

# 数理リテラシー 第2回

## ～ 論理 (2) ～

桂田 祐史

2020年5月20日

# 前回は振り返る

前回は、初回なのでこの科目のガイダンスを行い、それからパートIである「論理」の1. 命題論理に入った。

以下を説明済みである。

1.1 命題とその真偽

1.2 「でない」,  $\neg$

1.3 「かつ」,  $\wedge$

## 1.4 「または」 (論理和, 選言, logical or, disjunction, $\vee$ )

2つの命題  $p$  と  $q$  について

「 $p$  であるか、または  $q$  である」 ( $p$  と  $q$  の少なくとも一方が成り立つ) は命題である。

これを  $p \vee q$  で表し、「 $p$  または  $q$ 」, 「 $p$  or  $q$ 」 と読む。

$p \vee q$  の真理値は、次のように約束する。

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

読み方は分かりますか？

# 排他的論理和

前のページの真理値表の1行目

$p$ がT、 $q$ がTのとき  $p \vee q$  は T

に違和感があるかも。

日常語の「または」は、どちらか一方だけ、を意味することが多いかもしれない(「金の斧または銀の斧を選んで下さい」)。

そういうのは**排他的論理和** (exclusive or, XOR) という。

**しかし**数学では、「または」は上の意味とするのが普通である。

これは数学的真理というものではなく、単に言葉・記号の約束である。

ただ、そう約束する方が便利、という理由はある。

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ または } b = 0$$

これは「または」の意味を上約束で決めるから。

もしも排他的論理和を採用すると次のようになる。

$$ab = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ かつ } b \neq 0) \text{ または } (b = 0 \text{ かつ } a \neq 0) \text{ または } a = b = 0$$

$abc = 0$  でやるとどうなるか想像しよう (あるいは実際に書いて見よう)。

## 1.5 かっこ, 論理演算の結合の優先順位

ここまでで、 $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  を導入した。

数式と同様に複数の演算を組み合わせた式が登場する。  
演算の結合の順番を指示するため、かっこ ( ) を用いる。

$p \vee (q \wedge r)$  と  $(p \vee q) \wedge r$  は違う。

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

第5列と第7列の真理値は違うことに注目。

前ページで、「第5列」, 「第7列」と書いたが、宿題などで「第5行」, 「第7行」と書く人がいる。

横書きの場合は、「行 (row)」は横にのびているもので、縦にのびているのは「列 (column)」というのが普通である (Cf. 線形代数の行列の行と列)。

## わきみち: 真理値表の書き方 (前回も言った)

前ページの真理値表は複雑なので、縦線を引きたい、かも。その場合は

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

のように第3,4列の間を (例えば  $\parallel$  にして) 強調することを勧める。

第1~3列と、第4~7列は性質が違うから。例えば最初の実行

$$T \mid T \mid T \parallel T \mid T \mid T \mid T$$

は、 $p$ がTかつ $q$ がTかつ $r$ がT **のとき**、 $q \wedge r$ はT、 $p \vee q$ はT、 $(p \vee q) \wedge r$ はTである、ということを言っている。

# 結合の順序の優先ルールについて

- 数式の場合、乗算  $\times$  は加算  $+$  よりも優先するというルールを採用するのが普通で、 $(p \times q) + r$  は単に  $p \times q + r$  と書かれる。

しかし、

- $\wedge$  と  $\vee$  の場合、 $\wedge$  を  $\vee$  より優先するというルールは採用しないのが普通である。 $p \wedge q \vee r$  とは書かずに、必ず  $(p \wedge q) \vee r$  と書く。

一方

- $\neg$  は、 $\wedge$  や  $\vee$  より優先的に結合する、と約束するのが普通。

## Example

$(\neg p) \vee q$  は、 $\neg p \vee q$  と書いて良い。

$(\neg p) \vee (\neg q)$  は、 $\neg p \vee \neg q$  と書いて良い。

$\neg p \vee q$  は、 $\neg(p \vee q)$  ではない。

この講義では、かっこは省略せず、 $(\neg p) \vee q$  と書くことが多い。この後、たくさん記号が出て来て、それらについての順序の優先ルールを全部間違いなく覚えて使うのは、(練習時間があまり取れないので) 難しい、と考えるから。(数式の場合は、小学校以来かなり長い練習時間があつた。)

## 1.6 同値, 同値の証明法 (1) 真理値表による証明

### 同値

2つの命題  $p$  と  $q$  が同値とは、命題の真偽が一致することである。そのことを  $p \equiv q$  と表す。

#### Example

$$1 + 1 = 2 \equiv \sin 1 < 1$$

$$\pi \text{ は有理数} \equiv 1 = 3$$

( $\equiv$  は、数式の場合の等号  $=$  (値が一致) と似たようなものである。)

# 真理値表による証明

任意の命題  $p$  に対して、 $p$  と  $\neg(\neg p)$  の真偽は一致する。このことを  $p \equiv \neg(\neg p)$  と表せる。

このことを以下のように証明できる。

$p$	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

第1列と第3列の真偽は一致する。ゆえに  $p \equiv \neg(\neg p)$ 。

これは真理値表を使わずに書くと、次のようになる。

$p$  が T であるとき、 $\neg p$  は F であるから、 $\neg(\neg p)$  は T である。  
 $p$  が F であるとき、 $\neg p$  は T であるから、 $\neg(\neg p)$  は F である。  
いずれの場合も  $p$  と  $\neg(\neg p)$  の真偽は一致する。ゆえに  $p \equiv \neg(\neg p)$ 。

# 論理の法則 (1)

一般に (「任意の命題  $p$  に対して」という意味)

$$(1) \quad p \equiv \neg(\neg p)$$

以下、同様にして証明できる。

$$(2) \quad p \wedge (\neg p) \text{ はつねに偽}$$

$$(3) \quad p \vee (\neg p) \text{ はつねに真}$$

細かい注意 (2) を  $p \wedge (\neg p) \equiv F$ , (3) を  $p \vee (\neg p) \equiv T$  と書きたくなるかもしれない (そう書いてあるテキストも多い)。うるさく言うと、 $\equiv$  は 2 つの命題の真偽が一致するとき用いる記号で、 $T$  や  $F$  は命題ではないので、記号の濫用である (と言う人も多い)。つねに  $T$  の真理値をもつ命題  $\perp$ ,  $\top$  や、つねに  $F$  の真理値をもつ命題  $\perp$ ,  $\top$  を導入するテキストも多い。そうしておけば

$$p \wedge (\neg p) \equiv \perp, \quad p \vee (\neg p) \equiv \top.$$

(高校数学と違って、使用する記号が統一されているわけではない。)

## 論理の法則 (2)

$$(4) \quad p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{交換律}).$$

$$(5) \quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \quad (\text{結合律}).$$

**約束**  $(p \vee q) \vee r$  を  $p \vee q \vee r$ ,  $(p \wedge q) \wedge r$  を  $p \wedge q \wedge r$  と表す。

$$(6) \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad (\text{吸収律}).$$

$$(7) \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad (\text{分配律}).$$

$$(8) \quad p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p \quad (\text{冪等律}).$$

$$(9) \quad \neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q), \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \quad (\text{ド・モルガン律}).$$

Cf. 高校で集合のド・モルガン律を学んだかも (この講義でも後述)。

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

## 例題: ド・モルガン律の証明

前のスライドに書いた法則は意味を考えればすぐ納得できるものも多いが、複雑なものはどのように確認すればよいだろう？

**例題** 真理値表を用いて  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$  を示せ。

(解答)

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

第 4,7 列の真理値が一致しているので  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ . □

**練習問題** 真理値表を用いて  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$  を示せ。

## 例題: 分配律の証明

**例題** 真理値表を用いて  $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  を示せ。

これは書いているところを見せる。

**練習問題** 真理値表を用いて  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$  を示せ。

## 例題: 分配律の証明

**例題** 真理値表を用いて  $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  を示せ。  
**証明**

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

第5, 8列が一致するので、 $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  が成り立つ。 □

**練習問題** 真理値表を用いて  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$  を示せ。

## 1.7 同値の証明法 (2) 同値変形による証明

### 推移律

真理値表による証明は、必ず出来る、という大きな特徴がある。

ところで数式の場合は、式変形による証明というのがある。論理式の場合も式変形による証明がある。**同値変形による証明**と呼ばれる。

以下に述べる2つの定理が鍵となる。

#### 定理 (推移律)

$p \equiv q$  かつ  $q \equiv r$  ならば  $p \equiv r$ .

#### Proof.

$p \equiv q$  かつ  $q \equiv r$  と仮定する。

$p$  が真ならば、 $p \equiv q$  より  $q$  は真である。 $q \equiv r$  より  $r$  は真である。

$p$  が偽ならば、 $p \equiv q$  より  $q$  は偽である。 $q \equiv r$  より  $r$  は偽である。

ゆえにつねに  $p$  と  $r$  の真偽は一致する。ゆえに  $p \equiv r$ . □

## 定理 (代入)

$p \equiv q$  ならば、次の (1), (2), (3) が成り立つ。

①  $(\neg p) \equiv (\neg q)$

②  $p \wedge r \equiv q \wedge r$

③  $p \vee r \equiv q \vee r$

## Proof.

上と同様である。(1) を示す。  $p \equiv q$  と仮定する。

$p$  が真ならば、  $p \equiv q$  により  $q$  も真である。ゆえに  $\neg p, \neg q$  は共に偽である。

$p$  が偽ならば、  $p \equiv q$  により  $q$  も偽である。ゆえに  $\neg p, \neg q$  は共に真である。

ゆえにつねに  $\neg p$  と  $\neg q$  の真偽は一致する。ゆえに  $\neg p \equiv \neg q$ 。

(2), (3) は場合分けが増えるが同様である。 □

# 例題

- ① 既に証明した  $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$  と交換律を用いて

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

を示せ。

- ② (1) の結果を用いて

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee s)$$

を示せ。

(解答) (1)

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (q \wedge r) \vee p && (p \vee Q \equiv Q \vee p \text{ の } Q \text{ に } q \wedge r \text{ を代入}) \\ &\equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p) && (\text{与えられた分配律を用いた}) \\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) && (\text{交換律と同値なもので置き換え, 推移律}). \end{aligned}$$

ゆえに (推移律を使って)

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

## 例題 (続き)

(2)

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (r \wedge s) &\equiv (p \vee (r \wedge s)) \wedge (q \vee (r \wedge s)) \\ &\equiv ((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge ((q \vee r) \wedge (q \vee s)) \\ &\equiv (((p \vee r) \wedge (p \vee s)) \wedge (q \vee r)) \wedge (q \vee s) \\ &\equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)\end{aligned}$$

まず  $r \wedge s$  を一つの命題とみなして、(1) の問題文中の式

$$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r)$$

を使い、それから (1) の結果

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

を2回使い、結合律  $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$  を使い、かっこを省略した。

□

(急がないでゆっくり確かめることを勧めます。)

# 宿題 1

締め切り 5月25日(月) 13:30. 今回は締め切り後の提出も認める。  
解答を A4 サイズの PDF ファイルにして、Oh-o! Meiji で提出すること。

問題文は

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2020/toi1.pdf>

にあります (Oh-o! Meiji のレポート課題 1)。

出題の狙い:

PDF ファイルは、どういう方法で作成しても構わない。詳しいことは

「授業の提出物を PDF 形式で用意する方法」

[http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how\\_to\\_pdf/](http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/how_to_pdf/)