2017 年度 数理リテラシー 中間試験問題

2017 年 6 月 22 日 2 限施行 (10:55〜12:20 の予定), 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1) i は複素数であるが実数ではなく、π は実数であるが有理数ではなく、$\frac{1}{2}$ は有理数であるが整数ではなく、-2 は整数であるが自然数ではない。　(2) 「p ならば q」は「q でないならば p でない」と同値である。　(3) A と B の共通部分が空集合ならば、A は B の補集合に含まれる。　(4) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して $xy = y$ が成り立つ。　(5) x が A と B の合併集合の要素であるためには、x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。

2.　(1) 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。　(2) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。　(3) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を示せ。

3.　(1) A を $\mathbb{R}$ の部分集合、S を実数とする。次の命題の否定を、$\neg$ を用いずに式で表せ。

$$((\forall x \in A)\ x \leq S) \wedge ((\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A)\ S - \varepsilon < y).$$

(2) 次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を証明せよ。
(a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ y^2 = x$　　(b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y > 0)\ \log y > x$

4.　(1) 順序対が等しいことの定義を述べよ。　(2) X を全体集合、A と B を X の部分集合とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c, $A \times B$, 2^A の定義を書け。また、それぞれを何と呼ぶか答えよ。　(3) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 全体集合を $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$ とするとき、$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c, $A \times B$, 2^A を求めよ (要素を全て書き並べる方法で表せ)。また $2^{(2^A)}$ の要素は何個あるか答えよ。

注: 以下の **5**, **6** を解くとき、論理について学んだ法則は証明抜きに使って良い。

5.　(1) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の合併集合 $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, 共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ の定義を書け。

(2) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 \leq x < \frac{1}{n}\right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ を求めよ。証明もすること。

(3) 集合族 $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ について、$\displaystyle\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n^c)$ が成り立つことを示せ。

6.　X を全体集合、A と B を X の部分集合とするとき、以下の命題を証明せよ。
(1) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$　(2) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B$

7.　連立方程式 $\begin{cases} x\,(x^2 + 4y + y^2) = 0 \\ (y + 2)\,(y + x^2) = 0 \end{cases}$ を解け。(答えを求めるだけでなく、求めたものが解であること、求めたもの以外に解がないことが分かるようにすること。)

注意事項

この面を表にして配り、試験開始まで裏返さないこと。

- 筆記用具と時計以外はカバンにしまって下さい。
- 10:55 に試験を始め、12:20 に終了する予定です。もし始まりが遅れたら、その分終わりの時間もずらします。
- 問題は好きな順に解答して構いません。ただし一つの大問の解答は一ヶ所にまとめること。
- 解答用紙は裏面も使用して構いません。なるべく解答用紙 1 枚で済ませること。どうしても足りなくなった場合は試験監督に申し出ること。
- 遅刻は 11:20 まで認めます。11:30〜12:10 の間は退室可能 (手をあげて試験監督に知らせ、解答用紙を渡し、静かに荷物をまとめて退室)。

1.

(1) $i \in \mathbb{C} \wedge i \notin \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \wedge \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \wedge -2 \in \mathbb{Z} \wedge -2 \notin \mathbb{N}$　あるいは $i \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \wedge i \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \wedge \frac{1}{2} \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}) \wedge -2 \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$

(2) $p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$

(3) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B^c$

(4) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ xy = y$

(5) $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

2.

(1) 真理値表は次のようになる。

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

5 列目と 8 列目の真偽が一致するので

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r).$$

(2) 交換法則 $p \wedge q \equiv q \wedge p$ と、(1) の結果を使って

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

であるから、 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(3) (1), (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}(p \vee q) \wedge (r \vee s) &\equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \\ &\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)\end{aligned}$$

であるから、

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)\,.\blacksquare$$

3. (2) は少し凝っていて、空振りする人が多いかな、と考えて、(1) という問を加えた。(1) はかなり多くの人が出来ていて良かった。

(1)

$$
\begin{aligned}
&\neg\left(((\forall x \in A) x \leq S) \wedge ((\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) S - \varepsilon < y)\right) \\
&\quad \Leftrightarrow (\neg\left[(\forall x \in A) x \leq S\right]) \vee (\neg\left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) S - \varepsilon < y\right]) \\
&\quad \Leftrightarrow ((\exists x \in A) x > S) \vee ((\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in A)\ S - \varepsilon \geq y)\,.
\end{aligned}
$$

(2) (a) 偽である。否定命題は $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2 \neq x$. (証明) $x = -1$ とおくと $x \in \mathbb{R}$ であり、任意の実数 y に対して、$y^2 \geq 0 > -1 = x$ であるから、$y^2 \neq x$.

(b) 真である。(証明) x を任意の実数とするとき、$y = e^{x+1}$ とおくと、$y > 0$ であり、$\log y = x+1 > x$ であるから、$\log y > x$. ■

4. (1) $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ であるとは、$x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ が成り立つことをいう。
(2)

- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. これは A と B の合併集合 (または和集合) と呼ぶ。
- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. これは A と B の共通部分 (または積集合, 交わり) と呼ぶ。
- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. これは A と B の差集合 (または A から B を除いた差集合) と呼ぶ。
- $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$. これは A の補集合と呼ばれる。
- $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$. これは A と B の直積集合と呼ぶ。
- $2^A = \{C \mid C \subset A\}$. これは A の冪集合 (ベキ集合) と呼ぶ。

(3)

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A \cap B = \{2\}$
- $A \setminus B = \{1\}$
- $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$
- $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$
- $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
- 2^A の要素数は $2^2 = 4$ であるから、$2^{(2^A)}$ の要素数は $2^4 = 16$. ■

5. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は、A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ のいずれかに属するようなもの全体の集合であり、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は、A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$ のすべてに属するようなもの全体の集合である。
(解答)

(1) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$.

(2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$.
(前者の証明)

(i) $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。集合族の合併の定義から、$(\exists n^* \in \mathbb{N})\ x \in A_{n^*}$. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の定義から、$A_{n^*} \subset A_1$ が成り立つから、$x \in A_1$.

(ii) $x \in A_1$ とする。$n = 1$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ かつ $x \in A_n$ が成り立つ。ゆえに (集合族の合併の定義から) $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) より $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$. ■

(後者の証明)

(i) $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。集合族の共通部分の定義から、$(\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n$. すなわち $0 \le x < \frac{1}{n}$. 実は $x = 0$ が成り立つ。これを証明するため、背理法を用いる。$x \ne 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. アルキメデスの公理より、$(\exists n^* \in \mathbb{N})\ n^*|x| > 1$. これから $|x| > \frac{1}{n^*}$. ゆえに $x \notin A_{n^*}$. これは矛盾である。ゆえに $x = 0$. ゆえに $x \in \{0\}$.

(ii) $x \in \{0\}$ とする。$x = 0$ であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$0 \le x < \frac{1}{n}$. ゆえに $x \in A_n$. (集合族の共通部分の定義から) $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) より $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. ■

(3)

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c &\Leftrightarrow \neg\left(x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\left((\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \ x \notin A_n \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ \ x \in A_n^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(A_n^c\right). \blacksquare \end{aligned}$$

(注) (2) で $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \le x < \frac{1}{n}$ から $x = 0$ を導くところは、次のような証明も出来る。

「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$」,「定数数列 $a_n = c$ は c に収束する」,「数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束列で、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \le b_n$ を満たすならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$」という 3 つの定理から、$\displaystyle 0 \le x \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ゆえに $x = 0$. ■

昔は、この証明を教えていたのだけれど、1 年生はまだ数列の極限をきちんと学んでいないので、最近の数理リテラシーでは、上に書いたアルキメデスの公理を用いる証明に差し替えた。今回も「はさみ打ちの原理によって」と勘違いした人が出てたので (「はさみ打ちの原理」は、上に書いた定理とは違う定理である)、極限の議論はしない、という教育方針は "正しい" と考えている (教育方針なんてのは、数学じゃないけど)。

6. (2) のような問題は、練習量があまりないから、解きにくいかな。

(1) (実は、本質的には 5 (3) と同じである。) 任意の x に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \lor x \in B) \Leftrightarrow (\neg x \in A) \land (\neg x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \land x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c) \cap (B^c) \end{aligned}$$

であるから、$(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$. ■

(2) **(⇒)** $A \cup B = X$ と仮定する。任意の $x \in A^c$ について、$x \in X = A \cup B$ であるから、$x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ。しかし、$x \in A$ とすると $x \in A^c$ に矛盾するから、$x \in B$ が成り立つ。ゆえに $A^c \subset B$.

(⇐) $A^c \subset B$ と仮定する。任意の $x \in X$ に対して、$x \in A$ または $x \in A^c$ が成り立つが、$x \in A^c$ の場合は、$A^c \subset B$ より $x \in B$ が成り立つ。ゆえにつねに $x \in A \vee x \in B$, すなわち $x \in A \cup B$ が成り立つ。ゆえに $X \subset A \cup B$. 逆向きの $X \supset A \cup B$ はつねに成り立つので、$X = A \cup B$. ■

7. (宿題で類題を出した。)

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} x(x^2+4y+y^2)=0 \\ (y+2)(y+x^2)=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x(x^2+4y+y^2)=0 \wedge (y+2)(y+x^2)=0 \\
&\Leftrightarrow \big(x=0 \vee x^2+4y+y^2=0\big) \wedge \big(y+2=0 \vee y+x^2=0\big) \\
&\Leftrightarrow (x=0 \wedge y+2=0) \vee (x=0 \wedge y+x^2=0) \\
&\quad \vee (x^2+4y+y^2=0 \wedge y+2=0) \vee (x^2+4y+y^2=0 \wedge y+x^2=0) \\
&\Leftrightarrow (x,y)=(0,-2) \vee (x,y)=(0,0) \vee ((x,y)=(2,-2) \vee (x,y)=(-2,-2)) \\
&\quad \vee \Big((x,y)=(\sqrt{3},-3) \vee (x,y)=(-\sqrt{3},-3)\Big) \\
&\Leftrightarrow (x,y)=(0,-2),(0,0),(\pm 2,-2),(\pm\sqrt{3},-3). \blacksquare
\end{aligned}
$$