数理リテラシー 問 8　(2017 年 6 月 15 日出題, 6 月　日提出)

__年__ 組____番　氏名______________　　(担当桂田)　裏面利用可

次の各写像の値域を求めよ。

(1) X を空でない集合とするとき、恒等写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$.

(2) $D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$ で定めた D.

(3) X, Y が空でない集合のとき、$\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X((x, y)) = x$ $(x \in X)$ で定めた pr_X.

(4) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ で定めた f.

(5) $X =$ 平面内の多角形全体の集合 として、$g\colon X \to \mathbb{R}$, $g(A) = A$ の面積 $(A \in X)$ で定めた g.

(6) $X = Y = C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $D\colon X \to Y$, $D(f) = f'$ $(f \in X)$ で定めた D. ただし f' は f の導関数である。

(7) X を空でない集合、$A \subset X$ とするとき、$\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$ で定めた χ_A.

(8) X, Y は集合で、$\emptyset \neq X \subset Y$ を満たすとするとき、$i\colon X \to Y$, $i(x) = x$ $(x \in X)$ で定めた i.

裏面 (次のページ) に解答があります。

写像 $f\colon X \to Y$ の値域とは、

$$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

で定義される集合のことで、要するに「写像 f の値すべてを集めた集合」である。

問 8 解答

(1) $\mathrm{id}_X(X) = \{\mathrm{id}_X(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X.$

(2) $D(\mathbb{R}) = \{D(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{0, 1\}.$
(D の値は 0 と 1 以外にない。すなわち $D(\mathbb{R}) \subset \{0,1\}$. 一方 $D(0) = 1$, $D(\sqrt{2}) = 0$ であるから、$D(\mathbb{R}) \supset \{0,1\}$. ゆえに $D(\mathbb{R}) = \{0,1\}$.)

(3) $\mathrm{pr}_X(X \times Y) = \{\mathrm{pr}_X((x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\} = \{x \mid (x,y) \in X \times Y\} = X.$

(4) この f は、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線型写像 $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$ の特別な場合と考えて、「$ad - bc \neq 0$ ならば、f は全単射である」という定理 (線型代数で学ぶはず) を使って全単射、特に全射であるから、$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$, と答えることも出来るが、直接考えても次のように分かる。

任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して、$(y,x) \in \mathbb{R}^2$ であり、$f((y,x)) = (x,y)$ であるから、$(x,y) \in f(\mathbb{R}^2)$. ゆえに $\mathbb{R}^2 \subset f(\mathbb{R}^2)$. 一般に $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2$ であるから、$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(5) $f(X) = \{f(A) \mid A \in X\} =$ 平面上のすべての多角形の面積の集合 $= \{S \in \mathbb{R} \mid S > 0\}$. (この結果は $(0, \infty)$ と書いても良い。)

(6) $D(X) = \{D(f) \mid f \in X\} = \{f' \mid f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\} = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}).$

最後の等式の証明は少し難しいかもしれない (自力でさらっと出来たらエライ)。一応書いておく。

> まず任意の $f \in X$ に題して、$D(f) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) = Y$ であり、$D\colon X \to Y$ である (このことは D を定義するときに確認してあるはず。)。
> 従って、$D(X) \subset Y$ は明らかであるから、$Y \subset D(X)$ を示せば良い。g を $Y = C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ の任意の要素とする。このとき、$f(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ とおくと、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$f'(x) = g(x)$. $g(= f')$ が何回でも微分できることから、f も何回でも微分できる。すなわち $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) = X$. $D(f) = g$ であるから、$Y \subset D(X)$.

(7) $\chi_A(X) = \{\chi_A(x) \mid x \in X\}$ で、各 $x \in X$ に対して、$\chi_A(x)$ は 0 または 1 である。

- $A = X$ の場合、任意の $x \in X$ に対して、$x \in A$ となるので $\chi_A(x) = 1$. ゆえに $\chi_A(X) = \{1\}$.
- $A = \emptyset$ の場合、任意の $x \in X$ に対して $x \notin A$ となるので $\chi_A(x) = 0$. ゆえに $\chi_A(X) = \{0\}$.
- それ以外の場合、すなわち $A \neq \emptyset \wedge A \neq X$ の場合、$\chi_A(X) = \{0, 1\}$.

(8) $i(X) = \{i(x) \mid x \in X\} = \{x \mid x \in X\} = X.$ ■