数理リテラシーのイントロ

桂田 祐史
katurada＠meiji.ac.jp (＠は ASCII の@), 910 号室

2017 年 4 月 13 日

数理リテラシーとは、数理 (ここでは数学という意味) を学ぶために必要な (最低限度の) 読み書き能力という意味[1]。具体的には、論理、集合、写像という現代数学を記述するための言語を学ぶための講義科目である。

何のためにあるか？私見では、高校では「公式主役の数学」をしていたが、大学では「定理が主役の数学」をする。定理は命題で、そのための言葉・文法があり、それを用いて読み書きが出来る必要がある。

例えば、微積分で重要な極限の議論をするには、述語論理の言葉を使いこなすことが必要不可欠である (秋学期の「数学の方法」で強調されるはず)。

この辺のことについて、シラバスの参考書にあげた新井 [1] は上手に説明されている。著者自身によるコラム (『「数学は言葉」の対象は？』[2]) はネットで読めるので見てみよう (リンクを張っておいた)。

1 自己紹介

メールアドレス: katurada＠meiji.ac.jp (＠は半角の @ にする)
研究室: 910 号室 (平日はほぼ毎日来るはず)
講義の WWW サイト: http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/
気軽に質問に来よう。

2 どんなふうに授業をするか

- 何をどういう順番で学ぶかは、シラバスを見よう。
- 出席を取る (大学の原則「2/3 以上出席が期末試験受験の必要条件」)。
  心構え: 毎回遅刻せず出席 (この辺は最近真面目な人が多いので大丈夫か)
- (初回と中間試験以外) ほぼ毎回宿題を出す。授業中に演習時間はほとんど取れないので。
  きちんと提出したかどうかを得点化する。成績評価の 20% をしめる。
  締切月曜 13:00, 提出先 低層棟 3 階事務室前のレポート提出箱 (1 組と間違えないように)
  心構え: 自分で解く。相談しても質問しても良いけれど最後は自力。写すな頭を通せ。
  (他人がトレーニングしても仕方ない)
  心構え: 添削されたものを読んで理解すること。

[1] “literacy” とは「読み書き能力」のこと (1880 年頃定着)。万人に必要な基礎能力。
[2] http://researchmap.jp/jo8s7ljcd-78/

- 中間試験をする (参考: 中間試験は半ば過ぎ, 期末試験は 7 月下旬)
期末試験の範囲も「全部」— 実は中間試験は期末試験の練習をかねている。
中間で失敗して期末で挽回した人が多い。中間で成功したが期末で伸びなかった人も少なくない。
心構え: 真剣に準備する。失敗してもあきらめない。成功しても油断しない。間違えずに受験する (冗談のようだけど)。
中間試験の答案は返却する予定 (実は返却するのは珍しい？)、良く復習すること。

3 自習の仕方

- 予習・復習は有益。1 週間に 1 コマだけは頭が相当良くないと無理だ。
一般論を言うと、(教科書ないなどの理由で) 予習の難しい講義もあるが、この講義は教科書もあるし、昨年度の講義ノートも公開しているし、予習は出来るはず。でもどちらかと言うと復習の方を勧める (どちらか一方ならば必ず復習)。

- 教科書、ノートを読むのが基本。

  テキストやノートを読みながら (あるいは講義を聴きながら)、
  「この言葉・記号は何だろう？」「これはなぜ？」と自問自答する習慣をつけよう。

  自分の理解を確かめる。疑問点を掘り出して「なぜだろう」と自問自答したり、あら筋をまとめてみる。人に説明するのも効果がある。

- 練習問題 (ドリル) を解くことで勉強する、というやり方が身についている人は多いだろう。高校までと違って、それが有効でない場合もある。

  (科目によっては、手頃な練習問題がなかったりする。1,2 年生のうちはまだ結構あるけれど、段々減っていく。計算問題 1 つ解くのに 1 時間かかったりするようになるので、数をこなして覚えるやり方は限界がある。)

- この講義は語学に近いところがあって、体を通すことにも意味がある。目で見て、声に出して読んだり、手で書いたりすること。

  コピペは意味がないけれど、写経(しゃきょう)には意味がある[3]。

- 本について
  - 教科書: 中島匠一, 集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版
  - 参考書: 集合、写像、論理というキーワードのいずれかがタイトルに入っている本。
  「数理リテラシー」という本はないと思ったら、あった (笑)。でも全然違うみたい。
  シラバスに何冊かあげておいたので、図書館参考書コーナーに置いてあるかも。
  「集合と位相」は範囲外の位相が入っているけれど良いかも。
  中内伸光, ろんりの練習帳, 共立出版 (2002), ¥2484 はオヤジギャグが寒いけど、良いかも (論理、集合、写像を含んでいる)。
  - 図書館、書店 (時々大型の書店に以降、近所のあおい書店もまあまあ) に親しもう。

- ネットで調べるのは結構難しい。

[3] 写経 — 供養などのため、経文を書き写すこと。こういう言葉を使うのは、半分は冗談だけど、半分はマジです。もちろん内容の理解も必要だけれど、表現の仕方も身につける必要があるので、ただ真似をするのも有益です。

- 情報の質の問題。ノイズが多い (玉石混交)。ウィキペディアは怪しい。英語の Wikipedia はかなり良いことが多い。
- 一つの言葉が色々な意味に使われる。ある意味で正しくても、適当でない場合が結構多い。自分の頭で、自分が考えているケースに該当するか、チェックする必要がある (分からないで調べているときにそれをするのは難度が高い)。

• WWW サイト[4] (Oh-o! Meiji からリンクを張っておく) に資料や宿題などを置く。
→ 欠席したときの宿題のプリントは自分で入手出来る。

以下に書いたことは、時間の埋め草
とっとと、内容に入った方が良いだろう。
以下書いてあることは大事だけれど、初回でなくても良い。

4 講義内容のイントロ

- 具体的な内容は、論理、集合、写像。
- ちなみに理工学部数学科では、ほぼ同じ内容を「数学演習」という講義で行なっている。
- なぜ必要か？
大学で学ぶ数学と、高校までの数学と違いがあるから。どう違う？やり方がかなり違う。
  - 良く言われる悪口「大学数学のテキストは、定義、定理、証明の羅列 (で分かり辛い)」 — 一面の真実が潜む。大学の数学のテキストは、用語・記号の定義、定理とその証明、例、＋ α が主な要素。
  - 数学的な議論は、定理をつないでいくもので、定理は原則としてすべて証明される、と覚悟すること。
「証明は覚えないといけませんか？」—「証明は覚えたりするものではありません」
  - (例えば) lim 実は高校の数学では、極限を定義していない。だから極限に関する定理の証明も出来ない (していない)。$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ という公式を知っていても、仮定を覚えていない人は多い。「$\lim_{n\to\infty}a_n$, $\lim_{n\to\infty}b_n$ が存在すれば、$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ も存在して、$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ が成り立つ。」とすると定理になる。「次の極限を求めなさい」という問題を、例題を参考にして解くことで、漠然と極限概念を掴んで、良く似た問題は解けるようになっているが、定義はしていなくても気づかない、証明をしていなくても気づかない、そういう調子で数学を教えられて来た。言い換えると、高校数学では「寝た子を起こすな」という方針でやっていた。

定義とはなにか, 実は知らない人が多いのかも

コラム [1] では、「○○が線形空間であることを示せ」のような問題が敬遠されがちであることが指摘されている。この問題を解くには、まず線形空間の定義を思い出し、そこに現れる条件が満たされることを一つ一つチェックすることになる。高校までの数学で、定義を軽視しているのかもしれない。[1] の第 1 章は「定義とは何か」である。そういう基本的なところから話を始めるべきなのかもしれない。

[4] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/

5　高校で学んだ習慣のうち、改めて欲しいこと

記号については、あまり堅苦しいことは言いたくなくて、比較的ルーズにやってきたのですが、かえって学生の混乱の種になっているような気がするので、例年よりも厳格化するつもりです。

(以下、4 月最初に聞いても分からないところもあるから、適当に選んでしゃべる。)

- 命題 p の否定を $\overline{p}$ と書くこと。この講義では $\neg p$ と書きます。$\overline{p}$ と書く人も少なくないので、$\overline{p}$ と書くのを禁止するのは気が引けるのですが、その場の習慣に合わせられるようになるのも大事です。

- 集合 A の補集合を $\overline{A}$ と書くこと。この講義では A^c と書きます。後の授業で、集合 A に対して $\overline{A}$ は A の閉包を表す場合が多いので、A の補集合を $\bar{A}$ と書くのは、高校生の勉強の相手をするとき以外は使わないのが無難です。

- 写像というものを学び、その際に写像は関数の一般化であり、高等学校で学ぶ関数は写像である、と言いますが、記法については注意が必要で、高校流をやめるべきところがあります。高校では、

  - 関数を表すために $y = x^2 + 2x + 3$ のように、独立変数 (この場合は x) 以外に、従属変数を表す文字 (この場合は y) を用いて表現する
  - 定義域を省略することが多く、終域については言及すらされない

  場合が多いですが、

  $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 2x + 3$$

  のような記法を用いましょう。最初の $\mathbb{R}$ が定義域で、後の $\mathbb{R}$ が終域です。

- 演算の結合の優先順位を指定するために、中括弧 (braces) { } を用いること。普通の括弧 ( ) (parenthesis) と大括弧 [ ] (brackets) で済ませること。{ } は集合や列を表す場合に多用され、特に集合を表す場合は、{ } のある無しは重大な違いが生じます。

  $$1 \neq \{1\}, \quad \emptyset \neq \{\emptyset\}, \cdots$$

  この講義では、演算の結合の優先順位を指定するために { } を使うのは厳禁

- あいまいな「において」の利用。辞書を引くと、「において」には、次のような意味があると分かります。

  (1) 動作・作用の行われる場所や<u>時間など</u>を表す。
  (2) 事物について、それに関連することを表す。

  大学の数学の教科書にも「において」，「おける」という語句は良く出て来ます。大抵の場合は英語の “at” に対応するもののようです。ある特定の場所を表していて、辞書の (1) に相当するわけですね。

  ところで君達学生の書く文章を見ると、(2) の意味の「において」と考えられる表現がかなり出て来ます。

参考文献

[1] 新井紀子：数学は言葉 — math stories, 東京図書 (2009), 数理論理の専門家によって比較的最近書かれた本であり、 とても参考になる。