

数理リテラシー 問 10 (2017 年 7 月 13 日出題, 7 月 17 日提出)

__年__組__番 氏名_____ (担当桂田) 裏面利用可

余裕があれば、裏面の予備問に解答せよ。

- (1) 次の各関数 f について、全射であるかどうか、単射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由 (簡単で良い) をつけて答えよ。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x) (x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りに定まらない場合もあるが、どれか一つ答えれば良い。(念のため: $\tan^{-1} x$ は主値とする。つまり値が $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある。)
- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x (x \in \mathbb{R})$ (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan^{-1} x (x \in \mathbb{R})$ (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2} (x \in \mathbb{R})$
- (2) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$ であれば、 f と g は全単射であることを示せ。本日 (7 月 13 日) に講義で学んだ定理は証明抜きで用いて良い。

練習用予備問題 (添削はしないけれど、解答はWWWに貼ります。)

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- (1) f と g の合成写像 $g \circ f$ の定義を述べよ。
- (2) 以下のことを証明せよ。(i) f と g が単射であれば $g \circ f$ は単射 (ii) f と g が全射であれば $g \circ f$ は全射 (iii) $g \circ f$ が単射であれば、 f は単射 (iv) $g \circ f$ が全射であれば、 g は全射
- (3) 「 $g \circ f$ が全射ならば、 f は全射である。」、「 $g \circ f$ が全射ならば、 g は単射である。」はともに偽な命題である。それぞれ反例を書け。