

数理リテラシー 問 10 (2016年7月14日出題, 7月18日提出)

__年__組__番 氏名_____ (担当桂田) 裏面利用可

余裕があれば、裏面の予備問に解答せよ。

- (1) (前回解答しなかった人は今回解答して下さい。) 次の各関数 f について、全射であるかどうか、単射であるかどうか、全単射であるかどうか、それぞれ理由をつけて答えよ。全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y, g(x) := f(x) (x \in X)$ で定まる関数 g が全単射であるようにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。条件を満たす X, Y が一通りに定まらない場合もあるが、どれか一つ答えれば良い。(念のため: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)
- (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x (x \in \mathbb{R})$ (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sinh x (x \in \mathbb{R})$ (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cosh x (x \in \mathbb{R})$
- (2) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$ とする。 $g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$ であれば、 f と g は全単射であることを示せ。7月14日に講義で学んだ定理は証明抜きで用いて良い。

練習用予備問題 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ とする。

- (1) f と g の合成写像 $g \circ f$ の定義を述べよ。
- (2) 以下のことを証明せよ。(i) f と g が単射であれば $g \circ f$ は単射 (ii) f と g が全射であれば $g \circ f$ は全射 (iii) $g \circ f$ が単射であれば、 f は単射 (iv) $g \circ f$ が全射であれば、 g は全射
- (3) $g \circ f$ が全射であっても、 f は全射であるとは限らない。また $g \circ f$ が全射であっても、 g が単射であるとは限らない。それぞれ反例を書け。