# Part III. 写像

桂田 祐史

2013 年 5 月 11 日, 2018 年 7 月 11 日

(もともと自分の講義をするためのノートと言うこともあって)、テキストとして使うにはまだまだ推敲不十分だと考えていますが[1]、参考になるだろうと考えて公開しています。— まあ、これは説明が雑なことの言い訳ですね。

あちこちに「余談」が出て来るけれど、それは時間に余裕があって気が向けば話そうかくらいのものなので、スキップして構いません。

## 目 次



## 1 はじめに

集合と写像は、現代の数学にとって、両輪をなす基礎概念と言える。写像 (a mapping, a map) というのは、中学・高等学校で学ぶ関数 (function) を少し (?) 一般化した概念である。大雑把に言って、数以外のものを扱えるように関数を一般化したものが写像である。

[1]例や図は、その場、その日のアドリブと言うものが多く、ここには書いてない一方で、細かいことをブツブツ書いてあったりします。

**関数は写像である**

**写像には (高校数学で言う) 関数以外のものもある**

**例 1.1 (こんなのも写像)** $X = \{$ カレー, ミートソース, うな丼 $\}, Y = \{$ コーンスープ, みそ汁 $\}$ が集合として確定している (ただし、カレー、ミートソース、うな丼は相異なる) と仮定して、

$$f(\text{カレー}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{ミートソース}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{うな丼}) = \text{みそ汁}$$

とすると、写像 $f\colon X \to Y$ が定まる。■

**余談 1.2 (関数という言葉をとても広い意味で使うことがある — あくまで余談)** 実は、現在の大学の数学のテキストでは、関数の定義について、次の二つの立場がある。

(1) 関数は (定義域や終域が数や数ベクトルの集合という) 特別な写像である。
(こじつけになるけれど[2]、関数とは数に関わる写像のことである。)

(2) 関数と写像とは名前が違うだけで、まったく同じものである。定義域や終域が数の集合でなくても関数という。

この講義で採用した教科書 (中島 [1]) では、(1) の立場を取っている。この文書でも、その立場を取る。

**高校での関数、写像**

今の高校数学には、写像が出て来ない (らしい)。しかし定義域、値域、合成関数などの言葉はある。
　実は、写像は、以前は高等学校で教えられていたこともあり、大学数学の少し古めの教科書では、そのことを仮定して書かれている場合もある。

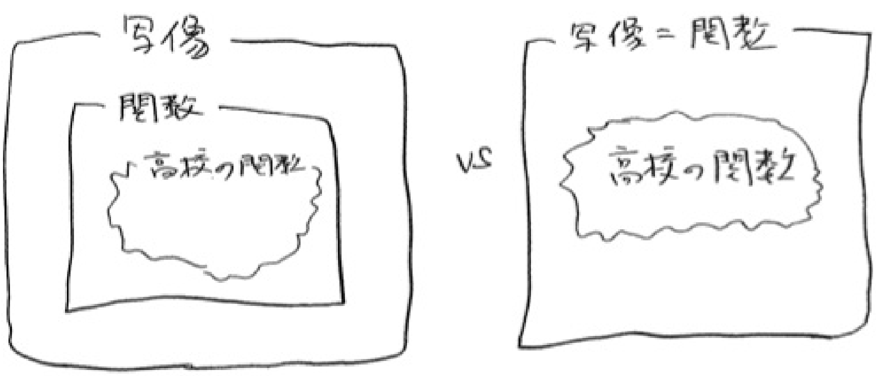


図 1: この絵が分かるようになって欲しい (一応は左の立場で説明する)

# 2 写像とは何か

## 2.1 写像, 定義域, 終域, 値域の定義

集合を用いた写像の現代的な定義は、やや分かりにくいと思われるので後まわしにして (余談 2.4)、ここでは、まずは素朴な定義を述べる。

[2]function は、本来は函数という訳語が正しいのだそうで、関数というのは当て字なのだそうです。そういう意見をお持ちの先生からすると、「数に関わる」なんてのは、ひどいこじつけでしょう。すみません。

$X$ と $Y$ を集合とする。$f$ が $X$ から $Y$ への写像であるとは、$X$ の各々の (任意の) 要素 $x$ に対応して、$Y$ の要素 $f(x)$ がただ一つ定まることをいう。

$f$ が $X$ から $Y$ への写像であることを、$f\colon X \to Y$, あるいは $X \xrightarrow{f} Y$ と表す。

やや古めの本には、$X$ から $Y$ <u>の中</u>への**写像**, という言い方もある。

「$f\colon X \to Y$」を「$X$ から $Y$ への写像 $f$」と読むべき場合も多い。

二つの写像 $f_1\colon X_1 \to Y_1$ と $f_2\colon X_2 \to Y_2$ が等しいとは、

$$(X_1 = X_2) \wedge (Y_1 = Y_2) \wedge ((\forall x \in X_1) f_1(x) = f_2(x))$$

が成り立つことを言う[3]。

$f(x)$ のことを、$f$ による $x$ の**像** (the image of $x$ under $f$), $f$ の $x$ における**値** (the mapping value at $x$) と呼ぶ。英語では、$f(x)$ を "$f$ of $x$" と読む。

$f$ により $x$ が $y$ に対応することを、$f\colon x \mapsto y$ とも表す。$f\colon x \mapsto y$ は、$y = f(x)$ と同じ意味である。

$X$ を写像 $f$ の**定義域** (the domain of $f$, the domain of definition of $f$) と呼ぶ。他に始域, 始集合, source set などと呼ぶこともある。(有名なブルバキ [3] では、$X$ に名前を与えていない。)

ところが、$Y$ には定着した名前がない[4]。教科書 (中島 [1]) では、$Y$ のことを「$f$ のレインジ」と呼んでいるが、range は以下で紹介する値域の訳語にふさわしい言葉なので、この講義では採用しない。この講義では $Y$ のことを「$f$ の**終域**」と呼ぶことにしておく。レインジにしても終域にしても、この講義の外で名前を呼ぶ必要が生じた場合は、「この $Y$ のことを $f$ の◯◯と呼ぶことにします」と断った方が良い。

$X$ の任意の部分集合 $A$ に対して、

$$f(A) := \{y \mid (\exists x \in A)\ y = f(x)\} \qquad (\text{これは } \{f(x) \mid x \in A\} \text{ とも書く})$$

とおき、$A$ の $f$ による**像** (the image of $A$ under $f$) と呼ぶ。特に、定義域 $X$ の $f$ による像

$$f(X) = \{y \mid (\exists x \in X)\ y = f(x)\} \qquad (\text{これは } \{f(x) \mid x \in X\} \text{ とも書く})$$

のことは単に $f$ の像 (the image of $f$) あるいは $f$ の**値域** (the range of $f$) と呼ぶ。

高校数学で学ぶ関数の値域は、関数を写像とみなした場合、ここで言う値域と一致すると考えて良い[5]。

**値域は色々な表現がある**

$$f\text{ の値域} = f\text{ の像} = f\text{ による } X \text{ の像} = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \mathrm{Image}(f).$$

**注意 2.1 (細かい注意)** $f$ を写像と言うけれども、定義域 $X$, 終域 $Y$, 対応 $f$, 3 つの組をまとめて写像と考えた方が良い。単に「写像 $f$」としか書いていなくても、$X$ と $Y$ が何であるかの情報が付いている (決まっている) と考えるべきである。■

[3] このうち $Y_1 = Y_2$ を要求しない流儀もある。例えば河田・三村 [2]。

[4] 英語の場合は、domain (定義域) に対応した codomain (強いて訳すと余域？) が良く使われているようである (target set という呼び方もあるが、これは source set と対になるのであろう)。日本語では、メジャーと言えるものがない。終集合というのがあるが、これは始集合と対になる言葉で、グラフの話をする場合は良く使われるようだが、定義域とは合わないように思う。

[5] 高校数学で「この関数の値域を求めよ」と言ったとき、不等式で書いた条件を答えとしてあったりするので、同じであると厳密には言えないかもしれない。大学の数学で値域と言えば集合であって、集合を定める条件ではない。つまり、例えば $1 \le y \le 2$ であれば、$\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y \le 2\}$ と書くべきである。

**例 2.2 (写像とは式のことではない — 異なる式で同じ写像が定義されることもある)** これは教科書 (中島 [1]) にあるものです。$X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5\}$ のとき、$f\colon X\to Y$ をすべて求めよう。$x=1,2,3$ に対する $f(x)$ を指定すれば $f$ が定まる。次の 8 つ $f_j$ $(j=1,2,\cdots,8)$ がある。

| | $f_j(1)$ | $f_j(2)$ | $f_j(3)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 4 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 4 |
| 4 | 4 | 5 | 5 |
| 5 | 5 | 4 | 4 |
| 6 | 5 | 4 | 5 |
| 7 | 5 | 5 | 4 |
| 8 | 5 | 5 | 5 |

例えば

$$f_2(1)=4,\quad f_2(2)=4,\quad f_2(3)=5.$$

$g(x):=\max\{x+2,4\}$ で $g\colon X\to Y$ を定めると

$$g(1)=\max\{1+2,4\}=4,\quad g(2)=\max\{2+2,4\}=4,\quad g(3)=\max\{3+2,4\}=5.$$

$h(x):=\left[\frac{x+7}{2}\right]$ で $h\colon X\to Y$ を定めると

$$h(1)=\left[\frac{8}{2}\right]=4,\quad h(2)=\left[\frac{9}{2}\right]=4,\quad h(3)=\left[\frac{10}{2}\right]=5.$$

結局、$f_2$, $g$, $h$ は、みな等しい:

$$f_2=g=h.$$

写像の相等は上で定義したように、定義域 $X$, 終域 $Y$, 写像の値の 3 つがそれぞれ一致することで、$f(x)$ を定義する式が一致することではないことに注意する (そもそも $f_2$ は、$f_2(x)$ の式で与えていない)。■

**余談 2.3 (写像は規則？)** 時々、$X$ の各々の要素 $x$ を、$Y$ のただ一つの要素に対応させる規則のことを、$X$ から $Y$ への写像という、と説明する人がいる (私も授業で口を滑らせることがある)。しかし「規則」は誤解を招きかねない表現である、と私は考えている。「規則」とは、例えば式のように、値を求めるための手順を明確に説明したもののことだ、と受け取られる可能性がある。しかし、規則 (式) が異なっても同じ写像が定義される場合がある、ということは、写像を規則そのものと考えるべきではない、ということになる。

それとは別に、写像が定まることは分かっても、「規則があるなら規則を書け」というツッコミに答えられない場合が多いことを指摘しておく。例えば微分方程式の問題では、解 (それは関数である) が一意的に存在するが、それを具体的な式で書くことは不可能である、という状況が非常にしばしばある。■

**余談 2.4 (集合の言葉による写像の定義)** 上の写像の定義はいかにも曖昧である。実は現代の数学では、集合を用いて、次のように写像を定義する。

2 つの空でない集合 $X$ と $Y$ の直積集合 $X \times Y$ の部分集合 $f$ が

(i) $(\forall x \in X)\ (\exists y \in Y)\ (x, y) \in f$. (任意の $x$ に対応する $y$ が存在する)

(ii) $(\forall (x_1, y_1) \in f)\ (\forall (x_2, y_2) \in f)\ x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$. (一つの $x$ に対応する $y$ は 1 つしかない)

を満たすとき、$f$ を $X$ から $Y$ への写像と呼び、$x \in X$ に対して $(x, y) \in f$ となる $y \in Y$ (これは一意的に存在する) を $f(x)$ と表す。

この定義の $f$ $(\subset X \times Y)$ は、いわゆる関数のグラフである。グラフは集合なので、すでに学んだ集合に関する記号で記述することが出来る。■

## 2.2 高校数学の関数を写像とみなす

1. 高校では、$f(x) = x$ の式, を書いて「$f(x)$ は関数である」、と言うことが多い。確かに各々の $x$ に対して、1 つの $f(x)$ が定まる。

2. $f(x) = x$ の式 があるとき、それに加えて、定義域 $X$, 終域 $Y$ を定めれば写像と見なせる。

   (a) $X$ は明記されていないことが多いが、その場合は、$X$ を $f(x)$ が意味を持つようなすべての実数 $x$ の集合とする、のが不文律らしい。

   (b) $Y$ については言及されていることはまれ。写像の定義をするために $Y$ が必要な場合、$f$ の値域を含む $Y$ を選べばよい。$f$ の値域を決定するのは面倒な場合もあるが、とにかく $f(x) \in \mathbb{R}$ であるから、とりあえず $Y = \mathbb{R}$ としておけば良い。

"高校数学の関数" に、$X$ と $Y$ を付記すれば、めでたく (この教科書での) 関数になる。

**例 2.5** 以下のすべてで $Y = \mathbb{R}$ とする。

$f(x) = x^2 + 2x + 3$, 確かに $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$ とすれば OK (写像 $f\colon X \to Y$ が得られた).

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, 確かに $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とすれば OK.

$f(x) = \sqrt{x}$, 確かに $\forall x \in [0, \infty)$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$, $X = [0, \infty)$ とすれば OK.

$f(x) = \log x$, 確かに $\forall x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$, $X = (0, \infty)$ とすれば OK.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}.\ \text{これは } X = \mathbb{R}$$

定義域はなるべく大きい集合という暗黙のルール (?) で決めた。■

**注意 2.6** 終域 $Y$ の取り方には自由度のある場合が多いが、値域は 1 つに定まる。高校数学でも「値域を求めよ」という問題はあった。■

関数とは？この教科書 (中島 [1]) の立場は、

**関数とは写像 (の 1 種) で、定義域 $X$ と 終域 $Y$ が $\mathbb{R}^N$ の部分集合であるもののこと**

(定義域は不問で、終域だけ $\mathbb{R}^N$ の部分集合とする、つまり写像の値が数または数ベクトルである場合に関数と呼ぶ、という流儀もある。)

## 2.3　色々な写像の例

**例 2.7 (恒等写像)** $X$ を空でない集合とするとき、$\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を $\mathrm{id}_X(x) = x$ $(x \in X)$ で定める。これを $X$ の**恒等写像** (the identity mapping of $X$) と呼ぶ。 ■

**例 2.8 (Dirichlet の関数)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

例えば $f(1) = 1$, $f(1/2) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 0$, $f(\pi) = 0$. この $f$ を **Dirichlet(ディリクレ) の関数**と呼ぶ。 ■

**例 2.9 (射影)** $X, Y$ が集合であるとき、直積集合 $X \times Y$ が定義できる。

$\mathrm{pr}_1\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_1(x, y) = x$.
$\mathrm{pr}_2\colon X \times Y \to Y$, $\mathrm{pr}_2(x, y) = y$.

要するに、$\mathrm{pr}_j$ は第 $j$ 成分を取り出す写像である。それぞれ $X$ への**射影(しゃえい)**、$Y$ への射影と呼ぶ。■

**例 2.10 ($\mathbb{R}^2$ の 1 次変換)** $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$ とするとき、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を以下のように定める。$f(x, y) = (x', y')$ として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした $f$ を $\mathbb{R}^2$ の **1 次変換**という。$ad - bc \neq 0$ のとき、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に)、平面全体を平面全体に写す。合同な変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。■

**問 1.** $ad - bc \neq 0$ のとき、$f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy) \in \mathbb{R}^2$ は全単射であることを示せ。

**例 2.11** $X :=$ 平面内の多角形全体の集合, $Y := \mathbb{R}$, $f(A) := A$ の面積, として、$f\colon X \to Y$ が定まる。■

**例 2.12 (微分)** $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への $C^\infty$ 級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。$X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$ が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし $f'$ は $f$ の導関数とする。■

**例 2.13 (定値写像)** $X, Y$ は空でない写像で、$c \in Y$ とするとき、$f\colon X \to Y$ を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような $f$ を**定値写像** (constant map)、**定数写像**と呼ぶ。 ■

**例 2.14 (特性関数)** $X$ は空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この $\chi_A$ を $A$ の**特性関数** (the characteristic function of $A$) または**定義関数**と呼ぶ。 ■

**例 2.15 (包含写像)** $X \subset Y$ のとき、$i\colon X \to Y$ を $i(x) = x$ $(x \in X)$ で定める。この $i$ を **包含写像**(ほうがんしゃぞう)(the inclusion map) と呼ぶ。■

**問 2.** 例 2.7〜2.15 の写像の値域は何か答えよ。

**例 2.16 (数列)** 実数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

は、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

と見なせる。■

# 3 合成写像

合成関数の概念は自然に写像にも拡張できる。

**定義 3.1 (合成写像)** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とするとき、

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で $h\colon X \to Z$ が定められる (模式的な図を描こう)。この $h$ を $f$ と $g$ の**合成** (the composition of $f$ and $g$), あるいは**合成写像** (the composite mapping) と呼び、$g \circ f$ で表す:

$$g \circ f\colon X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

時々 $g \circ f$ を単に $gf$ と書くこともある。また $\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n\text{ 個}}$ を $f^n$ と書くこともある。

**命題 3.2 (合成写像に関する結合律)** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ とするとき、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**証明** $g \circ f\colon X \to Z$ で、$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in X)$ である。ゆえに $h \circ (g \circ f)\colon X \to W$ で、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、$h \circ g\colon Y \to W$ で、$(h \circ g)(y) = h(g(y))$ $(y \in Y)$ である。ゆえに $(h \circ g) \circ f\colon X \to W$ で、

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

**問 3.** $f\colon X \to Y$ とするとき、

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \quad \mathrm{id}_Y \circ f = f$$

が成り立つことを示せ。

# 4　単射, 全射, 全単射

**定義 4.1 (単射, 全射, 全単射)**

(i) $f\colon X\to Y$ が**単射**(たんしゃ)(an injection, 形容詞は injective) あるいは **1 対 1** (one to one) であるとは、

$$(\sharp)\qquad (\forall x\in X)(\forall x'\in X)\quad (x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x'))$$

が成り立つことを言う。

(ii) $f\colon X\to Y$ が**全射**(ぜんしゃ)(a surjection, 形容詞は surjective) あるいは**上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(\flat)\qquad (\forall y\in Y)\,(\exists x\in X)\quad y=f(x)$$

が成り立つことを言う。

(iii) $f\colon X\to Y$ が**全単射**あるいは**双射** (a bijection, 形容詞は bijective) あるいは **1 対 1 対応** (one-to-one correspondence) であるとは、$f$ が全射かつ単射であることを言う。

**問 4.** (1) $f\colon X\to Y$ が単射でないことを論理式で表わせ。　(2) $f\colon X\to Y$ が全射でないことを論理式で表わせ。

条件 ($\sharp$) は

$$(\forall x\in X)(\forall x'\in X: x\neq x')\quad f(x)\neq f(x')$$

と書くことも出来る。また、この条件 ($\sharp$) は

$$(\forall x\in X)(\forall x'\in X)\quad (f(x)=f(x')\Rightarrow x=x')$$

と同値である ($x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$ の対偶は、$f(x)=f(x')\Rightarrow x=x'$ であるから)。

条件 ($\flat$) は

$$Y=f(X)$$

とも書ける。実際 (一般に $f(X)\subset Y$ が成り立つことに注意すれば)

$$\begin{aligned}(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\quad y=f(x)\quad &\Leftrightarrow\quad Y\subset f(X)\\ &\Leftrightarrow\quad Y=f(X).\end{aligned}$$

ここで図を描いて説明する。

- 写像が単射であるとは、2 つの矢が刺さらないこと (矢は 1 つの的にしか刺さっていない)。
- 写像が全射であるとは、すべての的に矢が刺さっていること。

**余談 4.2 ($'$ の読み方)** 日本の高校では、$x'$ を「エックス ダッシュ」と読むのが普通だが、英語では “x prime” 「エックス プライム」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “–” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う (この二つのダッシュの使い分けは結構難しい…脱線になるけど)。■

**例 4.3** $X =$ ある時点での明治大学の学生全体, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ 学生 $x$ の学生番号 とするとき、$f$ は単射である。(もしそうでないと、学生番号の役目を果たさないので、単射になるように決めてあるはず。) ■

**例 4.4 (狭義単調ならば単射)** 実軸上の区間 $I$ で定義された実数値関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ が、狭義単調増加であるとは、

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

を満たすことを言う。また、$f$ が狭義単調減少であるとは、

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X) \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

を満たすことを言う。

狭義単調加関数、狭義単減少関数は単射である。例えば $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ は単射である。■

**問 5.** 狭義単調増加関数は単射であることを示せ。

**問 6.** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ は狭義単調増加であることを示せ。

**例 4.5** $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$ を以下のように定義する。

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$
- $f_2\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$
- $f_3\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_3(x) = x^2$
- $f_4\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_4(x) = x^2$

$f_1$ は単射でない。実際、$x = -1$, $x' = 1$ とおくとき、$x \ne x'$ かつ $f_1(x) = f_1(x')$ が成り立つ。同様にして、$f_3$ も単射ではない。

一方、$f_2$ は単射である。実際、$f_2'(x) = 2x > 0$ $(x \in (0, \infty))$ であるから、$f_2$ は $[0, \infty)$ で狭義単調増加であるので、単射である。同様にして、$f_4$ も単射である。

$f_1$ は全射でない。実際、$y = -1$ とおくとき、$y \in \mathbb{R}$ であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$f_1(x) = x^2 \geq 0 > -1 = y$ であるから、$f_1(x) \neq y$. 同様にして、$f_2$ も全射ではない。

一方、$f_3$ は全射である。実際、$[0, \infty)$ に属する任意の $y$ に対して、$x := \sqrt{y}$ とおくと、$x \in [0, \infty] \subset \mathbb{R}$ であり、$f_3(x) = x^2 = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. 同様にして、$f_4$ も全射である。

まとめると、

| 関数 | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | × | × | × |
| $f_2$ | ○ | × | × |
| $f_3$ | × | ○ | × |
| $f_4$ | ○ | ○ | ○ |

となる。■

**例 4.6**

- $X$ を空でない集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ は全単射である。

  実際、$x_1, x_2 \in X$ に対して、$\mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2)$ ならば、$x_1 = x_2$ が成り立つので、$\mathrm{id}_X$ は単射である。

また、任意の $y \in X$ に対して、$x := y$ とおくと、$x \in X$ であり、$\mathrm{id}_X(x) = x = y$ であるから、$\mathrm{id}_X$ は全射である。

以上から、$\mathrm{id}_X$ は全単射である。

- $\emptyset \neq X \subset Y$ とするとき、包含写像 $i\colon X \to Y$ は単射である。
- 空でない集合 $X, Y$ に対して、射影作用素 $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$ は全射である。■

**定理 4.7 (合成写像と単射性、全射性)** $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ とする。

(1) $f$ と $g$ が単射ならば、$g \circ f$ は単射である。

(2) $f$ と $g$ が全射ならば、$g \circ f$ は全射である。

(3) $f$ と $g$ が全単射ならば、$g \circ f$ は全単射である。

(4) $g \circ f$ が単射ならば、$f$ は単射である。

(5) $g \circ f$ が全射ならば、$g$ は全射である。

(6) $g \circ f$ が単射でも、$g$ は単射とは限らない。

(7) $g \circ f$ が全射でも、$f$ が全射とは限らない。

(8) $g \circ f$ が単射かつ $f$ が全射ならば、$g$ は単射である。

(9) $g \circ f$ が全射かつ $g$ が単射ならば、$f$ は全射である。

**証明**

(1) $f$ と $g$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$ が $x \neq x'$ を満たすとする。$f$ が単射であるから $f(x) \neq f(x')$. $g$ が単射であるから $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. すなわち $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(別証明) $f$ と $g$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$ が $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ を満たすとする。$g(f(x)) = g(f(x'))$ であるから、$g$ が単射であるので $f(x) = f(x')$. また $f$ が単射であるので $x = x'$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(2) $f$ と $g$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、$g$ が全射であることから、$g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在する。$f$ が全射であることから、$f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

ゆえに $g \circ f$ は全射である。

(3) $f$ と $g$ が全単射と仮定する。$g \circ f$ は (1) から単射、(2) から全射であるので、全単射である。

(4) $g \circ f$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$ が $f(x) = f(x')$ を満たすとする。$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f('x')) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であるから、$x = x'$. ゆえに $f$ は単射である。

(別証明) $g \circ f$ が単射と仮定する。$x, x' \in X$ が $x \neq x'$ を満たすとする。背理法で $f(x) \neq f(x')$ を示そう。もしも $f(x) = f(x')$ が成り立ったとすると、$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$. $g \circ f$ が単射であることから、$x = x'$. これは矛盾である。ゆえに $f(x) \neq f(x')$ である。ゆえに $f$ は単射である。

(5) $g \circ f$ が全射と仮定する。任意の $z \in Z$ に対して、ある $x \in X$ が存在して、$z = g \circ f(x)$ が成り立つ。このとき、$y := f(x)$ とおくと、$y \in Y$ であり、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = z.$$

ゆえに $g$ は全射である。

(6) $X = \{1\}, Y = \{-1, 1\}, Z = \{1\}, f(1) = 1, g(1) = 1, g(-1) = 1$ として、$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を定めると、$g \circ f\colon X \to Z, g \circ f(1) = 1$ である。$g \circ f$ は単射であるが、$g$ は単射でない。

(7) (6) と同じ写像が反例となる。$X = \{1\}, Y = \{-1, 1\}, Z = \{1\}, f(1) = 1, g(1) = 1$, $g(-1) = 1$ として、$f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ を定めると、$g \circ f\colon X \to Z, g \circ f(1) = 1$ である。$g \circ f$ は全射であるが、$f$ は全射でない。

(8) $g \circ f$ が単射かつ $f$ は全射と仮定する。$y, y' \in Y$ が $y \neq y'$ を満たすとする。$f$ が全射であるから、$f(x) = y$ かつ $f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。$y \neq y'$ であるから、$x \neq x'$ である。$g \circ f$ が単射であるから、$g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. これから

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \neq g \circ f(x') = g(f(x')) = g(y').$$

ゆえに $g$ は単射である。

(別証明) $g \circ f$ が単射かつ $f$ は全射と仮定する。$y, y' \in Y$ が $g(y) = g(y')$ を満たすとする。$f$ が全射であることから、$f(x) = y, f(x') = y'$ を満たす $x, x' \in X$ が存在する。このとき、

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

$g \circ f$ は単射であるから、$x = x'$. ゆえに $y = f(x) = f(x') = y'$. ゆえに $g$ は単射である。

(9) $g \circ f$ が全射かつ $g$ は単射と仮定する。任意の $y \in Y$ に対して、$z = g(y)$ とおくと、$z \in Z$ である。$g \circ f$ が全射であるから、$g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在する。このとき、$g(f(x)) = z = g(y)$ であるが、$g$ が単射であるから、$f(x) = y$. ゆえに $f$ は全射である。
■

**問 7.** (1) $g \circ f$ が単射であり、かつ $f$ が全射でないならば、$g$ は単射ではない。

**問 8.** 次の各場合に、$X$ から $Y$ への写像をすべて求め、そのうち単射であるもの、全射であるもの、全単射であるものの個数を求めよ。

(1) $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$ (2) $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5\}$ (3) $X = \{1, 2\}, Y = \{4, 5, 6\}$

## 参考: 全単射と要素の個数

(ここは講義時間に余裕があれば講義するが、カットすることになる可能性が大きい…)

実は次の命題が成り立つ。

**命題 4.8 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)** $X$, $Y$ が有限集合であるとする。要素の個数をそれぞれ $|X|$, $|Y|$ と書く。

(1) $X$ から $Y$ への単射が存在する $\Leftrightarrow |X| \leq |Y|$.

(2) $X$ から $Y$ への全射が存在する $\Leftrightarrow |X| \geq |Y|$.

(3) $X$ から $Y$ への全単射が存在する $\Leftrightarrow |X| = |Y|$.

(4) $|X| = |Y|$ ならば、任意の写像 $f\colon X \to Y$ について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

(i) $f$ は単射である。 (ii) $f$ は全射である。 (iii) $f$ は全単射である。

**証明** $n := |X|$, $m := |Y|$, $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$ とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

(1) $f\colon X \to Y$ が単射であれば、$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ はどの二つも相異なり、$\{f(x_i)|1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、要素の個数を比較して $|X| = n \leq |Y|$. 逆に $n \leq m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$ とおくことで、$f\colon X \to Y$ を定義すると、$f$ は単射となる。

(2) $f\colon X \to Y$ が全射であれば、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ であるから、$|X| = n \geq |Y|$. 逆に $n \geq m$ とすると、$f(x_i) = y_i$ $(1 \leq i \leq m)$, $f(x_i) = y_1$ $(m < j \leq n)$ とおくことで、$f\colon X \to Y$ を定義すると、$f$ は全射となる。

(3) $X$ から $Y$ への全単射が存在すれば、(1) から $|X| \leq |Y|$, (2) から $|X| \geq |Y|$ であるから $|X| = |Y|$. 逆に $|X| = |Y|$ とすると、(1) から $X$ から $Y$ への単射 $f$ が存在する。(3) から $f$ は全単射である。

(4) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示せば良い (それが出来ると、(i)$\Rightarrow$(iii) と (ii)$\Rightarrow$(iii) が導かれる)。

$f\colon X \to Y$ が単射とする。$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ が相異なるので、$|\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n$, 仮定からそれが $|Y|$ に等しく、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subset Y$ であるから、$\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$. ゆえに $f$ は全射である。

一方、$f\colon X \to Y$ が全射とする。$\{f(x_i)|1 \leq i \leq n\} = Y$. 仮定から $n = |Y|$ であるから、$f(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに $f$ は単射である。■

**命題 4.9 (参考: 線形代数バージョン)** $X, Y$ が体 $K$ 上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ $\dim X$, $\dim Y$ と書く。

(1) $X$ から $Y$ への単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$.

(2) $X$ から $Y$ への全射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$.

(3) $X$ から $Y$ への全単射な線形写像が存在する $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$.

(4) $\dim X = \dim Y$ ならば、任意の線形写像 $f\colon X \to Y$ について、以下は同値である。

(i) $f$ は単射である。 (ii) $f$ は全射である。 (iii) $f$ は全単射である。

# 5 逆写像

(2017 年度は、少し違ったやり方で説明します。その講義ノートはそのうち書きます。どちらかというと、2017 年度の説明は教科書 (中島 [1]))

$f\colon X \to Y$ を全単射と仮定する。

$f$ が全射であることから、$\forall y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する。

そのような $x$ は、$f$ が単射であることから、(1 つの $y$ に対して) 1 つしかない。実際 $y = f(x) = f(x')$ ならば、$f$ が単射であることから $x = x'$.

**「一意的に存在する」**　このようなとき、「$\forall y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ が一意的に存在する」と言う。要するに「一意的に存在する」とは「1 個だけ存在する」、「条件を満たすものの個数が 1 である」ということである。

一意的に存在することを $\exists!$ で表すことがある[6]。

記号 $\exists!$ の約束

「$P(x)$ を満たす $x$ が一意的に存在する」とは

$$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)).$$

これを $(\exists! x)\, P(x)$ と表す。

この記号を用いると、$f\colon X \to Y$ が全単射であるとき

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X) \quad f(x) = y. \tag{$\star$}$$

逆に $(\star)$ が成り立つならば、$f$ が全単射であることが導かれる。

**問 9.** $(\star)$ が成り立つならば $f$ が全単射であることを示せ。

ゆえに $y \in Y$ に対して

$$g(y) := \text{“}f(x) = y \text{ を満たす } x\text{”} \quad (f \text{ による像が } y \text{ であるような } x) \tag{1}$$

とすることで、写像 $g\colon Y \to X$ が定められる。この $g$ を $f$ の**逆写像** (the inverse mapping of $f$) と呼び、記号 $f^{-1}$ で表す。$f^{-1}$ は “f inverse” と読む。

すなわち、全単射 $f\colon X \to Y$ に対して、

$$f^{-1}(y) := \text{“}f(x) = y \text{ を満たす } x \in X\text{”} \quad (y \in Y) \tag{2}$$

で定まる $f^{-1}\colon Y \to X$ を $f$ の逆写像と呼ぶ。

次は、(上でそのように定義したのだから) 明らかであるが、強調しておく。

($\heartsuit$)　逆写像の定義域と値域は、それぞれ元の写像の値域と定義域である :

$$f^{-1} \text{ の定義域} = f \text{ の値域}, \quad f^{-1} \text{ の値域} = f \text{ の定義域}.$$

$f$ の逆写像が存在するとき、

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)) \tag{3}$$

である。これは逆写像 $f^{-1}$ の定義のようなもので、単純なことであるけれど、納得できるまで考えること。($f$ が全単射である場合に、与えられた $y$ に対して、$y = f(x)$ が成り立つような $x$ のことを $f^{-1}(y)$ と書くのだった。)

[6] $\exists!$ の代わりに $\exists 1$ と書く人もいるが、まぎわらしい場合があるので、ここでは採用しない。

**注意 5.1** $f$ の逆写像が存在するかどうか分からないときに、ある $x \in X$, $y \in Y$ に対して $y = f(x)$ が成り立っていても、$x = f^{-1}(y)$ と書くことは正しくない。例えば $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ で定めるとき、$f(2) = 4$ であるが、$f^{-1}(4) = 2$ と書いてはいけない (逆写像 $f^{-1}$ が存在しないのだから)。■

(3) から

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in Y)$$

が成り立つ[7]。合成写像の言葉を使って書き換えると

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in X), \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in Y).$$

ゆえに (明らかな $f^{-1} \circ f\colon X \to X$, $f \circ f^{-1}\colon Y \to Y$ と合わせて)

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{4}$$

一応、まとめておく。

**命題 5.2** $f\colon X \to Y$ が全単射であるとき、

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y. \tag{5}$$

ある意味でこの逆が成り立つ。次の命題は、$g$ が $f$ の逆写像であることを証明する必要がある場合に、役立つことが多い。

**命題 5.3** 写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ が

$$g \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y \tag{$\sharp$}$$

を満たすならば (注: $f$ が全単射であることは仮定していない)、$f$ は全単射で、$g = f^{-1}$ である。

(実は仮定の条件は $f$ と $g$ について対称なので、$g$ も全単射で $f = g^{-1}$ も成り立つ。)

**証明** 最初に恒等写像は全単射であることを注意しておく。$g \circ f = \mathrm{id}_X$ が単射であることから、$f$ は単射であり (定理 4.7 (4))、$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が全射であることから、$f$ は全射である (命題 4.7 (5))。ゆえに $f$ は全単射であり、$f^{-1}$ が存在する。任意の $y$ に対して、$x = f^{-1}(y)$ とおくと、$y = f(x)$ であるが、$g(y) = g(f(x)) = \mathrm{id}_X(x) = x$. ゆえに $g(y) = f^{-1}(y)$. ゆえに $g = f^{-1}$ である。■

この証明の後半は、次のようにも出来る。$g \circ f = \mathrm{id}_X$ より $(g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X \circ f^{-1}$. これから $g = f^{-1}$.

**注意 5.4 (逆写像の定義 (テキストによる違い))** $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、この条件 ($\sharp$) を満たす写像 $g$ のことを $f$ の逆写像と定義するテキストも多い (そこで「逆写像の定義を書け」という問に、そういうように答えても良いことにする)。そこだけ見るとすっきりした感じがするかもしれないが、全単射ならば逆写像が存在するという議論をサボることは出来ないので、近道が出来るわけではない。■

**例 5.5 (あみだくじ)** $n$ を自然数として、$X := \{1, 2, \cdots, n\}$ とおく。$n$ 本のあみだくじを 1 つ作ると、写像 $f\colon X \to X$ が定まるが、$f$ は全単射である。— 逆向きのあみだくじの定める写像を $g\colon X \to X$ とすると、$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_X$ が成り立つので、命題 5.3 により、$f$ は全単射かつ $g = f^{-1}$. ■

[7]念のため: $\forall x \in X$ に対して、$y := f(x)$ とおくと、$x = f^{-1}(y)$ が成り立つので、$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$. 同様に $\forall y \in Y$ に対して、$x := f^{-1}(y)$ とおくと、$y = f(x)$ が成り立つので、$f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

条件 $(\sharp)$ は、$f$ と $g$ について対称であることに注意すると、$g$ は全単射で、$g^{-1}=f$ であることが分かる。ゆえに、次が得られる。

**系 5.6** 任意の全単射 $f$ に対して、$f$ の逆写像 $f^{-1}$ は全単射で、$f^{-1}$ の逆写像は $f$ である。

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}=f.$$

**例 5.7** $f_4\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$, $f_4(x)=x^2$ は全単射であるから、逆写像 $f_4^{-1}\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ が存在する。実は $f_4^{-1}(y)=\sqrt{y}$ である。■

**問 10.** 高校数学の関数 $f(x)=e^x$ から全単射な写像 $f\colon X\to Y$ を作れ ($X$, $Y$ を適切に ($X$ をなるべく大きく、$f$ が全単射となるように) 定義し、$f$ が全単射であることを確認せよ)。逆写像 $f^{-1}$ の定義域と「レインジ」は何か。$f^{-1}(y)$ を普通どのように書くか。

もし逆三角関数 $\sin^{-1}$ を学んでいたら、それはどういう写像の逆写像であるか説明せよ。

**定理 5.8** $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ が共に全単射であるならば、$g\circ f\colon X\to Z$ も全単射で、

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.$$

**証明** $g\circ f\colon X\to Z$, $f^{-1}\circ g^{-1}\colon Z\to X$ であるから、合成可能である。

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=((g\circ f)\circ f^{-1})\circ g^{-1}=(g\circ(f\circ f^{-1}))\circ g^{-1}=(g\circ \mathrm{id}_Y)\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=\mathrm{id}_Z,$$

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=\left((f^{-1}\circ g^{-1})\circ g\right)\circ f=(f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g))\circ f=(f^{-1}\circ \mathrm{id}_Y)\circ f=f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X.$$

ゆえに $f^{-1}\circ g^{-1}$ は $g\circ f$ の逆写像である:

$$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}.\blacksquare$$

**例 5.9 (線形代数)** $A$, $B$ が正則な $n$ 次行列であるとき、$(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. ■

# 6 部分集合の像と逆像

すでにフライング気味に $f(X)$ という記号を使っているが、写像 $f$ による定義域の部分集合 $A$ の像 $f(A)$ を定義して、基本的な性質を述べる。

**定義 6.1 (部分集合の像, 写像の像 (値域))** $f\colon X\to Y$ とする。

(1) $A\subset X$ に対して、$A$ の要素の $f$ による像の全体を $f(A)$ で表し、$A$ の $f$ による**像** (the image of $A$ under $f$) または**順像** (the direct image of $A$ under $f$) と呼ぶ。

$$f(A):=\{y\mid(\exists x\in A)\ y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in A\}.$$

(2) 特に写像 $f$ の定義域 $X$ の $f$ による像 $f(X)$ を、$f$ の像 (the image of $f$)、あるいは $f$ の**値域** (the range of $f$) と呼び、$\mathrm{Image}(f)$ とも表す。

$$\mathrm{Image}(f):=f(X)=\{y\mid(\exists x\in X)\ y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

$f\colon X\to Y$, $a\in X$, $A\subset X$ とするとき、$f(a)$ と $f(A)$ という記号が使えることになる。どちらも $f$ による「エー」の像であるが、$f(a)$ は $Y$ の要素、$f(A)$ は $Y$ の部分集合である。異

なる概念に対して、形だけからは区別が付かない同じ記号を用いることを、「記号の濫用」といい、あまり良くないこととされるが、上の記号は数学の普通のテキストを読むためには避けることが出来ない。

$(\exists x \in A)\ y = f(x)$ というのは、$y$ に関する条件であることに注意しよう。$\{y \mid P(y)\}$ ($P(y)$ は $y$ に関する条件) という形をしているわけである。$\{f(x) \mid x \in A\}$ は $\{y \mid (\exists x \in A)\ y = f(x)\}$ の略記法である。

特に $f$ の値域は色々な記号、呼び名で表される。

$$f(X) = \mathrm{Image}(f) = \text{“}f \text{ の値域”} = \text{“}f \text{ の像”} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

**$f$ の値域とは、$f$ の値の全体である。**

**定義 6.2 (部分集合の逆像)** $f\colon X \to Y$ とする。$B \subset Y$ に対して、$X$ の要素で $f$ による像が $B$ に属するもの全体を $f^{-1}(B)$ で表し、$B$ の $f$ による**逆像** (the inverse image of $B$, pull-back) と呼ぶ。

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

$f$ が全単射ではない場合、つまり $f$ の逆写像 $f^{-1}$ が存在しない場合にも、$f^{-1}(B)$ という記号を用いることに注意が必要である。慣れないと混乱するかもしれない。教科書 (中島 [1]) では、この点を強く注意している。

**例 6.3** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ とするとき

$$\begin{aligned}
&f(\{0\}) = \{0\}, \quad f\left(\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \{0, 1\}, \quad f(\{0, \pi\}) = \{0\}, \quad f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1],\\
&f([0, \pi]) = [0, 1],\\
&f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n\pi\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \phi,\\
&f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\},\\
&f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 6\right]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right].
\end{aligned}$$

$f^{-1}$ は存在しないので、$f^{-1}(2)$, $f^{-1}(0)$ もナンセンスである。■

**注意 6.4 (教科書 (中島 [1]) の記号法について)** [1] では、$f(A)$ や $f^{-1}(B)$ という記号を使うことのデメリットを指摘して、$f(A)$ のことを $f_*(A)$, $f^{-1}(B)$ のことを $f^*(B)$ と表している。

$$f(A) = f_*(A) = \text{“}A \text{ の } f \text{ による像”} = \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \mid \exists a (a \in A \wedge y = f(a))\}.$$

$$f^{-1}(B) = f^*(B) = \text{“}B \text{ の } f \text{ による逆像”} = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \mid x \in X \wedge f(x) \in B\}.$$

しかし、$f(A)$ や $f^{-1}(B)$ という記号はもう十分に普及してしまっていて、避けて通ることは到底不可能であると思う。だったら最初からその記号を用いて慣れてしまう方が良いと私 (桂田) は考える。

- $X$ の要素 $x$ の $f$ による像 $f(x)$ と、$X$ の部分集合 $A$ の $f$ による像 $f(A)$ を混同しないように、不徹底なやり方ではあるけれど、配慮はされている。つまり、集合の要素を表すのには小文字を、(部分) 集合を表すのには大文字を使っているのである。初心者向けの補助輪として当面十分であると考える。

- $f^*(B)$ と $f_*(A)$ という記号を使う場合、どちらが順像、逆像であるか、混乱する可能性はないだろうか？逆写像 $f^{-1}$ がないときに $f^{-1}(B)$ と書くのは混同のもとというのだが、逆写像 $f^{-1}$ が存在するときに、$B$ の $f$ による逆像と、$B$ の $f^{-1}$ による像が一致する。

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ による } B \text{ の像} &= \left\{x \in X \;\middle|\; (\exists y)\left(y \in B \land x = f^{-1}(y)\right)\right\} \\ &= \{x \in X \mid (\exists y)\,(y \in B \land y = f(x))\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ &= f \text{ による } B \text{ の逆像}. \end{aligned}$$

つまり教科書の記号によると $(f^{-1})_*(B) = f^*(B)$ ということである。$f^{-1}(B)$ という記号は $f$ の像ではありえないことは明白で良いと思う。

- 読者の混乱を避けるためというが、結局のところ、記号を増やして読者の負担を増やしている面があることは否めない。$f$ の値域 (像) を表すのに、$\mathrm{Image}(f)$, $f_*(X)$, $f(X)$ と記号を 3 つも覚えなくてはならない ($\mathrm{Image}(f)$ という記号自体は好ましく思うけれど)。

■

写像 $f\colon X \to Y$ が全射であるという条件は、$f(X) = Y$ と表せる。

$f\colon X \to Y$ が全単射であるとき、$B \subset Y$ の、逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ による像は、$B$ の $f$ による逆像に一致する。実際

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(b) | b \in B\} &= \left\{y \;\middle|\; \exists b(b \in B \land y = f^{-1}(b))\right\} = \{y \,|\, \exists b(b \in B \land b = f(y))\} \\ &= \{y \,|\, f(y) \in B\}. \end{aligned}$$

**証明するときのために記憶すべきこと**

$$\begin{aligned} y \in f(A) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x). \\ x \in f^{-1}(B) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in X \quad \land \quad f(x) \in B. \end{aligned}$$

**命題 6.5** $f\colon X \to Y$ とする。

(1) $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(2) $f^{-1}(Y) = X$.

(3) $(\forall x \in X)\ f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(4) $(\forall y \in Y)\ f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

**問 11.** 命題 6.5 を証明せよ。

**命題 6.6** $f\colon X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$ とする。

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

(2) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(4) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

(5) $f$ が単射であれば、(1) の逆が成り立ち、(2) と (4) の等式バージョンが成立する。すなわち、

$$f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2. \tag{$\sharp$}$$

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2). \tag{$\flat$}$$

$$f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2). \tag{$\natural$}$$

(6) $f$ が単射でなければ ($\sharp$), ($\flat$), ($\natural$) のそれぞれについて、それが成り立たないような $A_1$, $A_2$ が存在する。

教科書に書いてあることを紹介する。

> (3) では等式が成り立つのに、(2), (4) では等式になっていない。(5) では単射ならば等式が成り立つと書いてある。それならば単射でないならば等式が成り立たないのではないかと推測できる。それが成り立たないことを自分で確認する自主性が大事である。

要するに (6) で書いたことを自分で推測するようになろう、ということである。よくあるのは、成り立たないような反例をあげよ、という問題であるが、上では単射でなければ、必ず成り立たないという命題にした。

**証明**

(1) $A_1 \subset A_2$ を仮定する。$y \in f(A_1)$ とすると、$(\exists x \in A_1)\ y = f(x)$. $A_1 \subset A_2$ であるから、$x \in A_2$. ゆえに $y \in f(A_2)$. ゆえに $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(2) (定跡に従って、「$y \in f(A_1 \cap A_2)$ とすると」で始めて証明することも出来るが、(1) を使うと簡単である。)

$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ かつ $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ であるから、(1) を用いると、$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$ かつ $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(3) (これも定跡に従って証明できるが、(1) を利用すると、少し簡単になる。)

(a) $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ かつ $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ であるから、(1) より $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ かつ $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(b) $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とすると、$(\exists x \in A_1 \cup A_2)\ y = f(x)$. $x \in A_1$ の場合は $y \in f(A_1)$ であるから、$y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. $x \in A_2$ の場合は $y \in f(A_2)$ であるから、$y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. いずれの場合も $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

(a), (b) より $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終)

(別証) 任意の $y \in Y$ に対して、

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\exists x)\,(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\,((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow (\exists x)\,((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow ((\exists x)\,(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (\exists x)\,(x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2).
\end{aligned}$$

ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. (証明終) (途中で $((\exists x)P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)P(x)) \vee ((\exists x)Q(x))$ を用いた[8]。)

(4) $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$ とすると、$y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$. $y \in f(A_1)$ であることから $(\exists x \in A_1)$ $y = f(x)$. この $x$ は $A_2$ には属さない。実際 $x \in A_2$ とすると $y \in f(A_2)$ となり矛盾が生じる。ゆえに $x \in A_1 \setminus A_2$ であるから、$y \in f(A_1 \setminus A_2)$.

(5) 省略する。教科書 (中島 [1]) の pp. 137–138 に載っている。

(6) $f$ が単射でなければ、$(\exists x_1 \in X)$ $(\exists x_2 \in X)$ $x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$. そこで $A_1 := \{x_1\}$, $A_2 := \{x_2\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&f(A_1) = \{f(x_1)\}, \\
&f(A_2) = \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} = f(A_1), \\
&f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset, \\
&f(A_1) \cap f(A_2) = \{f(x_1)\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

であるから、

$$f(A_1) \subset f(A_2) \wedge A_1 \not\subset A_2,$$

$$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2),$$

$A_1 := \{x_1, x_2\}$, $A_2 := \{x_2\}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&f(A_1 \setminus A_2) = f\left(\{x_1\}\right) = \{f(x_1)\}, \\
&f(A_1) \setminus f(A_2) = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_1)\} = \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_1)\} = \emptyset
\end{aligned}$$

であるから

$$f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2). \blacksquare$$

$f$ の逆像 $f^{-1}(\cdot)$ に関する公式はずっとシンプルで、証明もやさしい。変な話になるが、テストで出題されたら、絶対に逃がさない、くらいに考えて欲しい。

[8] これは $\vee$ を $\wedge$ にした式は一般には成り立たない。また $\exists$ のかわりに $\forall$ にしたときは、$((\forall x)P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow ((\forall x)P(x)) \wedge ((\forall x)Q(x)))$ は一般に成り立つが、$\wedge$ を $\vee$ にした式は成り立たない。

**命題 6.7** $f\colon X \to Y$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする。

(1) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(2) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(3) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(4) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$. 特に $B \subset Y$ に対して、$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.

(5) $f$ が全射ならば、(1) の逆も成立する。

$$B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

**証明**

(1) $B_1 \subset B_2$ を仮定する。$x \in f^{-1}(B_1)$ とすると、$f(x) \in B_1$. $B_1 \subset B_2$ より $f(x) \in B_2$. ゆえに $x \in f^{-1}(B_2)$. ゆえに $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(2) $x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap F_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(3) (2) と同様に証明できる。

(4) (2) と同様に証明できる。

(5) (1) があるので、$f$ が全射と仮定するとき、$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ ならば $B_1 \subset B_2$ が成り立つことを証明すればよい。$y \in B_1$ とすると、$f$ が全射という仮定から $(\exists x \in X)\ y = f(x)$. $f(x) \in B_1$ であるから、$x \in f^{-1}(B_1)$. 仮定 $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ より $x \in f^{-1}(B_2)$. ゆえに $y = f(x) \in B_2$. ゆえに $B_1 \subset B_2$. ■

**命題 6.8** $f\colon X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。

(1) $f^{-1}\left(f\left(A\right)\right) \supset A$. $f$ が単射ならば $f^{-1}\left(f\left(A\right)\right) = A$.

(2) $f\left(f^{-1}\left(B\right)\right) \subset B$. $f$ が全射ならば $f\left(f^{-1}\left(B\right)\right) = B$.

(3) $f\left(A \cap f^{-1}\left(B\right)\right) = f(A) \cap B$.

**証明**　まず

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in A) \quad y = f(x),$$

$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in B$$

を思い出す。

(1) $x \in A$ とすると、$f(x) \in f(A)$. ゆえに $x \in f^{-1}(f(A))$. ゆえに $A \subset f^{-1}(f(A))$.

以下 $f$ が単射と仮定する。$x \in f^{-1}(f(A))$ とすると、$f(x) \in f(A)$. ゆえに $(\exists x' \in A)$ $f(x) = f(x')$. $f$ が単射であることから $x = x'$. ゆえに $x \in A$. ゆえに $f^{-1}(f(A)) \subset A$. 従って $f^{-1}(f(A)) = A$.

(2) $y \in f(f^{-1}(B))$ とすると、$(\exists x \in f^{-1}(B))\ y = f(x)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、$f(x) \in B$. ゆえに $y \in B$. ゆえに $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

以下、$f$ が全射と仮定する。$y \in B$ とすると、$(\exists x \in X)\ y = f(x)$. $f(x) \in B$ であることから、$x \in f^{-1}(B)$. すると $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. ゆえに $B \subset f(f^{-1}(B))$. 従って、$f(f^{-1}(B)) = B$.

(3) $y \in f(A \cap f^{-1}(B)$ とすると、$(\exists x \in A \cap f^{-1}(B))\ y = f(x)$. $x \in A$ であるから、$f(x) \in f(A)$. $x \in f^{-1}(B)$ であるから、$f(x) \in B$. ゆえに $y = f(x) \in f(A) \cap B$. ゆえに $f(A \cap f^{-1}(B) \subset f(A) \cap B$.

逆に $y \in f(A) \cap B$ とすると、$y \in f(A)$ であることから、$(\exists x \in A)\ y = f(x)$. $f(x) = y \in B$ であるから、$x \in f^{-1}(B)$. ゆえに $x \in A \cap f^{-1}(B)$. ゆえに $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$. ゆえに $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.

以上から $f(A \cap f^{-1}(B) = f(A) \cap B$. ■

# 7 グラフ

$f\colon X \to Y$ とするとき、

$$\operatorname{graph} f := \{(x, y) \mid x \in X \land y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

とおき、$f$ の**グラフ**と呼ぶ。

$\operatorname{graph} f \subset X \times Y$ である。

$G \subset X \times Y$ がある写像のグラフであるためには、

$$(*) \qquad \forall x \in X \quad \exists! z \in G \quad \mathrm{pr}_1(z) = x$$

が成り立つことが必要十分である。

$X$ から $Y$ への写像とは、$X \times Y$ の部分集合 $G$ で、$(*)$ を満たすもの、と言っても良い。

# A　問の解答

**解答 1.** $\Delta := ad - bc$, $g\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \left(\dfrac{dx - by}{\Delta}, \dfrac{-cx + ay}{\Delta}\right) \in \mathbb{R}^2$ とおくと、$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ であることが分かる。ゆえに $f$ は全単射で、$g = f^{-1}$ である。 ■

**解答 2.**

- $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$.
- $D(\mathbb{R}) = \{D(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0, 1\}$.
- $\mathrm{pr}_1(X \times Y) = \{\mathrm{pr}_1((x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\} = \{x \mid (x,y) \in X \times Y\} = X$. 同様にして、$\mathrm{pr}_1(X \times Y) = Y$.
- この $f$ について $ad - bc = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0$ であるから、$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

  (授業では $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ となる理由を説明しなかったので、ここで説明しておく。$f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ は明らかだから、$\mathbb{R}^2 \subset f(\mathbb{R}^2)$ を示そう。$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、係数行列が逆行列を持つので解 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を持つ。このとき $f((x,y)) = (a,b)$. ゆえに $(a,b) \in f(\mathbb{R}^2)$. ゆえに $\mathbb{R}^2 \subset f(\mathbb{R}^2)$.)
- $f(X) = \{f(A) \mid A \in X\} = \{f(A) \mid A$ は平面上の多角形$\} =$ すべての多角形の面積の集合 $= (0, \infty)$.
- $D(X) = \{D(f) \mid f \in X\} = \{f' \mid f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\} = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

  (最後の等式の証明は少し難しいかも。一応書いてみる。$Z := \{f' \mid f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\}$ とおき、$Z = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を証明するのが目標である。(a) $g \in Z$ とすると、$(\exists f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))$ $g = f'$. $f$ が何回でも微分できることから、$g$ も何回でも微分できる。すなわち $g \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. (b) $g \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ とする。このとき、$f(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ とおくと、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$f'(x) = g(x)$. $g$ が何回でも微分できることから $f$ も何回でも微分できる。すなわち $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. ゆえに $g \in Z$. (a), (b) から $Z = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)
- $\chi_A(X) = \{\chi_A(x) \mid x \in X\}$ で、各 $x \in X$ に対して、$\chi_A(x)$ は 0 または 1 である。
  - $A = X$ の場合、任意の $x \in X$ に対して、$x \in A$ となるので $\chi_A(x) = 1$. ゆえに $\chi_A(X) = \{1\}$.
  - $A = \emptyset$ の場合、任意の $x \in X$ に対して $x \notin A$ となるので $\chi_A(x) = 0$. ゆえに $\chi_A(X) = \{0\}$.
  - それ以外の場合、すなわち $A \neq \emptyset \wedge A \neq X$ の場合、$\chi_A(X) = \{0, 1\}$.
- $i(X) = \{i(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X$. ■

**解答 3.** (準備中)

**解答 4.** (1) $(\exists x \in X)\ (\exists x' \in X\colon\ x \neq x')\ f(x) = f(x')$. (2) $(\exists y \in Y)\ (\forall x \in X)\ y \neq f(x)$. ■

**解答 5.** $I$ は $\mathbb{R}$ の部分集合、$f\colon I \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加、すなわち

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つと仮定する。

$x, x' \in I$ が $x \neq x'$ を満たすとする。このとき (i) $x < x'$ (ii) $x > x'$ のどちらかが成り立つ。

(i) の場合、$f(x) < f(x')$ であるから、$f(x) \neq f(x')$.

(ii) の場合、$f(x) > f(x')$ であるから、$f(x) \neq f(x')$.

いずれの場合も $f(x) \neq f(x')$ が成り立つ。ゆえに $f$ は単射である。■

**解答 6.** $f'(x) = 3x^2 > 0$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ であるから、$f$ は $(-\infty, 0]$ と、$[0, \infty)$ で狭義単調増加である (平均値の定理を用いて証明できる)。ゆえに $f$ は $\mathbb{R}$ で狭義単調増加である。実際、$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ とするとき、

- $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ であれば、$\exists c \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. ゆえに $f(x_1) < f(x_2)$.
- $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ であれば、$\exists c \in (x_1, x_2)$ s.t. $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$. ゆえに $f(x_1) < f(x_2)$.
- $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in (0, \infty)$ であれば、$(\exists c_1 \in (x_1, 0))$ $(\exists c_2 \in (0, x_2))$ $f(0) - f(x_1) = f'(c_1)(0 - x_1))$, $f(x_2) - f(0) = f'(c_2)(x_2 - 0)$ より、$f(x_1) < f(0) < f(x_2)$ であるから、$f(x_1) < f(x_2)$.

ゆえにいずれの場合も $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つ。■

**解答 8.**

(1) 次の $f_1$〜$f_{27}$ の $3^3 = 27$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 4 | 4 | 4 | No | No | No |
| $f_2$ | 4 | 4 | 5 | No | No | No |
| $f_3$ | 4 | 4 | 6 | No | No | No |
| $f_4$ | 4 | 5 | 4 | No | No | No |
| $f_5$ | 4 | 5 | 5 | No | No | No |
| $f_6$ | 4 | 5 | 6 | Yes | Yes | Yes |
| $f_7$ | 4 | 6 | 4 | No | No | No |
| $f_8$ | 4 | 6 | 5 | Yes | Yes | Yes |
| $f_9$ | 4 | 6 | 6 | No | No | No |
| $f_{10}$ | 5 | 4 | 4 | No | No | No |
| $f_{11}$ | 5 | 4 | 5 | No | No | No |
| $f_{12}$ | 5 | 4 | 6 | Yes | Yes | Yes |
| $f_{13}$ | 5 | 5 | 4 | No | No | No |
| $f_{14}$ | 5 | 5 | 5 | No | No | No |
| $f_{15}$ | 5 | 5 | 6 | No | No | No |
| $f_{16}$ | 5 | 6 | 4 | Yes | Yes | Yes |
| $f_{17}$ | 5 | 6 | 5 | No | No | No |
| $f_{18}$ | 5 | 6 | 6 | No | No | No |
| $f_{19}$ | 6 | 4 | 4 | No | No | No |
| $f_{20}$ | 6 | 4 | 5 | Yes | Yes | Yes |
| $f_{21}$ | 6 | 4 | 6 | No | No | No |
| $f_{22}$ | 6 | 5 | 4 | Yes | Yes | Yes |
| $f_{23}$ | 6 | 5 | 5 | No | No | No |
| $f_{24}$ | 6 | 5 | 6 | No | No | No |
| $f_{25}$ | 6 | 6 | 4 | No | No | No |
| $f_{26}$ | 6 | 6 | 5 | No | No | No |
| $f_{27}$ | 6 | 6 | 6 | No | No | No |

単射、全射、全単射は一致する ($f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ が $4, 5, 6$ の順列になっているもの)。$f_6$, $f_8$, $f_{12}$, $f_{16}$, $f_{20}$, $f_{22}$ の $3! = 6$ 個。

(2) 次の $f_1$〜$f_8$ の $2^3 = 8$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 4 | 4 | 4 | No | No | No |
| $f_2$ | 4 | 4 | 5 | No | Yes | No |
| $f_3$ | 4 | 5 | 4 | No | Yes | No |
| $f_4$ | 4 | 5 | 5 | No | Yes | No |
| $f_5$ | 5 | 4 | 4 | No | Yes | No |
| $f_6$ | 5 | 4 | 5 | No | Yes | No |
| $f_7$ | 5 | 5 | 4 | No | Yes | No |
| $f_8$ | 5 | 5 | 5 | No | No | No |

単射、全単射は存在しない。全射は $f_2$, $f_3$, $f_4$, $f_5$, $f_6$, $f_7$ の 6 個。

(3) 次の $f_1$〜$f_9$ の $3^2 = 8$ 個の写像がある。

| | $f(1)$ | $f(2)$ | 単射 | 全射 | 全単射 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | 3 | 3 | No | No | No |
| $f_2$ | 3 | 4 | Yes | No | No |
| $f_3$ | 3 | 5 | Yes | No | No |
| $f_4$ | 4 | 3 | Yes | No | No |
| $f_5$ | 4 | 4 | No | No | No |
| $f_6$ | 4 | 5 | Yes | No | No |
| $f_7$ | 5 | 3 | Yes | No | No |
| $f_8$ | 5 | 4 | Yes | No | No |
| $f_9$ | 5 | 5 | No | No | No |

全射、全単射は存在しない。単射は $f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8$ の 6 個。

**解答 9.** (準備中)

## B　$f\colon X \to Y$ の $Y$ の呼び名

**余談 B.1 ($Y$ の呼名)** 中途半端に読むと混乱しかねないので、特に興味がなければ読まないことを勧める。

- そもそも名前を書いてない本が多い。
- 日本語で、名前を書いてある本では、「終域」, 「終集合」, 「値域」, 「余域」, 「行き先」など色々な名前を使っている。終域を使っているのは、井関 [4], 弥永 [5]。多分「始域」と組になる語。「終集合」は「始集合」と組になる語で、グラフで使われる (？)。「行き先」を target の訳語として使っている本は調べた限りで 1 冊だけで、案外これが良いような気もするが、「域」や「集合」のような言葉がないと「要素 $x$ の行き先 $f(x)$」と混同しかねないかもしれない。なかなか決定打が出ない。
- 英語では、$Y$ のことを “the codomain of $f$”, “the target (set) of $f$”, “the range of $f$” などと呼ぶ。
- 「$f$ の値域」 (“the range of $f$” の訳？) ということもあるそうだが[9]、少数派である。岩波数学辞典第 4 版では、$\{y | \exists x (x \in X, y = f(x)\}$ (つまり上の記号で $f(X)$ のこと) を $f$ の値域と呼び、$Y$ のことを「$f$ の値域と呼ぶこともあるので注意が必要である」と書いてある。

  言葉遣いに関しては権威に従うのが良い、というわけで次のようにしておく。

  > 「値域」という言葉は $f(X)$ を表すために使われることが多いので、$Y$ を表すための言葉として使うのは避けることを推奨する

- この講義の教科書 (中島 [1]) では、$Y$ のことを $f$ の「レインジ」と呼んでいる。なかなかユニークである (もちろん主流の言葉遣いとは言えない)。おそらく著者の専門分野では “range” と呼ぶのが普通であり、出来ればその訳語である「値域」を採用したかったが、それは上にも書いたように岩波数学辞典でも二番手扱いにされているので、それを避けて “range” の読み「レインジ」を採用したと推察する。

[9] この辺の言葉遣いは、数学の中でも分野によって違う。筆者が普段読むテキスト、論文に出て来る「値域」、“range” はすべて $f(X)$ の意味であるので、$Y$ のことを「値域」と読むのは少なからぬ抵抗を感じる。

| 立場 | $Y$ の扱い | $f(X)$ の呼名 |
|---|---|---|
| 高校数学 (関数) | そんなの考えない | 関数 $f(x)$ の値域 |
| 岩波数学辞典 | 名前を与えてない | $f$ の値域, $f$ による $X$ の像 |
| 教科書 | レインジと呼ぶ | $f$ による $X$ の像 |
| この講義 | 定着した呼び名はないと認めた上で、この講義では $f$ の終域と呼ぶことにする。 | $f$ の値域, $f$ による $X$ の像 |

表 1: まとめ

## 2015 年度授業の記録

- 6 月 4 日。問 6[10] の解説を配る。今日は写像の 1 回め。写像の定義と例。定値写像まで。
- 6 月 11 日。前半は問 6 の解説 (結構時間を使う)。後半は、特性関数、数列をやって、合成写像。
  (6 月 18 日は中間試験。試験範囲は論理と集合。)
- 6 月 25 日。単射、全射、全単射。
- 7 月 2 日。全単射

## 参考文献


[1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).

[2] 河田敬義（かわだゆきよし）, 三村雄征（ゆきお）：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965), 古いテキストであるが、位相空間論で大事なことが証明付きで程よく網羅されているので、辞書として使うのに好適である。

[3] ブルバキ：数学原論 集合論 要約, 東京図書 (1968), 前原昭二 訳.

[4] 井関清志（いせききよし）：集合と論理, 新曜社 (1979).

[5] 彌永昌吉：数の体系 上, 岩波書店 (1972).


[10] `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi6.pdf`

# 索 引