

2017 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2017 年 7 月 27 日 (木曜) 13:30~15:30 施行, 担当 桂田 祐史

ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

1. 次の各文を記号のみを用いて表せ ( $p, q$  は命題であり,  $A, B, X, Y$  は集合,  $f: X \rightarrow Y$  は写像,  $x \in X, y \in Y$  とする。)

(1) 「 $p$  ならば  $q$ 」は、「 $p$  でないか、または  $q$  である」と同値である。 (2)  $i$  は複素数全体の集合と実数全体の集合の差集合に属し、 $\sqrt{2}$  は実数全体の集合と有理数全体の集合の差集合に属し、 $-1$  は整数全体の集合と自然数全体の集合の差集合に属する。 (3)  $A$  と  $B$  の共通部分の補集合は、 $A$  の補集合と  $B$  の補集合の合併集合に等しい。 (4) 写像  $f$  による  $x$  の像は  $y$  である。 (5)  $x$  が  $A$  と  $B$  の共通部分の要素であるためには、 $x$  が  $A$  の要素であり、かつ  $x$  が  $B$  の要素であることが必要十分である。

2. (1) 命題論理のド・モルガン律  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ ,  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$  を、真理値表を用いて証明せよ。(2)  $p \Rightarrow q$  とその対偶は同値である (つまり真偽は一致する) ことを示せ。証明の方法は自分で選んで良い。

3. 真である命題はそれを証明し、偽である命題はその否定命題を ( $\neg$  を使わずに) 書いて証明せよ。

(1)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) y > x^2$  (2)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x \geq y^2$

問 4 以降 (集合と写像の問題)、講義で学んだ論理の法則は証明なしに使って良い。

4. (1)  $A$  と  $B$  を集合とすると、 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B$  の定義を書け。また、それぞれ何と呼ぶか。(2)  $A$  を集合とすると、 $A^c, 2^A$  の定義を書け (全体集合は  $X$  とする)。また、それぞれ何と呼ぶか。(3)  $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}$  とするとき、 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, A \times B, 2^A, 2^{(2^A)}$  を求めよ。

5.  $A, B, C$  が全体集合  $X$  の部分集合とすると、次の (1), (2) を証明せよ。

(1)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  (2)  $A \cup B = X \Leftrightarrow B^c \subset A$

6. (1)  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  を集合族とすると、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  の定義を書け。(2) 集合族  $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  が  $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \supset A_{n+1}$  を満たすならば、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$  を満たすことを示せ。(3)  $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{n}\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とするとき、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  を求めよ (証明もすること)。

7. (1) 写像について次の言葉の定義を述べよ。(a) 単射 (b) 全射 (c) 全単射

(2)  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  とするとき、以下の (i), (ii), (iv) を証明し、(iii) の反例を書け。

(i)  $f$  と  $g$  が単射であれば、 $g \circ f$  は単射である。(ii)  $g \circ f$  が単射であれば、 $f$  は単射である。

(iii)  $g \circ f$  が単射であれば、 $g$  は単射である。(iv)  $g \circ f$  が単射かつ  $f$  が全射であれば、 $g$  は単射である。

8. (1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tanh x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定めた  $f$  が、全射ではないこと、単射であることを示せ。また  $X \subset \mathbb{R}$  と  $Y \subset \mathbb{R}$  をなるべく大きく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) = f(x)$  ( $x \in X$ ) で定めた  $g$  が全単射になるようにせよ。(2) 空でない集合  $X$  と、 $X$  の部分集合  $A$  に対して、写像  $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  を以下のように定めるとき、 $\chi_A$  の値域を求めよ。

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A). \end{cases}$$

9.  $f: X \rightarrow Y$  とする。(1)  $X$  の部分集合  $A$  の  $f$  による像  $f(A), Y$  の部分集合  $B$  の  $f$  による逆像  $f^{-1}(B)$  の定義を記せ。(2)  $A_1, A_2 \subset X$  とするとき、 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  であることを証明せよ。また  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  が成り立たないような、 $f, A_1, A_2$  の例をあげよ。(3)  $B_1, B_2 \subset Y$  とするとき、 $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$  を証明せよ。

## 解答

1. (1)  $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$  (2)  $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \wedge \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \wedge -1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  (3)  $(A \cap B)^c = (A^c) \cup (B^c)$  (4)  $f(x) = y$  (あるいは  $f: x \mapsto y$  とか  $x \xrightarrow{f} y$  でも良い) (5)  $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

2. (1) 真理値表は次のようになるので、(どちらも4列目と7列目が一致することから)  $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$ ,  $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ .

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

$p$	$q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(2) これも真理値表を使って証明することが出来るが、ここでは、 $p \Rightarrow q$  は  $(\neg p) \vee q$  と同値であることを元に、同値変形で証明する。

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv \neg(\neg q) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p) \equiv (\neg p) \vee q \equiv p \Rightarrow q.$$

ゆえに

$$(\neg q) \Rightarrow (\neg p) \equiv p \Rightarrow q. \blacksquare$$

3. (1) 真である。任意の実数  $x$  に対して、 $y = x^2 + 1$  とおくと、 $y \in \mathbb{R}$  であり、 $y = x^2 + 1 > x^2$  であるから  $y > x^2$ . (2) 偽である。否定命題は「 $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x < y^2$ 」である。(証明)  $x = -1$  とおくと、 $x \in \mathbb{R}$  であり、任意の実数  $y$  に対して、 $y^2 \geq 0 > -1$  であるから、 $x < y^2$ . ■

4. (1), (2) は略する。

(3)

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\}, & A \cap B &= \{2\}, & A \setminus B &= \{1\}, \\
 A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}, \\
 2^A &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \\
 2^{(2^A)} &= \left\{ \emptyset, \right. \\
 &\quad \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \\
 &\quad \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 2\}\}, \\
 &\quad \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \\
 &\quad \left. \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \right\}. \blacksquare
 \end{aligned}$$

注意:  $B = \{a, b, c, d\}$  のとき、

$$\begin{aligned} 2^B = \{ & \emptyset, \\ & \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \\ & \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \\ & \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \\ & \{a, b, c, d\} \}. \end{aligned}$$

これを  $B = 2^A$  について用いた。

5.

(1) 論理に関する分配法則  $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$  を用いて

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C & \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

が得られるから、 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

(2)

6.

$$(1) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

(2)  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  ならば、ある自然数  $n$  が存在して、 $x \in A_n$ . 仮定から

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_{n-1} \supset A_n$$

であるから、 $A_1 \supset A_n$ . ゆえに  $x \in A_1$ .

一方  $x \in A_1$  とすると、 $n = 1$  に対して  $x \in A_n$  であるから、

$$x \in \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

以上から  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1$ .

(3) この  $A_n$  について、 $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \supset A_{n+1}$  が成り立つから、(2) より  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ .

実は  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$  である。これを示すために背理法を用いる。 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$  と仮定すると、ある  $x$  が存在し

て、任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $x \in A_n$ . ゆえに  $0 < x < \frac{1}{n}$ .  $x > 0$  であるから、アルキメデスの公理より、ある自然数  $N$  が存在して、 $Nx > 1$ . これから  $x > \frac{1}{N}$ . これは任意の自然数  $n$  について  $x < \frac{1}{n}$  であること

に矛盾する。ゆえに  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ . ■

7. (1)

- (a)  $f: X \rightarrow Y$  が単射であるとは、 $(\forall x, x' \in X) f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$  が成り立つことをいう。  
 (b)  $f: X \rightarrow Y$  が全射であるとは、 $(\forall y \in Y) (\exists x \in X) y = f(x)$  が成り立つことをいう。  
 (c)  $f: X \rightarrow Y$  が全単射であるとは、 $f$  が単射かつ全射であることをいう。

(2)

- (i)  $f$  と  $g$  が単射であるとする。  $x, x' \in X$  が  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$  を満たすとする、  $g(f(x)) = g(f(x'))$  であり、  $g$  が単射であることから、  $f(x) = f(x')$ 。  $f$  が単射であることから  $x = x'$ 。 ゆえに  $g \circ f$  は単射である。  
 (ii)  $f$  と  $g$  が全射であるとする。  $z \in Z$  とすると、  $g$  が全射であることから、 ある  $y \in Y$  が存在して  $z = g(y)$  が成り立つ。  $f$  が全射であることから、 ある  $x \in X$  が存在して  $y = f(x)$  が成り立つ。 このとき  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ 。 ゆえに  $g \circ f$  は全射である。  
 (iii)  $X = \{1, -1\}$ ,  $Y = \{1, 0, -1\}$ ,  $Z = \{1, -1\}$ ,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $g(1) = 1$ ,  $g(0) = 1$ ,  $g(-1) = -1$  とすると、  $g \circ f: X \rightarrow Z$ ,  $g \circ f(1) = 1$ ,  $g \circ f(-1) = -1$ 。  $g \circ f$  は単射であるが、  $g$  は単射でない ( $y = 1, y' = 0$  とするとき、  $g(y) = g(y')$  であるが  $y \neq y'$ )。  
 (iv)  $y, y' \in Y$ ,  $y \neq y'$  とする。 仮定より  $f$  は全射であるから、  $x, x' \in X$  が存在して、  $y = g(x)$ ,  $y' = g(x')$ 。  $y \neq y'$  であるから、  $x \neq x'$  である ( $\because$  もしも  $x = x'$  ならば、  $y = y'$  となり矛盾する)。  $g \circ f$  が単射であるから  $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ 。  $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$ ,  $g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x')$  であるから、  $g(y) \neq g(y')$ 。 ゆえに  $g$  は単射である。 ■

8.  $\tan^{-1}$  と混同している人がいるので、念のため:  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 。

- (1) 任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、  $-e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$  であるから、各辺を  $e^x + e^{-x} (> 0)$  で割って、  $-1 < \tanh x < 1$ 。 ゆえに、  $y = 2$  とするとき、  $y \in \mathbb{R}$  であるが、  $y = \tanh x$  を満たす  $x \in \mathbb{R}$  は存在しない。 ゆえに  $f$  は全射ではない。

任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x - (-1)e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \left( \frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \frac{1}{\cosh^2 x} > 0$$

であるから、  $f$  は狭義単調増加である。 ゆえに  $f$  は単射である。

$X = \mathbb{R}$ ,  $Y = (-1, 1)$  とすると、  $g: X \rightarrow Y$  は全単射となる。

(2)

$$\chi_A(X) = \{\chi_A(x) \mid x \in X\} = \begin{cases} \{0\} & (A = \emptyset) \\ \{1\} & (A = X) \\ \{0, 1\} & (A \neq \emptyset \wedge A \neq X) \end{cases} \blacksquare$$

9.

- (1)  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ ,  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ 。

- (2)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$  の証明。

$y \in f(A_1 \cup A_2)$  とすると、 ある  $x \in A_1 \cup A_2$  が存在して、  $y = f(x)$ 。  $x \in A_1$  または  $x \in A_2$  が成り立つが、

- $x \in A_1$  の場合、  $y = f(x)$  であるから、  $y \in f(A_1)$ 。
- $x \in A_2$  の場合、  $y = f(x)$  であるから、  $y \in f(A_2)$ 。

ゆえに  $y \in f(A_1)$  または  $y \in f(A_2)$  が成り立つ。ゆえに  $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ 。ゆえに  $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

$A_1 \subset A_1 \cup A_2$  であるから  $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。同様に  $A_2 \subset A_1 \cup A_2$  であるから  $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。ゆえに  $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。

以上より  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ 。

$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$  の反例。  $X = \{-1, 1\}$ ,  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{-1\}$ ,  $Y = \{1\}$ ,  $f: X \rightarrow Y$ ,  $f(1) = 1$ ,  $f(-1) = 1$  とすると、

$$f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(A_1) = \{1\}, \quad f(A_2) = \{1\}, \quad f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\}$$

であるから、 $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ 。

(3)  $x \in X$  とするとき、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

であるから、 $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ . ■