数理リテラシー 第1回

〜 ガイダンス, 論理 (第 1 回) 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2021 年 4 月 14 日

目次

自己紹介

- 名前: 桂田(かつらだ) 祐史(まさし)
- 研究テーマ: 数値計算法の数理 (数値計算の方法を数学的に解析する)
- メールアドレス: `katurada` あっとまーく `meiji` ドット `ac` ドット `jp`
- 講義の WWW サイト:
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/`
- 研究室: 910 号室 (高層棟 9 階)
- 例年「気軽に質問に来よう」と言うことにしてあるけれど…

  長時間の対面の相談は避けた方が良いかもしれませんね。Zoom オフィスアワーというのを用意するので、そちらで質問するか、あるいは提出する宿題に質問を書いてもらっても良いです。

連絡事項

- 今日の講義に用いたスライド資料は、授業終了後に授業 WWW サイト

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/`

  に載せます (毎回そうします)。ブックマークを勧めます。
  この URL は Oh-o! Meiji のシラバスの補足にも書いてあります。そちらからリンクをたどるのが便利かもしれません。

連絡事項

- 今日の講義に用いたスライド資料は、授業終了後に授業 WWW サイト

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/`

  に載せます (毎回そうします)。ブックマークを勧めます。
  この URL は Oh-o! Meiji のシラバスの補足にも書いてあります。そちらからリンクをたどるのが便利かもしれません。
- 今日は初回なので宿題はありません。

連絡事項

- 今日の講義に用いたスライド資料は、授業終了後に授業 WWW サイト

  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/`

  に載せます (毎回そうします)。ブックマークを勧めます。
  この URL は Oh-o! Meiji のシラバスの補足にも書いてあります。そちらからリンクをたどるのが便利かもしれません。
- 今日は初回なので宿題はありません。
- 宿題がない代わりにアンケートに答えて下さい (Oh-o! Meiji にアクセスする)。アンケート回答締め切りは、4 月 19 日 13:30 とします。(初回なので遅れてもペナルティーはなしです。)

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

[1] literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語

(写像というのは、関数を一般化したもの。)

[1]literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語

(写像というのは、関数を一般化したもの。)

なぜそれが大事か?

[1]literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語

(写像というのは、関数を一般化したもの。)

なぜそれが大事か?

私なりの答え

高校までは「公式主役の数学」をしていたが、大学では「定理が主役の数学」をする。定理は命題であり、それを記述するための言葉・文法があり、それを用いて読み書きが出来る必要がある。

[1] literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (1) 数理リテラシー[1] とは

数理 (ここでは数学) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力

具体的には、**論理**、**集合**、**写像**という、現代数学を記述するための言語

(写像というのは、関数を一般化したもの。)

なぜそれが大事か?

私なりの答え

高校までは「公式主役の数学」をしていたが、大学では「定理が主役の数学」をする。定理は命題であり、それを記述するための言葉・文法があり、それを用いて読み書きが出来る必要がある。

言葉は伝達手段であるが、実は、言葉は思考のための必須の道具でもある。

[1] literacy とは、万人に必要な基礎的読み書き能力 (1880 年頃定着)

ガイダンス (2) 割とわかりにくいので補足

シラバスで参考書にあげた

新井紀子, 数学は言葉 — *math stories*, 東京図書 *(2009)*

は、そのあたりのことを上手に説明している (と思う)。

新井先生は次の文章も書いている。

- 『「数学は言葉」の対象は？』
  https://web.archive.org/web/20150916080120/http://researchmap.jp/jo8s7ljcd-78/
  「言語教育の方法論で数学を教える」という言葉が印象的
- 「数学の言葉への脱皮」
  https://tanemaki.iwanami.co.jp/posts/1360
  (脱皮はとても難しいけれど大事、がんばろう、という話)

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る。声で返事する代わりに手をあげて下さい。
(ちなみに大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る。声で返事する代わりに手をあげて下さい。
(ちなみに大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)
- ほぼ毎回宿題を出す (授業中に演習時間は取れないので)。
締め切りは翌週月曜 13:30
添削して Oh-o! Meiji でフィードバックする。
遅れずに提出したかどうか得点化する。間違えても減点しない。
心構え 1　自分で解く。相談しても質問しても良いけれど、最後は自力で書く。「写すな頭を通せ。」

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る。声で返事する代わりに手をあげて下さい。
(ちなみに大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)
- ほぼ毎回宿題を出す (授業中に演習時間は取れないので)。
締め切りは翌週月曜 13:30
添削して Oh-o! Meiji でフィードバックする。
遅れずに提出したかどうか得点化する。間違えても減点しない。
心構え 1　自分で解く。相談しても質問しても良いけれど、最後は自力で書く。「写すな頭を通せ。」
心構え 2　添削されたものを読んで理解する (そのための 2 クラス制)。

ガイダンス (3) どんなふうに授業をするか

- 何をどう言う順番で学ぶかはシラバスを見よう (あるいは講義ノートを読む)。
- 出席を取る。声で返事する代わりに手をあげて下さい。
  (ちなみに大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)
- ほぼ毎回宿題を出す (授業中に演習時間は取れないので)。
  締め切りは翌週月曜 13:30
  添削して Oh-o! Meiji でフィードバックする。
  遅れずに提出したかどうか得点化する。間違えても減点しない。
  心構え 1　自分で解く。相談しても質問しても良いけれど、最後は自力で書く。「写すな頭を通せ。」
  心構え 2　添削されたものを読んで理解する (そのための 2 クラス制)。
- 例年、中間試験をしている。昨年度は出来なかったが、今年度は？

ガイダンス (4) 自習についてアドバイス

- 予習・復習が有益。1 週間授業 1 コマだけで理解するのは困難。講義ノートがあるので予習はしやすいが、どちらかと言うと復習を勧める。

ガイダンス (4) 自習についてアドバイス

- 予習・復習が有益。1 週間授業 1 コマだけで理解するのは困難。講義ノートがあるので予習はしやすいが、どちらかと言うと復習を勧める。
- 復習は、自分で取ったノート、講義資料、教科書 (中島 [1])、講義ノートなどを**きちんと読む**のが基本。

読みながら (あるいは講義を聴きながら)「この言葉・記号は何だったけ？」,「これは本当？」,「これはなぜ？」と自問自答する習慣をつけよう。

あら筋をまとめたり、人に説明するのも効果がある。

ガイダンス (4) 自習についてアドバイス

- 予習・復習が有益。1 週間授業 1 コマだけで理解するのは困難。講義ノートがあるので予習はしやすいが、どちらかと言うと復習を勧める。
- 復習は、自分で取ったノート、講義資料、教科書 (中島 [1])、講義ノートなどを**きちんと読む**のが基本。

  読みながら (あるいは講義を聴きながら)「この言葉・記号は何だったけ？」,「これは本当？」,「これはなぜ？」と自問自答する習慣をつけよう。

  あら筋をまとめたり、人に説明するのも効果がある。
- 小学校以来、練習問題 (ドリル) を解くことで勉強する、と言うやり方に慣れているだろうが、大学ではそれがあまり有効でない。
  (科目によっては、手頃な練習問題がなかったりする。1,2 年生のうちはまだ結構あるけれど、段々減っていく。計算問題 1 つを解くのに 1 時間かかったりするようになるので、数をこなして覚えるやり方は限界がある。)

ガイダンス (5) 授業の受け方について (雑談)

この講義は、例年、教師 (桂田) が黒板に板書して、学生はそれをノートに写すのが授業時間の大半を占める、という伝統的なスタイルでやってきた。

昨年度はオンライン必須となったので、スライド資料を作成して、それを元にした説明を動画に取ってオンデマンドで配信した。(スライド資料も電子的に配布した。)

ガイダンス (5) 授業の受け方について (雑談)

この講義は、例年、教師 (桂田) が黒板に板書して、学生はそれをノートに写すのが授業時間の大半を占める、という伝統的なスタイルでやってきた。

昨年度はオンライン必須となったので、スライド資料を作成して、それを元にした説明を動画に取ってオンデマンドで配信した。(スライド資料も電子的に配布した。)

今年度、そのスライド資料を使って対面授業をする、という案もある。

ガイダンス (5) 授業の受け方について (雑談)

この講義は、例年、教師 (桂田) が黒板に板書して、学生はそれをノートに写すのが授業時間の大半を占める、という伝統的なスタイルでやってきた。

昨年度はオンライン必須となったので、スライド資料を作成して、それを元にした説明を動画に取ってオンデマンドで配信した。(スライド資料も電子的に配布した。)

今年度、そのスライド資料を使って対面授業をする、という案もある。

英会話のレッスンでは、先生が喋ったことの真似をする (“please repeat after me”) という練習の比重が案外と大きい。

ガイダンス (5) 授業の受け方について (雑談)

この講義は、例年、教師 (桂田) が黒板に板書して、学生はそれをノートに写すのが授業時間の大半を占める、という伝統的なスタイルでやってきた。

昨年度はオンライン必須となったので、スライド資料を作成して、それを元にした説明を動画に取ってオンデマンドで配信した。(スライド資料も電子的に配布した。)

今年度、そのスライド資料を使って対面授業をする、という案もある。

英会話のレッスンでは、先生が喋ったことの真似をする (“please repeat after me”) という練習の比重が案外と大きい。

数理リテラシーにも似た面があると思う (ただし書くことの真似)。

- スライド資料の主な部分をノートに写す。
- 最低限、言葉や記号の定義や定理 (今日はない) などは自分の手で書く。

では講義に入る

数理リテラシーの内容は、大きく分けて次の 3 つのパートからなる。

I. 論理
II. 集合
III. 写像

(これ以外に IV. 同値関係 というのも補講で用意するかも。)

パート I. 論理

- 「論理」は次の 2 つからなる。
  1. 命題論理
     1. 命題とその真偽
     2. 「でない」 (否定, $\neg$)
     3. 「かつ」 (論理積, $\wedge$)
     4. 「または」 (論理和, $\vee$)
     5. かっこ (　)　(意外と大事)。
     6. $\cdots$
  2. 述語論理
     (そのときになったら説明)

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1 + 1 = 2.$ 　正しい

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1 + 1 = 2.$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1+1=2.$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない
$\sin 1$ は 1 より大きい。	正しくない

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1+1=2.$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない
$\sin 1$ は 1 より大きい。	正しくない

— 以上はいずれも命題

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1 + 1 = 2.$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない
$\sin 1$ は 1 より大きい。	正しくない

— 以上はいずれも命題

10 億は大きい	どうだろう？

命題 (proposition) とは、正しいか正しくないか数学的に判断できる主張

Example 1

$1+1=2.$	正しい
円周率は有理数である。	正しくない
$\sin 1$ は 1 より大きい。	正しくない

— 以上はいずれも命題

10 億は大きい	どうだろう？

— これは命題ではない！

1.1 命題とその真偽　真 (true), 偽 (false), 真理値

命題のことを $p, q, r, \cdots, p_1, p_2, \cdots$ のような記号で表す。

ある命題 p が正しいことを

p は**真** (true) である
p は成立する (成り立つ)
p の**真理値** (truth value) は T である
p の真理値は 1 である

のように表す。

ある命題 p が正しくないことを

p は**偽**(ぎ) (false) である
p は成立しない (成り立たない)
p の真理値は F である
p の真理値は 0 である

のように表す。

(false [fɔ́ːls], 「フォールス」)

Example 2

p_1　$1 + 1 = 2.$

p_2　円周率は有理数である。

p_3　$e > 2.7.$ (e は自然対数の底)

p_4　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

1.1 命題とその真偽　真 (true), 偽 (false), 真理値

Example 2

p_1　$1 + 1 = 2.$

p_2　円周率は有理数である。

p_3　$e > 2.7$. (e は自然対数の底)

p_4　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$

の真理値はそれぞれ T, F, T, T である。

1.1 命題とその真偽　真 (true), 偽 (false), 真理値

Example 2

p_1　$1+1=2$.

p_2　円周率は有理数である。

p_3　$e > 2.7$. (e は自然対数の底)

p_4　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

の真理値はそれぞれ T, F, T, T である。

命題が真であることを論理的に示すことを「**証明する** (to prove)」という。その論述を**証明** (proof) と呼ぶ。

余談1 証明のルーツ 古代ギリシャ

- キオスのヒポクラテス (B.C. 450—420)
  初めての証明？
- アレクサンドリアのエウクレイデス (ユークリッド, B.C. 3C?)
  「原論 (ストケイア)」

ギリシャ数学は、ヨーロッパでは一度忘れられて、ルネッサンスにアラビア世界から里帰りする。

余談 2 命題の呼び方の慣習

- 論理学では「正しい命題を定理 (theorem) という。」
- しかし数学の多くのテキスト、講義では、正しい命題以外書かないことが多く、次のように呼び分ける。

定理	大事なもの
補助定理, 補題 (lemma)	定理の証明用のもの
系 (corollary)	定理からすぐ分かる (導かれる) もの
命題 (proposition)	重要性が低いもの

(真な命題であるという意味で定理であるが、重要性がそれほどでもないので、命題と呼ぶ、というやり方はもしかすると古めかしいのかもしれない。)

1.2 「でない」(否定), $\neg$

　任意の命題 p について「p でない」は命題である。これを p の**否定** (negation) と呼び、$\neg p$ で表す。

「p でない」, "not p" と読む。

(高校では $\bar{p}$ と書いたかもしれない。どう書いてあっても読めた方が良いが、書くときは統一しよう。)

　この講義では、$\neg p$ と書く。

1.2 「でない」(否定), $\neg$

　任意の命題 p について「p でない」は命題である。これを p の**否定** (negation) と呼び、$\neg p$ で表す。

「p でない」, "not p" と読む。

(高校では $\bar{p}$ と書いたかもしれない。どう書いてあっても読めた方が良いが、書くときは統一しよう。)

　この講義では、$\neg p$ と書く。

Example 3

p が $1+1=2$ であるとき、$\neg p$ は $1+1\neq 2$.
q が $\sqrt{10} > \pi$ であるとき、$\neg q$ は $\sqrt{10} \leq \pi$.

1.2 「でない」 (否定)　否定の真理値, 真理値表

任意の命題 p について
p の真理値が T であれば、$\neg p$ の真理値は F
p の真理値が F であれば、$\neg p$ の真理値は T

任意の命題 p について
p の真理値が T であれば、$\neg p$ の真理値は F
p の真理値が F であれば、$\neg p$ の真理値は T

このことを次のように表す。

p	$\neg p$
T	F
F	T

(p は何か特定の命題ではなく、どういう命題についても成り立つことを述べている。)

行ごとに読むことに注意する。

このような表を**真理値表** (truth table) と呼ぶ。

暗黙のうちに次を仮定している。

排中律（はいちゅうりつ） 「任意の命題 p について、p または $\neg p$ の少なくとも一方が成り立つ。」
どちらでもない、という中間の状態がない。

暗黙のうちに次を仮定している。

はいちゅうりつ
排中律 「任意の命題 p について、p または $\neg p$ の少なくとも一方が成り立つ。」
どちらでもない、という中間の状態がない。

むじゅんりつ
(無)矛盾律 「任意の命題 p について、p と $\neg p$ が同時に成り立つことはない。」

- 無矛盾律が成り立たない、つまり p と $\neg p$ が同時に成り立つような命題 p が 1 つでも存在すると、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が成り立つことが証明できる。

- 無矛盾律が成り立たない、つまり p と $\neg p$ が同時に成り立つような命題 p が 1 つでも存在すると、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が成り立つことが証明できる。
  その場合、例えば $1+1=3,\ 1+1\neq 3$ のどちらも真となる。ムチャクチャになる。

- 無矛盾律が成り立たない、つまり p と $\neg p$ が同時に成り立つような命題 p が 1 つでも存在すると、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が成り立つことが証明できる。
  その場合、例えば $1+1=3$, $1+1\neq 3$ のどちらも真となる。ムチャクチャになる。
- 一方、排中律はやや微妙である。
  1 つの命題 p について、p も $\neg p$ もまだ証明できていない、ということはたくさんある。
  いつかは出来る？出来なくても、どちらかは成り立つと信じる??

排中律と無矛盾律　どちらも認めることにする

- 無矛盾律が成り立たない、つまり p と $\neg p$ が同時に成り立つような命題 p が 1 つでも存在すると、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が成り立つことが証明できる。
その場合、例えば $1+1=3,\ 1+1\neq 3$ のどちらも真となる。ムチャクチャになる。
- 一方、排中律はやや微妙である。
1 つの命題 p について、p も $\neg p$ もまだ証明できていない、ということはたくさんある。
いつかは出来る？出来なくても、どちらかは成り立つと信じる ??
- 我々は、以下では無矛盾律も排中律も認めて議論する。
(このあたり、深い話があるが、そこには首を突っ込まないことにする。)

1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」 (p と q の両方とも成り立つ)

は命題である。

1.3 「かつ」(論理積), $\wedge$

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」(p と q の両方とも成り立つ)

は命題である。

これを $p \wedge q$ で表し、「p かつ q」,「p and q」と読む。

1.3 「かつ」 (論理積), $\land$

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」 (p と q の両方とも成り立つ)

は命題である。

これを $p \land q$ で表し、「p かつ q」, 「p and q」と読む。

p と q の論理積, 連言, logical conjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の 2 つは) 覚えなくても良い。

1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」 (p と q の両方とも成り立つ)

は命題である。

これを $p \wedge q$ で表し、「p かつ q」，「p and q」と読む。

p と q の論理積, 連言, logical conjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の 2 つは) 覚えなくても良い。

Example 4

$\frac{1}{20}$ は有理数であり、かつ π は無理数である。

$2.7 < e \wedge e < 2.8$ (普通 $2.7 < e < 2.8$ と書くだろうけれど).

1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$

2 つの命題 p と q について

「p が成り立つ、かつ q が成り立つ」 (p と q の両方とも成り立つ)

は命題である。

これを $p \wedge q$ で表し、「p かつ q」, 「p and q」と読む。

p と q の論理積, 連言, logical conjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の 2 つは) 覚えなくても良い。

Example 4

$\frac{1}{20}$ は有理数であり、かつ π は無理数である。

$2.7 < e \wedge e < 2.8$ (普通 $2.7 < e < 2.8$ と書くだろうけれど).

注意「そして」, 「しかし」はどちらも「かつ」と同じ。事実としてそれぞれ成り立つか成り立たないかが問題で、順接も逆接も関係ない。

1.3 「かつ」 (論理積), $\wedge$ 　$p \wedge q$ の真理値表

$p \wedge q$ の真理値は、p と q の真理値がともに T であるとき T, そうでないとき F と約束する。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- 行の書き順は、辞書引き順序のような適当な順番を選ぶことを強く勧める。樹形図を描いたと考えるのも良い。
- 罫線をもっと引きたくなるかもしれない。その場合

$$
\begin{array}{c|c||c}
p & q & p \wedge q \\
\hline
\mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\
\mathrm{T} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{T} & \mathrm{F} \\
\mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F}
\end{array}
$$

のように第 2 列と第 3 列の間を $\|$ にしたりして、第 1,2 列と、第 3 列は違うことを示すのを勧める。例えば最初の行

$$\mathrm{T} \mid \mathrm{T} \,\|\, \mathrm{T}$$

は、「p が T かつ q が T **のとき**、$p \wedge q$ は T である」ということを言っている。

1.4 「または」 (論理和), $\vee$

2 つの命題 p と q について

「p であるか、または q である」　(p と q の少なくとも一方が成り立つ)

は命題である。

これを $p \vee q$ で表し、「p または q」, 「p or q」と読む。

p と q の論理和、選言, logical disjunction などと呼ぶが、これらは (特に後の 2 つは) 覚えなくても良い。

$p \vee q$ の真理値は、次のように約束する。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(このスライドは、解説しないかも。次号予告のようなもの。)

参考文献

[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).