数理リテラシー 第9回

～ 写像 (2) ～

桂田 祐史

2020 年 7 月 8 日

目次

本日の内容&連絡事項

- **期末レポート** について説明します。
- 本日の授業内容: 写像の例 (続き), 合成写像
- 宿題 7(問 7) の解説を行います。
- 宿題 8 を出します。締め切りは 7 月 13 日 (月曜)13:30 です。それ以降 7 月 15 日 15:20 までに提出されたものは 1/2 にカウントします。何か事情がある場合は連絡して下さい (katurada あっと meiji.ac.jp)。
- 質問や相談等は宿題余白に書くか、質問用 Zoom ミーティングで。

期末レポートについて

- 課題の提示は 8 月 5 日 (水曜) 15:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく早くアクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 6 日 (木曜) 15:00 です。
- 課題文自体は、▸ 授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、90～120 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料や教科書、ノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して送って下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば ▸ how_to_pdf で説明した方法が使えるかもしれません。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。
- 何かトラブルが起こった場合は、締め切りまでにメールで連絡して下さい。

宿題6へのコメント

宿題 6 へのコメント

1. $C = 2^B$ は私が思っていたよりも出来ている人が多かった。カンマ $\boxed{,}$ で叱られている人が多い。繰り返しになるけれど気をつけて下さい。

宿題 6 へのコメント

1. $C = 2^B$ は私が思っていたよりも出来ている人が多かった。カンマ $\boxed{,}$ で叱られている人が多い。繰り返しになるけれど気をつけて下さい。
2. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と間違えた人がいました。

   左辺は $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (無限個の集合の合併), 右辺は $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (n 個の集合の合併) です。

宿題 6 へのコメント

1. $C = 2^B$ は私が思っていたよりも出来ている人が多かった。カンマ $\boxed{,}$ で叱られている人が多い。繰り返しになるけれど気をつけて下さい。
2. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と間違えた人がいました。

   左辺は $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (無限個の集合の合併), 右辺は $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (n 個の集合の合併) です。

   (c) は $\emptyset$ が正解ですが、$\{0\}$ 以外に $\{\emptyset\}$ という答案も結構ありました。$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ とは違います (要素数はそれぞれ 1, 0)。

宿題6へのコメント

1. $C = 2^B$ は私が思っていたよりも出来ている人が多かった。カンマ $\boxed{,}$ で叱られている人が多い。繰り返しになるけれど気をつけて下さい。
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ と間違えた人がいました。

   左辺は $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (無限個の集合の合併), 右辺は $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (n 個の集合の合併) です。

   (c) は $\emptyset$ が正解ですが、$\{0\}$ 以外に $\{\emptyset\}$ という答案も結構ありました。$\{\emptyset\}$ は $\emptyset$ とは違います (要素数はそれぞれ 1, 0)。
3. 「対偶だから」という答案が多かったです。そういう方針で解くと

$$
\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \forall x(x \notin B \Rightarrow x \notin A) \qquad (\text{一般に } p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p \text{ だから}) \\
&\Leftrightarrow \forall x(x \in B^{\complement} \Rightarrow x \in A^{\complement}) \\
&\Leftrightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}.
\end{aligned}
$$

ゆえに $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$.

例 (射影)

X と Y は空集合でない集合とする。

$$\mathrm{pr}_X \colon X \times Y \to X \text{ を } \mathrm{pr}_X((x,y)) = x \ ((x,y) \in X \times Y),$$
$$\mathrm{pr}_Y \colon X \times Y \to Y \text{ を } \mathrm{pr}_Y((x,y)) = y \ ((x,y) \in X \times Y)$$

で定める。

それぞれ X への**射影**、Y への**射影** と呼ぶ。

例 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、$c \in Y$ とするとき、$f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

3 写像の例　定値写像, 特性関数

例 (定値写像)

X, Y は空でない集合で、$c \in Y$ とするとき、$f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような f を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。

例 (特性関数)

X は空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この χ_A を A の**特性関数** (the characteristic function of A) または**定義関数**と呼ぶ。

Dirichlet の関数 D は $\chi_{\mathbb{Q}}$ である。

例 (微分)

$C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし f' は f の導関数とする。

(無限回微分可能な関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 回微分した f' も無限回微分可能であるので、$D(f) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ である。)

$D(\sin) = \cos.$
$F(x) = x^2$, $G(x) = 2x$ とするとき、$D(F) = G$.

3 写像の例　数列

例 (数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。

例 (数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

例 (数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、

例 (数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない**。

例 (数列)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。このとき、写像 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が $f(n)=a_n$ $(n\in\mathbb{N})$ として定まる。

逆に $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が与えられたとき、$a_n=f(n)$ $(n\in\mathbb{N})$ で a_n を定めると、実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が得られる。

結局のところ、**実数列は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像に他ならない。**

X から Y への写像全体の集合を Y^X と表すことがある。

$$Y^X := \{f \mid f\colon X\to Y\}.$$

この記号を使うと、実数列全体の集合は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ と表せる。 □

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

(a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、

(b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは$\cdots$

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

(a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、

(b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは⋯

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは…

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは$\cdots$

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- (a) 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- (b) 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは$\cdots$

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.
(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

練習　値域を求める (1)

写像 $f\colon X \to Y$ の値域 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を求めてみよう。

例題 1　以下の各関数 (高校数学ルールで定義域、値域を書かない) について、

- ⓐ 特に断りのない場合に定義域 (X と書くことにする) は何か、
- ⓑ 定義域を (a) のように定めたとき、値域を求めよ。

(1) $f_1(x) = x^2 - 3x + 4$　(2) $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$　(3) $f_3(x) = \sin x$
(4) $f_4(x) = \sqrt{x}$

(解答) (1) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_1(x) = (x - 3/2)^2 + 7/4$ であるから

$$f_1(X) = \left\{x^2 - 3x + 4 \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 7/4\}.$$

(2) (a) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.　(b) $y = f_2(x)$ のグラフは⋯

$$f_2(X) = \left\{x + \frac{1}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2 \vee y \leq -2\}.$$

(3) (a) $X = \mathbb{R}$.　(b) $f_3(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.
(4) (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.　(b) $f_4(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$. □

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)\ ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X,\ \mathrm{id}_X(x) = x\ (x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}),\ D(f) = f'\ (f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X)$

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\}$

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\}$

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は…)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x,y)) = (ax+by, cx+dy)\ ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 $X\ (\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X,\ \mathrm{id}_X(x) = x\ (x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ D(f) = f'\ (f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は⋯)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x,y)) = (u,v)$. ゆえに $(u,v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**
4. $D(C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

練習　値域を求める (2)

例題 2　次の各写像の値域を求めよ。

1. Dirichlet の関数　$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$
2. 正則な 1 次変換　$ad - bc \neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d に対して $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = (ax + by, cx + dy)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
3. 恒等写像　集合 X $(\neq \emptyset)$ に対して、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$
4. 微分　$D\colon C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D(f) = f'$ $(f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ ただし f' は f の導関数とする。

解答　((1) は簡単。(2) は線形代数の実力次第。(3) は出来るようになろう。(4) は$\cdots$)

1. $D(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.
2. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.　($\because$ 任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ は解 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。つまり $f((x, y)) = (u, v)$. ゆえに $(u, v) \in f(\mathbb{R}^2)$.)
3. $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.　**出来るようになろう**
4. $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.　($\because$ 任意の $f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ に対して、$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ とおくと、$F' = f$ かつ F は無限回微分可能 $(F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}))$ であるから、$D(F) = f$. ゆえに $D(C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})) \supset C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.)

4 合成写像

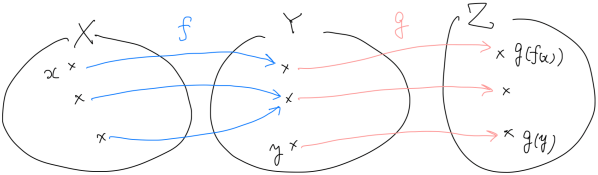
定義 (合成写像)

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ とするとき

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で写像 $h: X \to Z$ が定まる。この h を f と g の**合成写像**と呼び、$g \circ f$ で表す。すなわち

$$g \circ f: X \to Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)),$$



4 合成写像　細かい注意

実は合成写像については、テキストごとに細かいところで違いがある。この講義では、教科書 (中島 [1]) と同じにしたが、私は別の講義では、次のように定義している。

定義 (合成写像の別の定義)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Z$, $f(X) \subset Y'$ であるとき、写像

$$h\colon X \to Z, \quad h(x) = g\left(f(x)\right) \quad (x \in X)$$

が定義できる。この h を f と g の合成写像と呼ぶ。

一般に $f(X) \subset Y$ であるから、$Y = Y'$ のときは $f(X) \subset Y'$ が成り立つことに注意しよう。$Y = Y'$ でなくても $f(X) \subset Y'$ であれば、$g\left(f(x)\right)$ が意味を持つので h が定義できる。

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、 $h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、 $h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

定理 (写像の合成についての結合律)

$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

一体何を証明すれば良いのか？写像が等しいとはどういうことか。

証明　$g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ であり、任意の $x \in X$ に対して

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに、$h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ では、定義域、終域、定義域に属する各々の要素の像、それぞれ等しいので、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

宿題 8(問 8) 紹介

問題文は以下においてある。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi8.pdf

宿題のソースも公開してある。

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi8.tex

これに答えを書き加えて提出してくれても構わない。

問 7 解説

手書きで解説する。

参考文献

中島 匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).