2017 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2017 年 7 月 27 日 (木曜) 13:30〜15:30 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1.　次の各文を記号のみを用いて表せ (p, q は命題であり、A, B, X, Y は集合、$f\colon X\to Y$ は写像、$x\in X$, $y\in Y$ とする。)
(1)「p ならば q」は、「p でないか、または q である」と同値である。　(2) i は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属し、$\sqrt{2}$ は実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属し、-1 は整数全体の集合と自然数全体の集合の差集合に属する。　(3) A と B の共通部分の補集合は、A の補集合と B の補集合の合併集合に等しい。　(4) 写像 f による x の像は y である。　(5) x が A と B の共通部分の要素であるためには, x が A の要素であり、かつ x が B の要素であることが必要十分である。

2.　(1) 命題論理のド・モルガン律 $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p)\vee(\neg q)$, $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p)\wedge(\neg q)$ を、真理値表を用いて証明せよ。(2) $p\Rightarrow q$ とその対偶は同値である (つまり真偽は一致する) ことを示せ。証明の方法は自分で選んで良い。

3.　真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を ($\neg$ を使わずに) 書いて証明せよ。
(1) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ y>x^2$　(2) $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})\ x\ge y^2$

問 4 以降 (集合と写像の問題)、講義で学んだ論理の法則は証明なしに使って良い。

4.　(1) A と B を集合とするとき、$A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\times B$ の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか。
(2) A を集合とするとき、A^c, 2^A の定義を書け (全体集合は X とする)。また、それぞれ何と呼ぶか。
(3) $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$ とするとき、$A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\times B$, 2^A, $2^{(2^A)}$ を求めよ。

5.　A, B, C が全体集合 X の部分集合とするとき、次の (1), (2) を証明せよ。
(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$　(2) $A\cup B=X\Leftrightarrow B^c\subset A$

6.　(1) $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ を集合族とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。　(2) 集合族 $\{A_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が $(\forall n\in\mathbb{N})\ A_n\supset A_{n+1}$ を満たすならば、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=A_1$ を満たすことを示せ。　(3) $A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0<x<\frac{1}{n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, を求めよ (証明もすること)。

7.　(1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射　(b) 全射　(c) 全単射
(2) $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ とするとき、以下の (i), (ii), (iv) を証明し、(iii) の反例を書け。
(i) f と g が単射であれば、$g\circ f$ は単射である。　(ii) $g\circ f$ が単射であれば、 f は単射である。
(iii) $g\circ f$ が単射であれば、 g は単射である。　(iv) $g\circ f$ が単射かつ f が全射であれば、g は単射である。

8.　(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\tanh x$ $(x\in\mathbb{R})$ で定めた f が、全射ではないこと、単射であることを示せ。また $X\subset\mathbb{R}$ と $Y\subset\mathbb{R}$ をなるべく大きく取って、$g\colon X\to Y$, $g(x)=f(x)$ $(x\in X)$ で定めた g が全単射になるようにせよ。　(2) 空でない集合 X と、X の部分集合 A に対して、写像 $\chi_A\colon X\to\mathbb{R}$ を以下のように定めるとき、χ_A の値域を求めよ。

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in X\setminus A).\end{cases}$$

9.　$f\colon X\to Y$ とする。(1) X の部分集合 A の f による像 $f(A)$, Y の部分集合 B の f による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。(2) $A_1,A_2\subset X$ とするとき、$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$ であることを証明せよ。また $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$ が成り立たないような、f, A_1, A_2 の例をあげよ。(3) $B_1,B_2\subset Y$ とするとき、$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$ を証明せよ。

(まだ解説が少し粗いですがとりあえず公開しておきます。)

解答

1. (1) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$ (2) $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (3) $(A \cap B)^c = (A^c) \cup (B^c)$ (4) $f(x) = y$ (あるいは $f\colon x \mapsto y$ とか $x \overset{f}{\mapsto} y$ でも良い) (5) $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

2. (1) 真理値表は次のようになるので、(どちらも 4 列目と 7 列目が一致することから) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$, $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(2) これも真理値表を使って証明することが出来るが、ここでは、$p \Rightarrow q$ は $(\neg p) \vee q$ と同値であることを元に、同値変形で証明する。

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

ゆえに

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q. \blacksquare$$

3. (1) 真である。任意の実数 x に対して、$y = x^2 + 1$ とおくと、$y \in \mathbb{R}$ であり、$y = x^2 + 1 > x^2$ であるから $y > x^2$. (2) 偽である。否定命題は「$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ x < y^2$」である。(証明) $x = -1$ とおくと、$x \in \mathbb{R}$ であり、任意の実数 y に対して、$y^2 \geq 0 > -1$ であるから、$x < y^2$. $\blacksquare$

4. (1), (2) は略する。

(3)

$$\begin{aligned}
&A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad A \setminus B = \{1\},\\
&A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\},\\
&2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\},\\
&2^{(2^A)} = \Big\{\emptyset,\\
&\qquad \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1,2\}\},\\
&\qquad \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1,2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{2\}, \{1,2\}\},\\
&\qquad \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\},\\
&\qquad \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}\Big\}. \blacksquare
\end{aligned}$$

注意: $B = \{a, b, c, d\}$ のとき、

$$\begin{aligned}2^B = \{&\emptyset,\\ &\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},\\ &\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},\\ &\{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\},\\ &\{a, b, c, d\}\}.\end{aligned}$$

これを $B = 2^A$ について用いた。

5.

(1) 論理に関する分配法則 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ を用いて

$$\begin{aligned}x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in C\\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C\\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)\\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C)\\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)\end{aligned}$$

が得られるから、$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(2)

6.

(1) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$, $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}$.

(2) $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ならば、ある自然数 n が存在して、$x \in A_n$. 仮定から

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{n-1} \supset A_n$$

であるから、$A_1 \supset A_n$. ゆえに $x \in A_1$.

一方 $x \in A_1$ とすると、$n = 1$ に対して $x \in A_n$ であるから、

$$x \in \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

以上から $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$.

(3) この A_n について、$(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ が成り立つから、(2) より $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

実は $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ である。これを示すために背理法を用いる。$\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ と仮定すると、ある x が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x \in A_n$. ゆえに $0 < x < \dfrac{1}{n}$. $x > 0$ であるから、アルキメデスの公理より、ある自然数 N が存在して、$Nx > 1$. これから $x > \dfrac{1}{N}$. これは任意の自然数 n について $x < \dfrac{1}{n}$ であることに矛盾する。ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. ■

7. (1)

(a) $f\colon X \to Y$ が単射であるとは、$(\forall x, x' \in X)\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ が成り立つことをいう。

(b) $f\colon X \to Y$ が全射であるとは、$(\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ y = f(x)$ が成り立つことをいう。

(c) $f\colon X \to Y$ が全単射であるとは、f が単射かつ全射であることをいう。

(2)

(i) f と g が単射であるとする。$x, x' \in X$ が $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ を満たすとすると、$g(f(x)) = g(f(x'))$ であり、g が単射であることから、$f(x) = f(x')$. f が単射であることから $x = x'$. ゆえに $g \circ f$ は単射である。

(ii) f と g が全射であるとする。$z \in Z$ とすると、g が全射であることから、ある $y \in Y$ が存在して $z = g(y)$ が成り立つ。f が全射であることから、ある $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ が成り立つ。このとき $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. ゆえに $g \circ f$ は全射である。

(iii) $X = \{1, -1\}$, $Y = \{1, 0, -1\}$, $Z = \{1, -1\}$, $f\colon X \to Y$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $g\colon Y \to Z$, $g(1) = 1$, $g(0) = 1$, $g(-1) = -1$ とすると、$g \circ f\colon X \to Z$, $g \circ f(1)$=1, $g \circ f(-1) = -1$. $g \circ f$ は単射であるが、g は単射でない ($y = 1$, $y' = 0$ とするとき、$g(y) = g(y')$ であるが $y \neq y'$)。

(iv) $y, y' \in Y$, $y \neq y'$ とする。仮定より f は全射であるから、$x, x' \in X$ が存在して、$y = g(x)$, $y' = g(x')$. $y \neq y'$ であるから、$x \neq x'$ である ($\because$ もしも $x = x'$ ならば、$y = y'$ となり矛盾する)。$g \circ f$ が単射であるから $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$. $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$, $g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$ であるから、$g(y) \neq g(y')$. ゆえに g は単射である。 ■

8. $\tan^{-1}$ と混同している人がいるので、念のため: $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$-e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$ であるから、各辺を $e^x + e^{-x} (> 0)$ で割って、$-1 < \tanh x < 1$. ゆえに、$y = 2$ とするとき、$y \in \mathbb{R}$ であるが、$y = \tanh x$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない。ゆえに f は全射ではない。

任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - (-1)e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

であるから、f は狭義単調増加である。ゆえに f は単射である。

$X = \mathbb{R}$, $Y = (-1, 1)$ とすると、$g\colon X \to Y$ は全単射となる。

(2)

$$\chi_A(X) = \{\chi_A(x) \mid x \in X\} = \begin{cases} \{0\} & (A = \emptyset) \\ \{1\} & (A = X) \\ \{0, 1\} & (A \neq \emptyset \wedge A \neq X). \blacksquare \end{cases}$$

9.

(1) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ の証明。

$y \in f(A_1 \cup A_2)$ とすると、ある $x \in A_1 \cup A_2$ が存在して、$y = f(x)$. $x \in A_1$ または $x \in A_2$ が成り立つが、

- $x \in A_1$ の場合、$y = f(x)$ であるから、$y \in f(A_1)$.
- $x \in A_2$ の場合、$y = f(x)$ であるから、$y \in f(A_2)$.

ゆえに $y \in f(A_1)$ または $y \in f(A_2)$ が成り立つ。ゆえに $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. ゆえに $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

$A_1 \subset A_1 \cup A_2$ であるから $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ であるから $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. ゆえに $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

以上より $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ の反例。$X = \{-1, 1\}$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{-1\}$, $Y = \{1\}$, $f\colon X \to Y$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ とすると、

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(A_1) = \{1\}, \quad f(A_2) = \{1\}, \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$$

であるから、$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

(3) $x \in X$ とするとき、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから、$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. ■