数理リテラシー 第12回

～ 写像 (5) ～

桂田 祐史

2020年7月29日

目次

本日の内容&連絡事項

- 「期末レポートについて」の説明 (繰り返し) と注意事項。
- 本日の講義内容: 写像による集合の像と逆像
- 宿題10(問10) の解説を行います。
(なるべく早く返却するつもりですが、週末になるかもしれません。)
- 宿題にはしませんが、練習用の問題 (問11) を出します。解答もつけておきます。

期末レポートについて (第 9 回授業時発表)

- 課題の提示は 8 月 5 日 (水曜) 15:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 6 日 (木曜) 15:00 です。
- 課題文自体は、授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、90〜120 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して送って下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば how_to_pdf で説明した方法が使えるかもしれません (これは圧縮の方法のことです)。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。
- 何かトラブルが起こった場合は、締め切りまでにメールで連絡して下さい。

期末レポート注意事項 (追加)

1. 10MB の容量制限以上のサイズになった場合は、複数の PDF にして、追加提出して下さい。コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンした PDF を提出して下さい。
2. 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早くメールで連絡・相談して下さい。障害などが起こった場合は、締め切りの延期等をする可能性があります。
3. メールアドレスは、Oh-o! Meiji の「シラバスの補足」に書いてありますが、それも早めにメモしておくことを勧めます。
4. 質問に対する回答や、締め切りの延期などは、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで公開し、公開したことを Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。

定義 (写像による集合の像と逆像)

$f\colon X \to Y$ とする。

1. $A \subset X$ に対して
$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad (= \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\})$$
を **f による A の (順) 像** (the (direct) image of A under f) と呼ぶ。
　特に f による X の像 $f(X)$ (f の値域とも呼ぶことにしてある) のことは、**f の像** (the image of f) とも呼び、$\mathrm{Image}(f)$ とも表す。
2. $B \subset Y$ に対して
$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
を **f による B の逆像** (the inverse image of B under f) あるいは**原像** (preimage) と呼ぶ。

3.6 写像による集合の像と逆像

注意　実は順像、逆像を表す記号には色々ある (そうだ)。

	順像の記号	逆像の記号
この講義	$f(A)$	$f^{-1}(B)$
教科書	$f_*(A)$	$f^*(B)$
	$f[A]$	$f^{-1}[B]$
	$f^{\rightarrow}(A)$,	$f^{\leftarrow}(B)$

注意　f の逆写像 f^{-1} が存在するとき、$B \subset Y$ に対して、$f^{-1}(B)$ という記号には、次の 2 つの解釈がある。

(a) f による B の逆像

(b) f^{-1} による B の像

実はどちらの解釈でも同じ集合を表す。

3.6 写像による集合の像と逆像　例

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき

$$
\begin{aligned}
f(\{1\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = 1\} \\
&= \{f(1)\} = \{1\}, \\
f(\{-2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{-2\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = -2\} \\
&= \{f(-2)\} = \{4\}, \\
f(\{1, -2\}) &= \{f(x) \mid x \in \{1, -2\}\} \\
&= \{f(x) \mid x = 1 \vee x = -2\} \\
&= \{f(1), f(-2)\} = \{1, 4\}, \\
f([-2, 1]) &= \{f(x) \mid x \in [-2, 1]\} \\
&= \{f(x) \mid -2 \le x \le 1\} \\
&= \{y \mid 0 \le y \le 4\}, \\
f(\emptyset) &= \{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

3.6 写像による集合の像と逆像　例

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\{3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 3\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = 3\right\} \\
&= \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}, \\
f(\{-2\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = -2\right\} \\
&= \emptyset, \\
f(\{-2, 3\}) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{-2, 3\}\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = -2 \lor f(x) = 3\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 = -2 \lor x^2 = 3\right\} = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}, \\
f^{-1}([-2, 3]) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-2, 3]\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \le f(x) \le 3\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -2 \le x^2 \le 3\right\} \\
&= \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}\right\}, \\
f^{-1}(\emptyset) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

集合の演算 ($\cap$, $\cup$, $\setminus$) と、写像による集合の像・逆像の関係はしばしば必要になる。基本的な定理を紹介する。

証明のために以下のことはすぐ思い出せるようにしておこう。

$f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in X \quad \wedge \quad f(x) \in B.$$

逆像に関する公式は覚えるのも、証明するのも簡単である。次のスライドで、それから始めよう。

命題 (写像による集合の逆像)

$f\colon X \to Y$ とする。また $B_1, B_2, B \subset Y$ とするとき、次が成り立つ。

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

証明

1. $B_1 \subset B_2$ を仮定する。
   $x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、$x \in X \wedge f(x) \in B_1$.
   仮定より $f(x) \in B_2$.
   ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$.
   ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

再掲

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

2. 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 &\Leftrightarrow ((f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge (x \in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

3. (2) の証明中の $\cap$ を $\cup$ に置き換えれば (3) の証明になる。

再掲

(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $f^{-1}(B^{\complement}) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}$.

4. 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in B_1) \wedge (\neg (f(x) \in B_2)) \\ &\Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B_1)) \wedge \left(\neg(x \in f^{-1}(B_2))\right) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

一般に $f^{-1}(Y) = X$ が成り立つので

$$f^{-1}(B^{\complement}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)^{\complement}.$$

命題

$f\colon X \to Y$ とする。また $A_1, A_2, A \subset X$ とするとき、次が成り立つ。

1. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $f\,(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)
3. $f\,(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
4. $f\,(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.　(等号は一般には成り立たない。)

証明

1. $A_1 \subset A_2$ を仮定する。$y \in f(A_1)$ とすると、ある $x \in A_1$ が存在して $y = f(x)$. 仮定より $x \in A_2$ であるから、$y \in f(A_2)$. ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$.
2. $y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cap A_2$ が存在して $y = f(x)$. $x \in A_1$ かつ $x \in A_2$ が成り立つ。$x \in A_1$ より $y \in f(A_1)$. また $x \in A_2$ より $y \in f(A_2)$. ゆえに $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.　((1) を用いた別証もある。)

再掲 (2)　$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(2) の別証明

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であるから、(1) を用いて、$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$.
同様に $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$.
ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. □

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の証明 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \land B \subset A$ を用いる)

(a) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする。ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、$y = f(x)$.
$x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つ。
$x \in A_1$ のときは $y \in f(A_1)$. $x \in A_2$ のときは $y \in f(A_2)$.
ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$. すなわち $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

(b) $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから ((1) を用いて)、$f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(a), (b) から $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

再掲 (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(3) の別証明 ($\exists x\ P_1(x) \vee P_2(x) \equiv (\exists x\ P_1(x)) \vee (\exists x\ P_2(x))$ に気づけば、次のように一気に証明できる。)

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\exists x)\,(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)\,((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x)\,((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow ((\exists x)\,(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (\exists x)\,(x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

再掲 (4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(4) の証明

$y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、$y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$.
$y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1)\ y = f(x)$.
実は $x \notin A_2$. 実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。
ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、$y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

問 10 解説

動画のみ用意してある。

練習用 問11

もう宿題にはしない。練習用の問を用意した。

以下に置いてあります (解答つき)。

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi11.pdf` (PDF)

`http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi11.tex` (TEX ソース)

講義を終えるにあたって

参考文献

中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).