

数理リテラシー 問 11 (2016 年 7 月 21 日出題, 提出はなし)

__年__組__番 氏名_____ (担当桂田) 裏面に答あります

$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ ($x \in [-\pi, \pi]$) で定めるとき, 以下の問に答えよ。

- (1) f の逆写像 f^{-1} は存在しない。その理由を述べよ。
- (2) $A \subset [-\pi, \pi]$, $B \subset \mathbb{R}$ に対して、 $f(A)$, $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。それぞれ何と呼ばれるか。
- (3) $f\left(\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\right)$, $f(\{0, \pi\})$, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)$ を求めよ (f を含まない式で表せ)。

解答

(1) $0, \pi \in [-\pi, \pi]$, $0 \neq \pi$, $f(0) = f(\pi)$ であるから、 f は単射でない (ゆえに当然 f は全単射でない)。ゆえに f の逆写像は存在しない。
(念のため: $x := 0$, $x' := \pi$, $X := [-\pi, \pi]$ とすると、 $x \in X \wedge x' \in X \wedge x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$ である。)

(2) $f(A) = \{y \mid (\exists x \in A)y = f(x)\}$ またはその短縮形 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. これは f による A の像と呼ばれる。

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. これは f による B の逆像と呼ばれる。

(3)

$$f(\{\pi/2\}) = \{1\}, \quad f(\{0, \pi\}) = \{0\}, \quad f([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1].$$

$$f^{-1}(\{1/2\}) = \{\pi/6, 5\pi/6\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \emptyset, \quad f^{-1}([1/2, 2]) = [\pi/6, 5\pi/6].$$