問 8 の答 (結果のみ) は既にプリントを渡してあるが、実際に君達の答案を見てみたら苦戦している人が多かったので (少し抽象的な例なので、分かりにくい？)、少し詳しめの解説を用意した。

問 8 解説　一般に写像 $f\colon X\to Y$ の値域は、$f(X)$ と表せる。(1)〜(8) の各問で、写像 (対応) を表す記号と定義域を表す記号を読み取って、$f(X)$ を適当なものに置き換える。例えば (2) では、$D\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であるから、値域を表す式は $D(\mathbb{R})$ である。

(1) $\mathrm{id}_X(X)=\{\mathrm{id}_X(x)\mid x\in X\}=\{x\mid x\in X\}=X.$

(2) $D(\mathbb{R})=\{D(x)\mid x\in\mathbb{R}\}=\{0,1\}.$

(3) $\mathrm{pr}_X(X\times Y)=\{\mathrm{pr}_X((x,y))\mid (x,y)\in X\times Y\}=\{x\mid (x,y)\in X\times Y\}=X.$

(4) この f について $ad-bc=1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2\neq 0$ であるから、授業で説明したことから $f(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2.$

(授業では、$ad-bc\neq 0$ のとき、$f(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$ となる理由を説明しなかったので、ここで説明しておく。$f(\mathbb{R}^2)\subset\mathbb{R}^2$ は明らかだから、$\mathbb{R}^2\subset f(\mathbb{R}^2)$ を示そう。$(p,q)\in\mathbb{R}^2$ とするとき、連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は、係数行列が逆行列を持つので解 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ を持つ。このとき $f((x,y))=(p,q)$. ゆえに $(p,q)\in f(\mathbb{R}^2)$. ゆえに $\mathbb{R}^2\subset f(\mathbb{R}^2)$.)

(5) $f(X)=\{f(A)\mid A\in X\}=\{f(A)\mid A$ は多角形$\}=$ すべての多角形の面積の集合 $=(0,\infty)$.

(6) $D(X)=\{D(f)\mid f\in X\}=\{f'\mid f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\}=C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}).$

(最後の等式の証明は少し難しいかも。一応書いてみる。$Z:=\{f'\mid f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})\}$ とおき、$Z=C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ を証明するのが目標である。(a) $g\in Z$ とすると、$(\exists f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}))\ g=f'$. f が何回でも微分できることから、g も何回でも微分できる。すなわち $g\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. (b) $g\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ とする。このとき、$f(x):=\int_0^x g(t)\,dt$ とおくと、任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して、$f'(x)=g(x)$. g が何回でも微分できることから、f も何回でも微分できる。すなわち $f\in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. ゆえに $g\in Z$. (a), (b) から $Z=C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.)

(7) $\chi_A(X)=\{\chi_A(x)\mid x\in X\}$ で、各 $x\in X$ に対して、$\chi_A(x)$ は 0 または 1 である。$\chi_A(X)=\{0,1\}$ と回答した人が多かったが、それは実はちょっと穴がある。

- $A=X$ の場合、任意の $x\in X$ に対して、$x\in A$ となるので $\chi_A(x)=1$. ゆえに $\chi_A(X)=\{1\}$.
- $A=\emptyset$ の場合、任意の $x\in X$ に対して $x\notin A$ となるので $\chi_A(x)=0$. ゆえに $\chi_A(X)=\{0\}$.
- それ以外の場合、すなわち $A\neq\emptyset\wedge A\neq X$ の場合、$\chi_A(X)=\{0,1\}$.

(8) $i(X)=\{i(x)\mid x\in X\}=\{x\mid x\in X\}=X.$

問 10 解説

(1) (a) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

- f は全射でない。
  証明: $-1\le\cos x\le 1$ であるから、$y=2$ とおくと、$y\in\mathbb{R}$ かつ $f(x)=y$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ は存在しない。ゆえに f は全射ではない。
  別証明: $f(\mathbb{R})=[-1,1]$ であることが分かる (これを厳密に証明するのは、少し手間がかかるが、現時点ではこの辺は高校数学レベルで考えれば良い)。ゆえに $f(\mathbb{R})\neq\mathbb{R}$ であるから、f は全射ではない。
- f は単射でない。(証明: $f(0)=1=f(2\pi)$ であるから。)

- f は全単射でない。証明はたとえば「f は全射でないから。」もちろん「f は単射でないから。」としても良い。
- $X = [0,\pi]$, $Y = [-1,1]$ とすると、$g\colon X \to Y$, $g(x) = f(x)$ $(x \in X)$ は全単射である。($g(0) = 1$, $g(\pi) = -1$ と中間値の定理から、$g(X) \supset [-1,1]$. $g(X) \subset [-1,1]$ は明らかであるから、$g(X) = [-1,1]$. ゆえに g は全射である。一方、$x \in (0,\pi)$ に対して、$g'(x) = -\sin x < 0$ であるから、g は狭義単調減少である。ゆえに g は単射である。)

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$ $(x \in \mathbb{R})$

- f は全射である。
証明 1: $y = \sinh x$ の増減を調べれば、$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ であることが分かる。厳密にやると以下のようになる。$x \to \infty$ のとき、$e^x \to \infty$, $e^{-x} \to 0$ であるから $\sinh x \to \infty$. また $x \to -\infty$ のとき、$e^x \to 0$, $e^{-x} \to \infty$ であるから、$\sinh x \to -\infty$. このことと連続性から、中間値の定理を用いると、$f(\mathbb{R}) \supset \mathbb{R}$ が証明できる。ゆえに $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
証明 2: 任意の $y \in \mathbb{R}$ に対して、$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ を解いて、$x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$. すなわち $x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ とおくと、$\sinh x = y$. 実際、$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} = \dfrac{-y + \sqrt{y^2+1}}{y^2+1-y^2} = -y + \sqrt{y^2+1}$. ゆえに $f(x) = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = y$.
- f は単射である。実際、$f'(x) = \cosh x \geq 1 > 0$ であるから、f は狭義単調増加であり、単射である。
- f は全単射である。

(c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cosh x$ $(x \in \mathbb{R})$

- f は単射でない。実際、f は偶関数であるから、例えば $f(1) = f(-1) = \dfrac{e + 1/e}{2}$.
- f は全射でない。実際、$y = \cosh x$ の増減を調べれば、$f(\mathbb{R}) = [1,\infty) \neq \mathbb{R}$ であることが分かる。厳密にすると以下の通り。偶関数であるから $[0,\infty)$ で調べる。$f'(x) = \sinh x > 0$ $(x \in (0,\infty))$ であるから、$[0,\infty)$ で狭義単調増加。$f(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, それと連続性から、中間値の定理を用いると、$f(\mathbb{R}) = [1,\infty)$.
- f は全単射でない。証明は「f は全射でないから。」または「f は単射でないから。」
- $X = [0,\infty)$, $Y = [1,\infty)$ とすると、$g\colon X \to Y$, $g(x) = f(x)$ $(x \in X)$ は全単射である。($g(0) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ と中間値の定理から、$[1,\infty) \subset g([0,\infty))$. 逆向きは明らかであるから、$g([0,\infty)) = [1,\infty)$. 一方、$g'(x) = \sinh x > 0$ $(x \in (0,\infty))$ であるから、g は狭義単調増加であるので、単射である。)

(2) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ は全単射であるから、g は全射かつ f は単射である。一方、$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ は全単射であるから、f は全射かつ g は単射である。ゆえに f と g は全単射である。

おまけ　$f\colon I \to \mathbb{R}$ が単調増加とは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I : x_1 \leq x_2) \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

を満たすことをいう。この条件は次のように書いても同じである。

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I : x_1 < x_2) \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

一方、$f\colon I \to \mathbb{R}$ が狭義増加とは、

$$(\forall x_1 \in I)(\forall x_2 \in I : x_1 < x_2) \quad f(x_1) < f(x_2)$$

を満たすこと。

「f が狭義単調増加であれば f は単射である。」という定理を紹介したが、「f が単調増加であれば f は単射である。」という命題は偽である。