数理リテラシー 宿題 No. 6 (2018 年 5 月 30 日出題, 6 月 4 日 13:30 レポート BOX に提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も利用可)

問 5 残り (1) A を集合とするとき、2^A の定義を書け。またそれを何と呼ぶか答えよ。
(3) $A=\{1,2,3\}$ とするとき、2^A を求めよ (外延的に表せ — 要素を全部書け)。
(4) a はある実数とする。$A=\{a\}$ のとき、$B=2^A$, $C=2^B$ を求めよ。

問 6 (0) 各自然数 n に対して集合 A_n が与えられているとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ は何か。定義を記せ。

任意の自然数 n に対して $A_n := \left\{x\in\mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < n\right\}$ とする。以下の (1), (2), (3) に答えよ。

(1) A_1, A_2, A_3 を数直線上に表示せよ。

(2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明にチャレンジして欲しいが、出来なくても結果だけでも書いてみよう)。

(3) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ を求めよ (証明に…同上)。

問 5 残り

(1) $2^A = \{C \mid C \subset A\}$. A の冪集合 (ベキ集合) と呼ぶ。(C は他の記号と重複しない限り何でも可。)

(3) $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$.

(4) $B = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$, $C = 2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}$.

(過去の例から、(4) の C のような問題で間違える人が多い。$p := \emptyset$, $q := \{a\}$ とおくと、$B = \{p, q\}$ であるから、$C = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ であることは容易に分かる。これに p, q を代入すると良い。)

問 6 解答 訂正しました。そこは赤で書きます。

(0) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\}$.

(1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$, $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$, $A_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{3} < x < 3\right\}$.

図は省略しますが、高校で不等式の表す範囲を図示するのを習ったと思います。それをすれば良いです。

(2) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}$.

右辺の集合は、区間を表す記号を用いて $(-1, \infty)$ とも書ける。以下では簡単のためにそうする。

(証明)

- $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とすると、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. ゆえに $-\dfrac{1}{n} < x < n$. $n \geq 1$ であるから、$\frac{1}{n} \leq 1$. ゆえに $-1 \leq -\dfrac{1}{n}$ であるから、$-1 < x$. ゆえに $x \in (-1, \infty)$.
- $x \in (-1, \infty)$ とすると $x > -1$. 場合分けをする。
  - (i) もしも $x \leq 0$ ならば $-1 < x \leq 0$ であるから、$x \in A_1$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
  - (ii) もしも $x > 0$ ならば、アルキメデスの公理から、ある自然数 n が存在して、$n \cdot 1 > x$. このとき $0 < x < n$ であるから、$x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

  (i), (ii) から、$x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(3) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$.

(証明)

- $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。
  - (i) 特に $x \in A_1$ であるから、$x < 1$.
  - (ii) 実は $x \geq 0$ である。もしもそれが成り立たないとすると、$x < 0$. $-x > 0$ であるから、アルキメデスの公理によって、ある自然数 n が存在して、$n(-x) > 1$. これから $x < -\dfrac{1}{n}$. ゆえに $x \notin A_n$. これは ($x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と) 矛盾である。ゆえに $x \geq 0$.

  (i), (ii) から $x \in [0, 1)$.
- $x \in [0, 1)$ とすると、$0 \leq x < 1$. 任意の自然数 n に対して、$-\dfrac{1}{n} < 0$ かつ $1 \leq n$ であるから、$-\dfrac{1}{n} < x < n$. すなわち $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ■

おまけ　実は一般に次が成立する (増加、減少の場合は比較的考えやすい)。

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n \subset A_{n+1}$ ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

(b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n \supset A_{n+1}$ ならば、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.

一つ証明してみる。

(a) の証明　$x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とするとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x \in A_n$. 特に $n = 1$ として $x \in A_1$.

$x \in A_1$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n$. ゆえに $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ■

単調でない場合は難しめ。問 6 は、原点の右側は単調に大きくなり、左側は単調に小さくなる、というわけで、少し難しめ。

練習　(1) $A_n = (-1/n, 1/n)$ の合併集合は $A_1 = (-1, 1)$, 共通部分は $\{0\}$.
(1)' $A_n = [-1/n, 1/n]$ の合併集合は $A_1 = [-1, 1]$, 共通部分は $\{0\}$.
(2) $A_n = [-n, n]$ の合併集合は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, 共通部分は $A_1 = [-1, 1]$.
(2)' $A_n = (-n, n)$ の合併集合は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, 共通部分は $A_1 = (-1, 1)$.
$(1/n, n)$ とか、$(-1/n, n)$ とか、種は尽きない。
(3) $A_n := \left[-n, -\frac{1}{n}\right]$ の合併集合は $(-\infty, 0)$, 共通部分は $\{-1\}$.