

数理リテラシー練習帳 (工事中)

桂田 祐史

2016年8月9日, 2017年8月13日

これは2017年度の講義の準備である。過去問やこれまでの宿題から、半日作業でまとめた。まだ問題の並べ方などおかしな所がある。解答の公開法については思案中。

1 良く使う集合

問 1. 次の各集合は何を表すか答えよ。

(1) \mathbb{N} (2) \mathbb{Z} (3) \mathbb{Q} (4) \mathbb{R} (5) \mathbb{C}

問 2. 次の命題の真偽を答えよ。ただし i は虚数単位とする。

(1) $-1 \in \mathbb{N}$ (2) $0 \in \mathbb{Z}$ (3) $\frac{1}{7} \in \mathbb{Q}$ (4) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ (5) $\pi^2 \in \mathbb{R}$ (6) $(1+i)^4 \in \mathbb{R}$

2 論理

問 3. 次の (1)~(5) の命題について、その否定を書け。(6) の命題については対偶を書け。

(1) 「(私は) ステレオかテレビを買う」 (2) 「(私は) 学校に行って講義を聞く」 (3) 「夏には雪が降らない」 (4) 「明日晴れたら遠足に行く」 (5) 「砂糖は甘い」 (6) 「のび太は叱られないと勉強しない」

問 4. 次の命題の真理値表を書け。

(1) $p \wedge q$ (2) $p \vee q$ (3) $p \Rightarrow q$ (4) $(\neg p) \vee q$ (5) $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ (6) $(p \wedge q) \vee r$ (7) $(p \vee q) \wedge r$

注意: 実際に解答してもらおうと、時々分かり辛い真理値の並べ方をする人がいる。辞書式順序などがお勧め (普通に樹形図を書くとそうなるはずである)。

問 5. 真理値表を書くことにより証明せよ。

(1) $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (2) $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (3) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$
(4) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

問 6. 次の真理値表を書け。

(1) $p \Rightarrow q$ (2) $\neg(p \Rightarrow q)$

問 7. 「 p ならば q 」の否定が「 p であるが、 q でない」と同値であることを示せ。

(「ならば」の否定は完璧にマスターすること。)

問 8. 同値変形を用いて次式を証明せよ。

$$(1) (p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

$$(2) (p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

問 9. (1) 真理値表を用いて $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を示せ。 (2) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ を示せ。 (3) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を示せ。

問 10. 次の連立方程式, 連立不等式を解け。方程式は複素数の範囲で考える。方程式を解いた結果は複号 (± や ≠ のこと) を用いず、1つ1つ書くこと。

$$(1) \begin{cases} x(x^2 + 4y + y^2) = 0 \\ (y + 2)(y + x^2) = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} (3x^2 - 1)(y^3 - y) = 0 \\ (3y^2 - 1)(x^3 - x) = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x^3 + 3xy^2 - x = 0 \\ y^3 + 3x^2y - y = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 2) = 0 \\ (y + 1)(y - x^2) = 0 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} (x - 1)(x - 3) > 0 \\ x(x - 2) > 0 \end{cases}$$

問 11. 次の各命題を記号で表せ。

(1) すべての実数 x は $x^2 \geq 1$ を満たす。

(2) $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たす実数 x が存在する。

(3) 任意の整数 x に対して、 $x + y = 0$ を満たすような整数 y が存在する。

(4) ある実数 L が存在して、任意の実数 x に対して $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x \geq L$ が成り立つ。

問 12. 次の各命題を文 (または文章) で表せ。

(1) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x > y$ が成り立つ。

(2) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = y + x = y$ が成り立つ。

問 13. 次の命題を証明せよ。

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}) x^2 + x + 1 > 0$$

$$(2) (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$(3) (\exists x \in \mathbb{R}) x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(4) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y > x$$

$$(5) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) y^2 > x$$

$$(6) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) y^2 + 2y > x$$

$$(7) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) e^y > x$$

$$(8) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x + y = y$$

$$(9) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x + y = 0$$

$$(10) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x \cdot y = y$$

(11) $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists M > 0) Ma > b$

(12) $(\forall x > 0) (\exists y \in \mathbb{R}) e^y = x$

問 14. 次の各命題の真偽を述べ、真である場合は証明し、偽である場合はその否定命題を証明せよ。

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y^2 = x$ (2) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y > 0) \log y > x$

問 15. 真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を (\neg を使わずに) 書いて証明せよ。

(1) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y > x^2$ (2) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x \geq y^2$

問 16. 次の各命題の否定命題を書いて、その否定命題を証明せよ。

(1) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $xy = 1$ が成り立つ。

問 17. A を \mathbb{R} の部分集合、 S を実数とする。次の命題の否定を、 \neg を用いずに式で表せ。

$$((\forall x \in A) x \leq S) \wedge ((\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in A) S - \varepsilon < y).$$

問 18. $p \Rightarrow q$ とその対偶の真偽は一致することを示せ。

9. 命題論理のド・モルガン律 $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$, $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ を、真理値表を用いて証明せよ。

問 19. 次の論理式の否定を作れ。ただし、(a) では $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は数列, $a \in \mathbb{R}$. (b)~(d) で $A \subset \mathbb{R}^n$, $|x|$ は $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の長さ ($= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$), $B(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon\}$, (c) では $a \in \mathbb{R}^n$ とする。(説明を書いたけれど、問題を解くのにこれらの情報はほとんど必要がない。)

(a) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |x_n - a| \leq \varepsilon.$

(b) $(\forall a \in A) (\exists \varepsilon > 0) B(a; \varepsilon) \subset A.$

(c) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in B(a; \delta)) |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$

(d) $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) |x| \leq R.$

問 20. 「 x が 2 より大きいならば $f(x)$ は 3 より小さい」の否定を書け。ただし、 $x \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

問 21. 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に関する次の条件の否定を書け。

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) (\forall m \in \mathbb{N}: m \geq N) |a_n - a_m| < \varepsilon.$

問 22. (a, b) を数直線上の区間、 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき、次の条件の否定を書け。

$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in (a, b)) (\forall y \in (a, b): |x - y| < \delta) |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

問 23. アルキメデスの公理「 $(\forall a > 0) (\forall b > 0) (\exists n \in \mathbb{N}) na > b$ 」の否定を書け。

問 24. 実数 x が任意の自然数 n に対して、 $-\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$ を満たすならば、 $x = 0$ であることを示せ。

3 集合

問 25.

- (1) 2つの集合が等しいとはどういうことか、定義を述べよ。
- (2) 部分集合の定義を述べよ。
- (3) 2つの集合に関して、以下の言葉の定義を述べよ。またどういう記号で表すかを答えよ。
(a) 和集合 (合併集合) (b) 積集合 (共通部分) (c) 差集合 (d) 直積集合
- (4) 1つの集合に関して、以下の言葉の定義を述べよ。またどういう記号で表すかを答えよ。
(a) 補集合 (ただし全体集合を X で表す) (b) ベキ集合

問 26. 次の各命題の真偽を述べよ。

- (1) $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ (2) $\{1, 2, 2, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\}$ (3) $1 \in \{1\}$ (4) $\{1\} \in \{1\}$ (5) $\{1\} \subset \{1\}$ (6) 任意の a と A に対して、 $\{a\} \subset A \Leftrightarrow a \in A$.

問 27. (1) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 6\}$ を要素を並べる書き方 (外延的表現) で表せ。

- (2) $B = \{1, 2, 3, 4\}$ を条件を示す書き方 (内包的表現) で表せ (答は無数にあるが一つでよい)。
- (3) $C = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $D = \{2, 4, 6\}$ とするとき、 $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ を求めよ。
- (4) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 4\}$ の部分集合を全て求めよ (結果は外延的表現で表わせ)。

問 28. 次の各文の内容を記号で表せ。ただし A, B, X は集合とする。

- (1) π は有理数全体の集合に属さない。 (2) A と B の和集合は実数全体の集合である。
- (3) A の補集合は、 X と A の差集合に等しい。 (4) x が A と B の共通部分の要素であるためには、 x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。
- (5) A と B が等しいためには、 A が B の部分集合であり、かつ B が A の部分集合であることが必要十分である。

問 29. $A = \{n(n+1)(n+2) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{6m \mid m \in \mathbb{N}\}$ とするとき、 $A \subset B$, $A \neq B$ であることを示せ。

問 30. $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 4n^2 - 4n - 9 < 0\}$ を求めよ (外延的な表現をせよ)。

問 31. $A = \{a\}$ のとき、 $B := 2^A$, $C := 2^B$ を求めよ。

問 32. $A = \{a, b\}$ のベキ集合 B を求めよ。また B のベキ集合の要素の個数を求めよ。

問 33. 次の各場合に、 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A^c , $A \times B$, 2^A を求めよ (要素をすべて書き並べる方法で表せ)

- (1) 全体集合 $X = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ のとき。
- (2) $A = \{b, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$ のとき。(注意: $A \setminus B$ については場合分けが必要である。)
- (3) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ のとき。

問 34. A, B, C を集合とするとき、

$$A \subset B \cup C \Rightarrow (A \subset B) \vee (A \subset C)$$

はつねに成り立つか？つねに成り立つならば証明し、そうでないならば反例をあげよ。

問 35. 任意の集合 A, B に対して、次式が成り立つことを証明せよ。

(1) $A \cap B \subset A$ (2) $(A \cup B) \cap A = A$

問 36. X を全体集合、 A と B を X の部分集合とするとき、以下の命題を証明せよ。

(1) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$ (2) $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B$ (3) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$

問 37. A, B, C が全体集合 X の部分集合とするとき、次の (1), (2) を証明せよ。

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (2) $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$

問 38. 全体集合 X の部分集合 A, B に対して、 $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$ であることを示せ。

問 39. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall y \in \mathbb{R}) x > y\}$ とおくとき、 $A = \emptyset$ であることを示せ。

問 40. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0) |x| < \varepsilon\}$ のとき、 $A = \{0\}$ であることを示せ。

問 41. (1) 集合族の定義を述べよ。 (2) 集合族の例をあげよ。

問 42. 集合族 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ について、次の (i), (ii) を証明せよ。

(i) 条件 $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) n < m \Rightarrow A_n \subset A_m$ を満たすならば $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.

(ii) 条件 $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}) n < m \Rightarrow A_n \supset A_m$ を満たすならば $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.

問 43. (1) 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、合併集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ と共通部分 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ の定義を書け。

(2) 集合族 \mathcal{A} について、合併集合 $\bigcup \mathcal{A}$ と共通部分 $\bigcap \mathcal{A}$ の定義を書け。

問 44. 次の各場合に $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ。

(1) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$.

(2) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

(3) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$.

(4) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, n\right)$

(5) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{n^2+n+1}{n^2+n}\right)$.

(6) $A_n := \left[-1 + \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}\right\}$.

(7) $A_n := \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$

(8)

$$A_n := \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\right) \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}, 1\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \text{ または } \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} \leq x < 1\right\}.$$

(9) $A_n = \{x \mid -\frac{1}{n} \leq x \leq 2 - \frac{1}{n}\}$.

(10) $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} \leq x \leq 2n\}$.

問 45. 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について、次の命題を証明せよ。

(1) $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c)$ (2) $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda^c)$

問 46. $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ のとき、 $2^{A \times B}$ を求めよ。

問 47. (1) A と B を集合とすると、 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$ の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか。(2) A を集合とすると、 A^c , 2^A の定義を書け(全体集合は X とする)。また、それぞれ何と呼ぶか。

(3) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ とするとき、 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, 2^A , $2^{(2^A)}$ を求めよ。

4 写像

問 48. 写像について次の言葉の定義を述べよ。(1) 単射 (2) 全射 (3) 全単射

問 49. $f: X \rightarrow Y$ について、以下の問に答えよ。

(1) f が単射でないとはどういうことか、論理式で書け。

(2) f が全射でないとはどういうことか、論理式で書け。

問 50. (写像に関する) 次の言葉の定義を述べよ。

(a) 値域 (b) 合成写像 (c) 逆写像 (d) 集合の(順)像 (e) 集合の逆像

問 51. 以下の各写像の値域を求めよ。

(1) X を空でない集合とすると、恒等写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$.

(2) $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$ で定めた D .

(3) X, Y が空でない集合のとき、 $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$, $\text{pr}_X((x, y)) = x$ ($x \in X$) で定めた pr_X .

(4) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$) で定めた f .

(5) $X =$ 平面内の多角形全体の集合として、 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = A$ の面積 ($A \in X$) で定めた、 f .

(6) $X = Y = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D: X \rightarrow Y$, $D(f) = f'$ ($f \in X$) で定めた D . ただし f' は f の導関数である。

(7) X を空でない集合、 $A \subset X$ とするとき、 $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$ で定めた χ_A .

(8) X, Y は集合で、 $\emptyset \neq X \subset Y$ を満たすとき、 $i: X \rightarrow Y$, $i(x) = x$ ($x \in X$) で定めた i .

問 52. I は \mathbb{R} の区間, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ とするとき、以下の問に答えよ。

- (1) f が狭義単調増加とはどういうことか、定義を述べよ。
- (2) f が狭義単調増加ならば f は単射であることを示せ。

問 53. $[a, b]$ は \mathbb{R} の区間, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は狭義単調かつ連続とすると、 $g: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$, $g(x) = f(x)$ ($x \in [a, b]$) で定義される g は全単射であることを示せ。

問 54. 集合 X の恒等写像 id_X とは何か、説明せよ。

問 55. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき、以下の各命題を証明せよ。

- (1) f と g が単射ならば $g \circ f$ は単射である。
- (2) f と g が全射ならば $g \circ f$ は全射である。
- (3) f と g が全単射ならば $g \circ f$ は全単射である。
- (4) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である。
- (5) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である。
- (6) $g \circ f$ が単射であっても g が単射とは限らない。
- (7) $g \circ f$ が全射であっても f が全射とは限らない。
- (8) $g \circ f$ が単射かつ f が全射ならば g は単射である。
- (9) $g \circ f$ が全射かつ f が単射ならば f は全射である。

問 56. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とするとき、 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ であることを示せ。

問 57. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が全単射とすると、 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ であることを示せ。

問 58. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とするとき、以下の各命題の反例を書け。(1) $g \circ f$ が単射であれば、 g は単射である。(2) $g \circ f$ が全射であれば、 f は全射である。

問 59. $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{4, 5, 6\}$ とするとき、 X から Y への写像をすべて求めよ。そのうち全射であるもの、単射であるものはどれか。

問 60. 次の (1)~(3) について、集合 A から集合 B への写像全体の個数、そのうち全射であるもの、単射であるもの、全単射であるものの個数をそれぞれ求めよ。ただし a, b, c は相異なるものであるとする ($a \neq b, b \neq c, c \neq a$)。

- (1) $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2\}$ (2) $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ (3) $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3\}$

問 61. N を自然数として、 N 本の平行線からなるあみだくじを作り、あみだくじの出発地点と到着地点のそれぞれ 1 から N までの番号を振る。 $X = Y = \{1, \dots, N\}$ とおき、 $x \in X$ から出発してあみだくじをたどって (引いて)、 $y \in Y$ に到着するとき、 $f(x) = y$ と定めることで、写像 $f: X \rightarrow Y$ が得られる。任意のあみだくじに対して、 f が全単射であることを示せ。

問 62.

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とするとき、以下のものを求めよ。

- (a) $f(\{1\})$ (b) $f(\{-2\})$ (c) $f(\{-2, 1\})$ (d) $f([-2, 1])$ (e) $f^{-1}(\{3\})$ (f) $f^{-1}(\{-2\})$
(g) $f^{-1}([-1, 3])$

(2) $f: [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ とするとき、以下のものを求めよ。

- (a) $f(\emptyset)$ (b) $f(\{\pi/6\})$ (c) $f^{-1}(\{-2\})$ (d) $f^{-1}(\{0\})$ (e) $f^{-1}([-2, 0])$ (f) $f([-2, 1])$

(3) 関数 $f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$ の定義域 X を高校数学ルールで定めるとき(終域は \mathbb{R} , つまり $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ とする)、 $f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{0\})$, $f(\{2\})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{2\})$ を求めよ。

(4) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x + \frac{1}{x}$ で定めるとき、以下の間に答えよ。 $f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{1\})$, $f([1/2, 3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}((0, 3])$ を求めよ。

問 63. $f: X \rightarrow Y$ が全単射で、 $B \subset Y$ であるとき、 $f^{-1}(B)$ には、次の (a), (b) 2つの解釈が可能である。どちらで解釈しても同じ集合を表すことを示せ。

(a) f による集合 B の逆像 (教科書の記号では $f^*(B)$)

(b) f の逆写像 f^{-1} による B の像 (教科書の記号では $(f^{-1})_*(B)$)

(つまり $f^*(B) = (f^{-1})_*(B)$ を示せ、ということである。)

問 64. $f: X \rightarrow Y$ とする。 $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して、

$$f(A) := \{y \mid \exists x(x \in A \wedge y = f(x))\}, \quad f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

とおくとき、以下の間に答えよ。

(1) $A_1 \subset A_2 \subset X$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(2) $B_1 \subset B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(3) $A_1, A_2 \subset X$ ならば $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(4) $A_1, A_2 \subset X$ とするとき、 $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ は一般には成り立たない。反例をあげよ。

(5) $A_1, A_2 \subset X$ ならば $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ が成り立つことを示せ。

(6) $f^{-1}(Y) = X$ であることを示せ。

(7) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(8) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

(9) $B_1, B_2 \subset Y$ ならば $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ が成り立つことを示せ。

問 65. (1) f が単射であれば $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ であることを示せ。

問 66. $(\forall A \in 2^X) A \subset f^{-1}(f(A))$ と $(\forall A \in 2^X) A \supset f^{-1}(f(A))$ のうち正しい方を証明せよ。

問 67. $A \subset X, B \subset Y$ とするとき、 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ を証明せよ。

問 68. $f: X \rightarrow Y$ とするとき、以下の命題を証明せよ。

(1) $(\forall x \in X) f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

(2) $(\forall y \in Y) f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$.

(3) $f(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

(4) $f^{-1}(Y) = X$.

問 69. 授業で説明したように、高校数学では暗黙のルールで関数の定義域を定める。そのルールを採用するとき、次の関数の定義域 X と値域 $f(X)$ は何か (集合の形で答えよ)。

(1) $f(x) = \log x$ (2) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$

問 70. 次の各関数 f について、全射であるかどうか、単射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由をつけて答えよ。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x) (x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りに定まらない場合もあるが、どれか一つ答えれば良い。(念のため: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x (x \in \mathbb{R})$ (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sinh x (x \in \mathbb{R})$ (3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cosh x (x \in \mathbb{R})$ (4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tanh x (x \in \mathbb{R})$

5 和文式訳

問 71. 次の各文を記号を使って表せ。

(1) (a) 「 p かつ q 」の否定は、「 p でないか、または q でない」である。
(b) $\sqrt{2}$ は有理数全体の集合に属さない。 (c) A と B の共通部分は空集合である。
(d) A の補集合は、 X と A の差集合に等しい。 (e) f は A から B への写像である。
(f) x が A と B の和集合の要素であるためには、 x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。

(2) (a) 「 p ならば q 」の否定は、「 p であるのに q でない」である。 (b) i は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属する。 (c) A と B の共通部分の補集合は、 A の補集合と B の補集合の和集合に等しい。 (d) 写像 f の x での値は y である。 (e) x が A と B の共通部分の要素であるためには、 x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。

(3) (a) 「 p ならば q 」の否定は、「 p であるが q でない」である。 (b) $\sqrt{3}$ は、実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属する。 (c) 写像 f による a の像は b である。 (d) A と B の合併集合 (和集合) は、 A を含む。 (e) x が A と B の共通部分の要素であるためには、 x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。 (f) $\tan x = 1$ を満たす x が $0 < x < \pi/2$ の範囲に存在する。

- (4) (a) 「 p ならば q 」の否定は、「 p であるが q でない」である。(b) i は複素数であり、実数ではない。(c) A と B の共通部分が A に等しければ、 B は A を含む。(d) x が A と B の合併集合(和集合)の要素であるためには、 x が A の要素であるか、または、 x が B の要素であることが必要十分である。(e) どんな実数 x よりも大きいような実数 y は存在しない。
- (5) (a) 「 p ならば q 」は、「 p でないか、または q である」と同値である。(b) $\frac{1}{2}$ は自然数全体の集合に属さないが、有理数全体の集合に属する。(c) A と B の合併集合(和集合)が B に等しいならば、 A は B に含まれる。(d) 任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して、 $x + y = y + x = 0$ が成り立つ。(e) 空集合の補集合は X であり、 X の補集合は空集合である。
- (6) (a) 「 p ならば q 」は、「 q でないならば p でない」と同値である。(b) -1 は自然数でないが、整数である。(c) A と B の和集合の補集合は、 A の補集合と B の補集合の共通部分に等しい。(d) x が A から B を除いた差集合の要素であるためには、 x が A の要素であり、かつ x が B の要素でないことが必要十分である。(e) ある複素数 w が存在して、任意の複素数 z に対して、 $z + w = w + z = 0$ が成り立つ。
- (7) (a) 「 p ならば q 」は、「 p でないか、または q である」と同値である。(b) -1 は自然数でないが整数であり、 $\frac{1}{2}$ は整数でないが有理数であり、 $\sqrt{3}$ は有理数でないが実数であり、 $4i$ は実数でないが複素数である。(c) A と B の合併集合(和集合)が B に等しいならば、 A は B に含まれる。(d) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して、 $x + y = y$ が成り立つ。(e) 空集合の補集合は X であり、 X の補集合は空集合である。
- (8) (a) i は複素数であるが実数ではなく、 π は実数であるが有理数ではなく、 $\frac{1}{2}$ は有理数であるが整数ではなく、 -2 は整数であるが自然数ではない。(b) 「 p ならば q 」は「 q でないならば p でない」と同値である。(c) A と B の共通部分が空集合ならば、 A は B の補集合に含まれる。(d) ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して $xy = y$ が成り立つ。(e) x が A と B の合併集合の要素であるためには、 x が A の要素であるか、または x が B の要素であることが必要十分である。
- (9) A, B, X, Y は集合、 $f: X \rightarrow Y$ は写像、 $x \in X, y \in Y$ とする。
 (a) 「 p ならば q 」は、「 p でないか、または q である」と同値である。(b) i は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属し、 $\sqrt{2}$ は実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属し、 -1 は整数全体の集合と自然数全体の集合の差集合に属する。(c) A と B の共通部分の補集合は、 A の補集合と B の補集合の合併集合に等しい。(d) 写像 f による x の像は y である。(e) x が A と B の共通部分の要素であるためには、 x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。
- (1) A と B は共通の元を持たない。
- (2) $x + y$ が無理数ならば、 x か y のどちらか一方は無理数である。

6 同値関係

問 72. (1) 空でない集合 X 上の 2 項関係 \sim が同値関係であるとは、次の (i), (ii), (iii) が成り立つことをいう。 , , に当てはまるものを答えよ。

(i) (反射律) $\forall x \in X$ に対して

(ii) (対称律) $\forall x \in X, \forall y \in X$ に対して

(iii) (推移律) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X$ に対して

(2) \sim が空でない集合 X 上の同値関係であるとき、 X の要素 x の属する同値類 $C(x)$ の定義を書け。任意の $x \in X$ に対して $C(x) \neq \emptyset$ である。なぜか答えよ。

(3) ある人が「対称律があれば、 $x \sim y$ とするとき $y \sim x$ 。推移律を用いると $x \sim x$ が導かれる。だから同値関係の定義で反射律は実は余分である。」と言った。正しいだろうか？

問 73. (1) \mathbb{Z} 上の二項関係 \sim を、 $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ は 3 の倍数、と定めるとき、 \sim は \mathbb{Z} 上の同値関係であることを示せ。

(2) 空でない集合 X 上の同値関係 \sim があるとき、 $x \in X$ の (\sim に関する) 同値類を $C(x)$ を書くことにする。(a) $C(x)$ の定義を書け。(b) $x, y \in X$ とするとき、 $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow C(x) = C(y)$ を示せ。

問 74. 空でない集合 U の部分集合のうち空集合でないもの全体を X とおき、 X に属する A, B に対して、

$$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

と定義する。このとき以下の間に答えよ。

(1) $U = \{1, 2, 3\}$ とするとき、 X を求めよ。(2) \sim が X 上の同値関係であることを示せ。

問 75. \mathbb{Z} 上の 2 項関係 \sim を $a \sim b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists m \in \mathbb{Z}) a - b = 5m$ で定義し、 $a \in \mathbb{Z}$ に対して $[a] := \{b \in \mathbb{Z} \mid b \sim a\}$ とおくとき、以下の間に答えよ。

(1) \sim は \mathbb{Z} 上の同値関係であることを示せ。商集合 \mathbb{Z}/\sim はいくつの元からなるか。

(2) $[7] = [2], [-1] = [4]$ であることを示せ。

(3) \mathbb{Z}/\sim で、 $[a][b] := [ab]$ により積が定義できる (これは証明しなくても良い)。 $[a][b] = [1]$ が成り立つとき、 $[b]$ は $[a]$ の逆元と呼ぶことにする。 $[1], [2], [3], [4]$ の逆元をすべて求めよ。

問 76. $X := \mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(m, n) \mid m \text{ は自然数でありかつ } n \text{ は整数}\}$ とおき、 $(a, b), (c, d) \in X$ に対して、

$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ad - bc = 0$$

と定めるとき、以下の間に答えよ。

(1) \sim は X 上の同値関係であることを示せ。

(2) $(a, b) \in X$ の属する同値類を $C(a, b)$ と書く。 X の \sim による商集合 X/\sim の任意の 2 元 α, β に対して、代表元 $(a, b), (c, d)$ を取ったとき、 $C(ac, bc + ad)$ は代表元の取り方によらずに定まることを示せ。