を上の約束で決めるから。
もしも排他的論理和を採用すると次のようになる。

$$ab = 0 \ \Leftrightarrow \ (a = 0 \text{ かつ } b \neq 0) \mathrm{xor} (b = 0 \text{ かつ } a \neq 0) \mathrm{xor} a = b = 0.$$

$abc = 0$ でやるとどうなるか想像しよう (あるいは実際に書いて見よう)。

1.5 かっこ, 論理演算の結合の優先順位

ここまでで、$\neg$, $\wedge$, $\vee$ を導入した。
数式と同様に複数の演算を組み合わせた式が登場する。
演算の結合の順番を指示するため、かっこ () を用いる。
$p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge r$ は違う。

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

第 5 列と第 7 列の真理値は違うことに注目。

わきみち: 行と列

前ページで、「第 5 列」，「第 7 列」と書いたが、宿題などで「第 5 行」，「第 7 行」と書く人がいる。

横書きの場合は、「行 (row)」は横にのびているもので、縦にのびているのは「列 (column)」というのが普通である (Cf. 線形代数の行列の行と列)。

- 数式の場合、乗算 $\times$ は加算 $+$ よりも優先するというルールを採用するのが普通で、$(p \times q) + r$ は単に $p \times q + r$ と書かれる。

しかし

- $\wedge$ と $\vee$ の場合、($\wedge$ を論理積, $\vee$ を論理和というけれど) $\wedge$ を $\vee$ より優先するというルールは採用しないのが普通である。
  $(p \wedge q) \vee r$ は $p \wedge q \vee r$ とは書かない (かっこ省略はルール違反)。

一方

- $\neg$ は、$\wedge$ や $\vee$ より優先的に結合する、と約束するのが普通。

例 2.1

$(\neg p) \vee q$ は、$\neg p \vee q$ と書いて良い。
$\neg p \vee q$ は、$\neg(p \vee q)$ ではなく、必ず $(\neg p) \vee q$ という意味である。
$(\neg p) \vee (\neg q)$ は、$\neg p \vee \neg q$ と書いて良い。

この講義では、かっこは省略せず、$(\neg p) \vee q$ と書くことが多い。この後、たくさんの記号が出て来て、それらについての順序の優先ルールを全部間違いなく覚えて使うのは、(練習時間があまり取れないので) 難しい、と考えるから。

2 つの命題 p と q が**同値**とは、命題の真偽が一致することである。そのことを $p \equiv q$ と表す。

例 2.2

$$1+1=2 \equiv \sin 1 < 1$$

$$\pi \text{ は有理数} \equiv 1=3$$

($\equiv$ は、数式の場合の等号 $=$ (値が一致) と似たようなものである。)

細かい話　$1+1=2 \equiv \sin 1 < 1$ は数式の混じった論理式で、$+$, $=$, $\equiv$, $\sin$, $<$ などの広い意味の "演算子" がたくさん現れる。数式の読み方は知っているとして、$\equiv$ の優先順位は一番低いことは言っておくべきかもしれない。すべてかっこをつけて結合の順序を明示すると、$((1+1)=2) \equiv ((\sin 1) < 1)$ となる。

1.6.2 真理値表による証明

任意の命題 p に対して、p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。このことを $p \equiv \neg(\neg p)$ と表せる。

このことを以下のように証明できる。

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

第 1 列と第 3 列の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$.

これは真理値表を使わずに書くと、次のようになる。

p が T であるとき、$\neg p$ は F であるから、$\neg(\neg p)$ は T である。
p が F であるとき、$\neg p$ は T であるから、$\neg(\neg p)$ は F である。
いずれの場合も p と $\neg(\neg p)$ の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv \neg(\neg p)$.

1.6.3 論理の法則 (1)

一般に (「任意の命題 p に対して」という意味)

$$p \equiv \neg(\neg p) \tag{1}$$

以下、同様にして証明できる。

$$p \wedge (\neg p) \text{ はつねに偽} \tag{2}$$

$$p \vee (\neg p) \text{ はつねに真} \tag{3}$$

細かい注意 (2) を $p \wedge (\neg p) \equiv \mathrm{F}$, (3) を $p \vee (\neg p) \equiv \mathrm{T}$ と書きたくなるかもしれない (そう書いてあるテキストも多い)。うるさく言うと、$\equiv$ は 2 つの命題の真偽が一致するときに用いる記号で、T や F は命題ではないので、記号の濫用である (と言う人も多い)。つねに T の真理値をもつ命題 $\top$, $\curlywedge$ や、つねに F の真理値をもつ命題 $\bot$, $\curlyvee$ を導入するテキストも多い。そうしておけば

$$p \wedge (\neg p) \equiv \curlyvee, \quad p \vee (\neg p) \equiv \curlywedge.$$

(高校数学と違って、使用する記号が統一されているわけではない。)

1.6.3 論理の法則 (2)

(4) $$p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{交換律}).$$

(5) $$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{結合律}).$$

約束　$(p \vee q) \vee r$ を $p \vee q \vee r$, $(p \wedge q) \wedge r$ を $p \wedge q \wedge r$ と表す。

(6) $$p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (\text{吸収律}).$$

(7) $$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{分配律}).$$

(8) $$p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad (\text{冪等律}).$$

(冪: べき)

(9) $$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad (\text{ド・モルガン律}).$$

Cf. 高校で集合のド・モルガン律を学んだかも (この講義でも後述)。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

このスライドは 4/22 の授業では説明しませんでした。次回やります。

前のスライドに書いた法則は意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、複雑なものはどのように確認すればよいだろう？

例題　真理値表を用いて $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を示せ。
(解答)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.　□

練習問題　真理値表を用いて $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ を示せ。

1.6.3 論理の法則 (4)　例題: 分配律の証明

例題　真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。

練習問題　真理値表を用いて $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ を示せ。

例題　真理値表を用いて $(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$ を示せ。

証明

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \land r$	$p \land r$	$q \land r$	$(p \land r) \lor (q \land r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

第 5, 8 列が一致するので、$(p \lor q) \land r \equiv (p \land r) \lor (q \land r)$ が成り立つ。 $\square$

練習問題　真理値表を用いて $(p \land q) \lor r \equiv (p \lor r) \land (q \lor r)$ を示せ。→ 宿題

真理値表による証明は、必ず出来る、という大きな特徴がある。

ところで数式の場合は、式変形による証明というのがある。論理式の場合も式変形による証明がある。**同値変形による証明**と呼ばれる。

以下に述べる 2 つの定理 (定理 2.3, 定理 2.4) が鍵となる。

定理 2.3 (推移律)

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ ならば $p \equiv r$.

証明.

$p \equiv q$ かつ $q \equiv r$ と仮定する。
p が真ならば、$p \equiv q$ より q は真である。$q \equiv r$ より r は真である。
p が偽ならば、$p \equiv q$ より q は偽である。$q \equiv r$ より r は偽である。
ゆえにつねに p と r の真偽は一致する。ゆえに $p \equiv r$. □

1.7.2 代入

定理 2.4 (代入 (置き換え))

$p \equiv q$ ならば、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

1. $(\neg p) \equiv (\neg q)$
2. $p \wedge r \equiv q \wedge r$
3. $p \vee r \equiv q \vee r$

証明.

上と同様である。(1) を示す。 $p \equiv q$ と仮定する。

p が真ならば、$p \equiv q$ により q も真である。ゆえに $\neg p, \neg q$ は共に偽である。

p が偽ならば、$p \equiv q$ により q も偽である。ゆえに $\neg p, \neg q$ は共に真である。

ゆえにつねに $\neg p$ と $\neg q$ の真偽は一致する。ゆえに $\neg p \equiv \neg q$.

(2), (3) は場合分けが増えるが同様である。 □

1.7.3 例題

1. 既に証明した $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ と交換律を用いて
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
を示せ。
2. (1) の結果を用いて
$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$
を示せ。

(解答) (1)

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\equiv (q \vee r) \wedge p && (p \wedge Q \equiv Q \wedge p \text{ の } Q \text{ に } q \vee r \text{ を代入}) \\ &\equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) && (\text{与えられた分配律を用いた}) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) && (\text{交換律と同値なもので置き換え}). \end{aligned}$$

ゆえに (推移律を使って)

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

例題 (続き)

(2)

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \\
&\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \\
&\equiv (((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee (q \wedge r)) \vee (q \wedge s) \\
&\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).
\end{aligned}
$$

まず $r \vee s$ を一つの命題とみなして、(1) の問題文中の式

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$$

を使い、それから (1) の結果

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

を 2 回使い、結合律 $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ を使い、かっこを省略した。

□

(急がないでゆっくり確かめることを勧めます。)

参考文献

[1] 桂田祐史：数理リテラシー Part I. 論理, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/logic.pdf (2013–2021).