

同値関係

桂田 祐史

2013年7月18日, 2019年3月22日

(同値関係とは、何かと何かを「同じ」と見なし、クラス分けして議論するための数学的な枠組みである。)

この文書の内容を講義するのに2回の講義が必要である。

この節の原稿の最初のバージョンは佐藤篤之先生による。数学科後藤四郎先生の「代数学3」のテキスト等も参考にした。

(約束) $(\forall x \in X) (\forall y \in X)$ を短く $(\forall x, y \in X)$ と書くことがある。同様に $(\forall x \in X) (\forall y \in X) (\forall z \in X)$ を $(\forall x, y, z \in X)$ と書く。 \forall のかわりに \exists でも同様の省略を行なう。

1 二項関係

例 1.1 (ℝ 上の順序関係) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対し、 $x < y$ であるかどうか、定まっている。

例 1.2 (相等関係) A を集合とすると、 $\forall a, a' \in A$ に対し $a = a'$ であるかどうか、定まっている。 ■

例 1.3 (包含関係) 集合 A のべき集合 $2^A = \text{Pow}(A)$ の2元 B, C に対し、 $B \subset C$ であるかどうか、定まっている。 ■

例 1.4 (整除) 2つの整数 a, b に対して、 $b = na$ を満たす整数 n が存在するとき、 b は a の倍数である、あるいは a は b の約数であるといい、 $a \mid b$ で表す。整数全体の集合 \mathbb{Z} の2元 a, b に対して、 $a \mid b$ であるかどうか、定まっている。 ■

このように、空でない集合 X の任意の2元 x, x' に対し、 $x \sim x'$ であるかどうか定まっているとき、 \sim は X 上の**二項関係** (binary relation) である、という。

例 1.1 では $<$ は \mathbb{R} 上の、例 1.2 では $=$ は A 上の、例 1.3 では \subset は $2^A = \text{Pow}(A)$ 上の、二項関係である。

余談 1.5 (二項関係の集合の言葉を用いた定義) 空でない集合 X 上の二項関係とは、 $X \times X$ の部分集合 R のことである、と定義する。確かに $R \subset X \times X$ とするとき、 $x \sim y \stackrel{\text{def.}}{\iff} (x, y) \in R$ とすると、(上で説明した意味での) X 上の二項関係 \sim が得られる。 $(x, y) \in R$ のことを $x R y$ と表す場合もある:

$$x \sim y \iff (x, y) \in R \iff x R y.$$

集合 R を二項関係 \sim のグラフと呼ぶ。

例えば $X = \{a, b, c\}$ (a, b, c はどの二つも相異なる), $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}$ とすると、

$$a R a, \quad b R b, \quad c R c, \quad b R c, \quad c R b$$

だけが成り立ち、他 (例えば $a R b$) が成り立たない。 ■

2 同値関係

定義 2.1 (同値関係) 空でない集合 X 上の二項関係 \sim が次の (1), (2), (3) をみたすとき、 \sim を X 上の同値関係 (equivalence relation) と呼ぶ。

(1) $\forall x \in X$ に対し $x \sim x$. (反射律, reflexivity)

(2) $\forall x, y \in X$ に対し $x \sim y \Rightarrow y \sim x$. (対称律, symmetry)

(3) $\forall x, y, z \in X$ に対し $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. (推移律, transitivity)

$x \sim y$ のとき、 x と y は同値である、 x は y に同値である、という。

注意 2.2 1 つの集合上にも複数の同値関係が存在しうる。次の 2 つの極端な同値関係が例となる。

例 2.3 (自明な同値関係 (何とでも同値)) 任意の 2 元 $a, b \in A$ に対し $a \sim b$ と定めると、この \sim は A 上の同値関係である。■

例 2.4 (相等関係 (自分だけと同値)) 任意の集合上で相等関係 $=$ は同値関係である。■

数学では非常に多くの同値関係が登場するが、ここでは簡単なものをいくつか紹介 (思い出し?) する。

例 2.5 (図形の合同) 2 つの平面図形 A と B が合同 $A \cong B$ (A is congruent to B , A を平行移動・回転・裏返しなどして B に“重ねられる”) という関係は同値関係である。(図形の合同を表す記号には世界標準がなく、日本の学校数学では $A \equiv B$ と書くのが普通ですが、英語文化圏では $A \cong B$ と書くのだそうです) ■

例 2.6 (図形の相似) 2 つの平面図形 A と B が相似 $A \sim B$ (A is similar to B , A をスケールアップ (拡大, 縮小)・平行移動・回転・裏返しなどして B に“重ねられる”) という関係は同値関係である。(図形の相似を表す記号には世界標準がなく、日本の学校数学では $A \sim B$ と書くのが普通ですが、英語文化圏では $A \sim B$ や $A \parallel B$ と書くのだそうです。) ■

例 2.7 (自然数 n を法として合同) n は自然数とする。整数全体の集合 \mathbb{Z} 上の同値関係 \sim を次のように定める。

$$a, b \in \mathbb{Z} \text{ に対し、} a \sim b \stackrel{\text{def.}}{\iff} a - b \text{ は } n \text{ の倍数.}$$

$a \sim b$ はしばしば $a \equiv b \pmod{n}$ と書かれ、 a と b は n を法として合同である (a and b are congruent modulo n , a is congruent to b modulo n)、という。要するに、 a と b は n で割った余りが等しいとき、そのときに限り $a \sim b$ 。

この \sim が同値関係の 3 条件をみたすことを示す。

証明 $\forall a \in \mathbb{Z}$ に対して、 $a - a = 0 \cdot n$, $0 \in \mathbb{Z}$ なので $a \sim a$ 。ゆえに反射律が成り立つ。

$a \sim b$ とすると、 $(\exists j \in \mathbb{Z}) a - b = jn$ 。このとき $b - a = (-j)n$, $-j \in \mathbb{Z}$ であるから $b \sim a$ 。ゆえに対称律が成り立つ。

$a \sim b$, $b \sim c$ が成り立つ。 $(\exists j, j' \in \mathbb{Z}) a - b = jn$, $b - c = j'n$ 。このとき $a - c = (a - b) + (b - c) = (j + j')n$, $j + j' \in \mathbb{Z}$ なので $a \sim c$ 。ゆえに推移律が成り立つ。■

$a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$ とするとき、

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}, \quad ac \equiv bd \pmod{n}$$

が成り立つ。実際 $(\exists k, \ell \in \mathbb{Z}) a - b = km, c - d = \ell m$ ならば、

$$\begin{aligned}(a + c) - (b + d) &= (a - b) + (c - d) = (k + \ell)m, \\ ac - bd &= ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d) = kmc + b\ell m = (kc + b\ell)m, \\ k + \ell &\in \mathbb{Z}, \quad kc + b\ell \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

であるから。■

豆知識: TeX では、 $(\text{mod } n)$ を $\backslash\text{pmod } n$ と入力する。

例 2.8 (九去法) $10 \equiv 1 \pmod{9}$ であるから、自然数 n に対して、 $10^n \equiv 1 \pmod{9}$.

$$\begin{aligned}123456789 &= 1 \times 10^8 + 2 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10 + 9 \\ &= 1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \\ &\equiv 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 \equiv (1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) + 9 \\ &\equiv 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \equiv 0 \pmod{9}.\end{aligned}$$

これから 123456789 は 9 の倍数であることが分かる。同様に 987654321 も 9 の倍数である (数字をどう入れ替えても同じだ)。(電卓のない時代、等式の両辺を 9 で割った余りを計算して比較することで、検算することがあった。) ■

例 2.9 “一般角” を考えたとき、 2π の整数倍だけ違うものは同一視するのが便利なおことがある。 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \sim y \stackrel{\text{def.}}{\iff} (\exists n \in \mathbb{Z}) x - y = 2n\pi.$$

これが \mathbb{R} 上の同値関係になることの証明は、例 2.7 と同様なので省略する。

例えば $-\pi \sim \pi, \frac{9\pi}{4} \sim \frac{\pi}{4}$. また $x \sim y$ ならば $\cos x = \cos y, \sin x = \sin y, e^{ix} = e^{iy}$. ■

例 2.10 写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ により \sim を定める。この \sim は X 上の同値関係である。

証明 $\forall x \in X$ に対して、 $f(x) = f(x)$ より $x \sim x$.

$x, y \in X$ に対して、 $x \sim y$ が成り立つとする。 $f(x) = f(y)$ であるから、 $f(y) = f(x)$ なので、 $y \sim x$. ゆえに対称律が成り立つ。

$x, y, z \in X$ に対して、 $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とする。 $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ であるから、 $f(x) = f(z)$. ゆえに $x \sim z$. ゆえに推移律が成り立つ。■

問 1 ある人が「対称律があれば、 $x \sim y$ とするとき、 $y \sim x$. ここで推移律を用いると $x \sim x$ が導かれる。だから同値関係の定義で反射律は実は余分である。」と言った。正しいだろうか？

3 同値類と商集合

定義 3.1 (同値類) \sim を集合 X 上の同値関係とする。 $x \in X$ に対して

$$C(x) := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

を x の (属する) **同値類** (the equivalence class to which x belongs, the equivalence class of x) と呼ぶ。

同値関係を明示して、 x の同値関係 \sim についての同値類 (the equivalence class of x with respect to the equivalence relation \sim)、 x の \sim 同値類 (the \sim equivalence class of x) と呼ぶこともある。

$C(x)$ のことを $[x]$ や $[x]_{\sim}$ で表すことも多い。

$C(x)$ は X の部分集合である ($C(x) \subset X, C(x) \in 2^X$)。

例 3.2 (3 を法として合同という同値関係の同値類) (後でもっときちんとやるけれど、先走って例を) \mathbb{Z} 上の同値関係 \sim を $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$ で定めるとき、 $C(0) = \{3m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ (3 の倍数全体), $C(1) = \{3m + 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ (3 で割って 1 余る数の全体), $C(2) = \{3m + 2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ (3 で割って 2 余る数の全体), $C(3) = C(0)$, $C(4) = C(1)$, 逆方向に $C(-1) = C(2)$, $C(-2) = C(1)$ ($C(x)$ は x との差が 3 の倍数であるもの全体と考えると良い)。結局、相異なる同値類は $C(0), C(1), C(2)$ の 3 つだけである。 ■

例 3.3 (平面のベクトル) 平面上の線分があるとき、どちらかの端点を「始点」と呼び、もう一方 (「終点」と呼ぶ) と区別したものを**有向線分**という。 A を始点、 B を終点とする有向線分を「有向線分 AB 」と呼び、 \overrightarrow{AB} と表す。 X を平面上の有向線分の全体として、 X 上の二項関係 \sim を

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \quad \text{def:} \quad \text{“}\overrightarrow{AB} \text{ を平行移動すると } \overrightarrow{CD} \text{ に重なる”}$$

で定めたとき、 \sim は同値関係になる。この同値関係に関する同値類のことを**平面のベクトル**と呼ぶ。 ■

高校数学の教科書 (数研出版) から

有向線分は位置と、向きおよび大きさで定まる。その位置を問題にしないで、向きと大きさだけで定まる量を**ベクトル**という。

補題 3.4 X は集合で、 \sim は X 上の同値関係とする。

(1) $\forall x \in X$ に対して、 $x \in C(x)$. (ゆえに $C(x) \neq \emptyset$ である。)

(2) $\forall x, y \in X$ に対して、次の3条件は互いに同値である。

(i) $x \sim y$.

(ii) $C(x) = C(y)$.

(iii) $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$.

(3) $\forall x, y \in X$ に対して、次の3条件は互いに同値である。

(i) $x \not\sim y$.

(ii) $C(x) \neq C(y)$.

(iii) $C(x) \cap C(y) = \emptyset$.

証明 まず、 $\forall x, y \in X$ に対して、 $y \in C(x) \Leftrightarrow y \sim x$ を注意しておく。

(1) 反射律 $x \sim x$ より $x \in C(x)$.

(2) (i) \Rightarrow (ii) を示す。 $x \sim y$ と仮定する。 $C(x) \subset C(y)$ を示そう。 $z \in C(x)$ とすれば $z \sim x$, それと $x \sim y$ より $z \sim y$. ゆえに $z \in C(y)$. よって $C(x) \subset C(y)$. 対称律により $y \sim x$ が成り立つので (まったく同様に) $C(y) \subset C(x)$. よって $C(x) = C(y)$.

(ii) \Rightarrow (iii) を示す。 $C(x) = C(y)$ と仮定すると、 $C(x) = C(x) \cap C(y)$. (1) より $C(x) \neq \emptyset$ であるから、 $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$.

(iii) \Rightarrow (i) を示す。 $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ と仮定すると、 $z \in C(x) \cap C(y)$ を満たす z が存在する。このとき $z \sim x$ かつ $z \sim y$ なので、(対称律と推移律を用いて) $x \sim y$.

(3) これは (2) の対偶である。■

命題 3.5 (部屋分け, 類別) 集合 X 上の同値関係 \sim に対し

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x),$$

また

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X) \quad (C(x) = C(y)) \vee (C(x) \cap C(y) = \emptyset)$$

が成り立つ。

授業では、集合 X を分割した図を板書すること。各クラスは同じ大きさであるとは限らない。 x と同じクラスに y があり、違うクラスに y' があり、 $C(x) = C(y)$, $C(x) \neq C(y')$, $C(x) \cap C(y') = \emptyset$ と書いておく。

証明 $\forall x \in X$ に対して、 $C(x) \subset X$ であるから、 $\bigcup_{x \in X} C(x) \subset X$. 一方、 $\forall x' \in X$ に対して、

$x' \in C(x')$ であるから、 $x' \in \bigcup_{x \in X} C(x)$. ゆえに $X \subset \bigcup_{x \in X} C(x)$.

後半は、まず明らかに「 $(C(x) = C(y))$ または $C(x) \neq C(y)$ 」で、前命題 (3) の (ii) \Leftrightarrow (iii) により、 $C(x) \neq C(y) \Leftrightarrow C(x) \cap C(y) = \emptyset$. ■

定義 3.6 (商集合) 集合 X と、 X 上の同値関係 \sim があるとき、同値類全体の集合

$$X/\sim := \{C(x) \mid x \in X\}$$

を X の \sim による**商集合** (the quotient set of X by \sim) と呼ぶ。

各 $x \in X$ に $C(x) \in X/\sim$ を対応させることで定まる写像

$$q: X \rightarrow X/\sim, \quad q(x) = C(x) \quad (x \in X)$$

を**商写像** (quotient map) あるいは**標準的全射** (canonical surjection) と呼ぶ。 q を X/\sim への**標準的射影** (the canonical projection map to X/\sim) と呼び、 π と書くことも多い。

$C \in X/\sim$ に対して、 $C = C(x)$ を満たすような x を C の**代表元** (a representative of C) と呼ぶ。

$\forall x \in X$ に対して、 $C(x) \subset X$ すなわち $C(x) \in 2^X$ であるから、 $X/\sim \subset 2^X$ である。

C の「代表元」 x というと、何か特別なニュアンスを感じる人がいるかもしれないが、 $C = C(x)$ さえ満たすならば、 x は C の代表元と呼ばれる (何でも構わない)。英語では the representative でなくて a representative であることに注意。

例 3.7 (クラス分け) $X = 2014$ 年度明治大学現象数理学科 1 年生全体の集合 とする。2 つの組があつて、“1 組” には T.K. 君、K.S. 君、… がいる。“2 組” には T.T. 君、T.F. 君、… がいる。 $x \sim y$ を x と y は同じ組に属することと定義する。 \sim は X 上の同値関係である。 $C(\text{T.K. 君}) = C(\text{K.S. 君})$, $C(\text{T.T. 君}) = C(\text{T.F. 君})$ はともに X の部分集合である。それぞれ 1 組、2 組という名前がついている。組を指定するには、誰でも良いから所属する学生を一人選べば良い。T.F. 君の所属する組と言え、2 組のことであると分かる。

$$1 \text{ 組} \neq 2 \text{ 組}, \quad 1 \text{ 組} \cap 2 \text{ 組} = \emptyset, \quad 1 \text{ 組} \cup 2 \text{ 組} = X.$$

$$X/\sim = \{1 \text{ 組}, 2 \text{ 組}\}. \blacksquare$$

次の例は、その例自体が応用上重要であるだけでなく、代数系 (群、環、 R 加群、多元環、線型空間、…) を何かで割って別の代数系を作る、という非常に基本的かつ重要な操作の例としても重要である。

例 3.8 (n を法とする剰余系) n を自然数とする。 \mathbb{Z} 上の同値関係 $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ は n の倍数、を考える。 \mathbb{Z} の \sim による商集合を \mathbb{Z}/n と表す。また a の属する同値類 $C(a)$ を $[a]$ と表す。 $[a]$ を、 n を法とする**剰余類** (residue class modulo n) という。このとき

$$\mathbb{Z}/n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

である。 \mathbb{Z}/n を n を法とする**剰余系** (complete residue system) あるいは、 n を法とする**剰余類環** (residue class ring modulo n) という。

具体的に、 $n = 3$ の場合を書いてみると

$$\mathbb{Z}/3 = \{[0], [1], [2]\},$$

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 0\} = \{3j \mid j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},$$

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 1\} = \{3j + 1 \mid j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \sim 2\} = \{3j + 2 \mid j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}.$$

さらに \mathbb{Z}/n の任意の 2 元 A, B に対し、それぞれ代表元 a, b を取って (つまり $A = [a]$, $B = [b]$) となるような a, b 、

- 和 : $A + B := [a + b]$,
- 積 : $A \cdot B := [ab]$

と定義する。 A, B に対して $A = [a], B = [b]$ となる a, b の取り方は (一般には) 複数ありえるので、 $[a + b]$ と $[ab]$ が取り方によらずに定まることを確認する必要がある。このようなことは非常にしばしば生じるので、「 $A + B, A \cdot B$ は well-defined である」と言うことになっている。

(その証明) $A = [a] = [a'], B = [b] = [b']$ であるならば

$$[a + b] = [a' + b'], \quad [ab] = [a'b']$$

を示せばよい。 $a - a' = in, b - b' = jn$ とすれば

$$(a + b) - (a' + b') = (i + j)n,$$

また

$$ab - a'b' = (a - a')b + a'(b - b') = ibn + a'jn = (ib + a'j)n$$

であるから、 $a + b \sim a' + b', ab \sim a'b'$. ゆえに $[a + b] = [a' + b'], [ab] = [a'b']$. ■

$\mathbb{Z}/3$ では、

$$\begin{aligned} [0] + [0] &= [0], & [0] + [1] &= [1] + [0] = [1], & [0] + [2] &= [2] + [0] = [2], \\ [1] + [1] &= [2], & [1] + [2] &= [2] + [1] = [0], \\ [2] + [2] &= [1]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0] \cdot [0] &= [0], & [0] \cdot [1] &= [1] \cdot [0] = [0], & [0] \cdot [2] &= [2] \cdot [0] = [0], \\ [1] \cdot [1] &= [1], & [1] \cdot [2] &= [2] \cdot [1] = [2], \\ [2] \cdot [2] &= [1]. \end{aligned}$$

\mathbb{Z}/n は和、差、積が定義できるが、商は一般には定義されない。 n が素数であるときは $[0]$ 以外の同値類で割る商も定義され、 \mathbb{Z}/n は体となる。

命題 3.9 p を素数、 m は p の倍数でないとする。このとき $km + lp = 1$ をみたす整数 k, l が存在する。(実は仮定を「 m と p が互いに素ならば」と弱く出来る。)

証明 \mathbb{Z}/p で p 個の元 $[0], [m], [2m], \dots, [(p-1)m]$ を考えると、これらはすべて相異なる元である。実際、もしある $0 \leq i < j \leq p-1$ について $[im] = [jm]$ が成り立つとすると $(j-i)m = kp$ をみたす $k \in \mathbb{Z}$ が存在するが、 $j-i \in \{1, \dots, p-1\}$ と m はともに p の倍数ではないので矛盾する。

したがって $[km] = [1]$ となる k ($1 \leq k \leq p-1$) が存在する。このとき $km - 1$ が p の倍数となるので $km + lp = 1$ をみたす $l \in \mathbb{Z}$ が存在する。 ■

注意 3.10 (1) p が素数でなくても、 p と m が互いに素 (最大公約数が 1) であれば、 $km + lp = 1$ をみたす整数 k, l は存在する。(以下余談) これは通常はユークリッドの互除法を用いて証明される。高等学校の新課程では数学 A の「整数の性質」で学ぶことになっている。一般に与えられた整数 m と p に対して、 m と p の最大公約数 d と $km + lp = d$ を満たす整数 k, l を求めることは重要で、Mathemaitca ではそれを計算するための関数 `ExtendedGCD[]` が用意されている。 `ExtendedGCD[m,p]` とすると、 m と p の公約数 d と $km + lp = d$ を満たす整数 k, l が $\{d, \{k, l\}\}$ というリストで返される。

(2) 上の命題により p が素数のとき \mathbb{Z}/p の $[0]$ でない任意の元 $[m]$ は $[k][m] = [1]$ をみたす元 $[k]$ を持つ (積の逆元) ことが分かった。結局 $[0]$ でない任意の元で割算が出来る。このような代数系を**体** (field) という。すなわち \mathbb{Z}/p は (有限) 体である。■

問 2 $\mathbb{Z}/5$ の $[0]$ 以外の元 $[1], [2], [3], [4]$ について、それぞれ積の逆元を求めよ。

解答コーナー

問 1 の解説 正しくない。注目している x に対して、 $x \sim y$ となる y が存在することは仮定されていない。極端な例として、空でない集合 X の任意の二元 x, y に対して、 $x \sim y$ は成り立たない、として定義される二項関係 \sim は、推移律と対称律を満たすが、反射律は満たさない。あるいは $X = \{a, b\}$ 上の二項関係 \sim を $b \sim b$ だけ真、他はすべて偽 ($a \not\sim a, a \not\sim b, b \not\sim a$) としても、対称律と推移律は満たされるが、反射律は満たされない。■

参考文献