

数理リテラシー 問9 (2015年7月2日出題, 7月6日13:00まで提出)

__年__組__番 氏名_____ (担当桂田) 裏面利用可

(1) $f: X \rightarrow Y$ とする。 f が単射, 全射, 全単射であるとはどういうことか。それぞれ条件を記せ。

(2) 次の各関数 f について、以下のことを答えよ。

- 全単射であるかどうか調べよ (全射であるかどうか、単射であるかどうか、それぞれ理由をつけて答えよ)。
- 全単射でない場合、定義域 $X(\subset \mathbb{R})$ と終域 $Y(\subset \mathbb{R})$ を適当に小さく取って、 $g: X \rightarrow Y$, $g(x) := f(x)$ ($x \in X$) で定まる関数 g が全単射であらうにせよ。ただし X はなるべく幅の大きな区間を選ぶこと。答が一通りでない場合もあるが、一つ答えれば良い。

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) (b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$ ($x \in \mathbb{R}$) (念のため:
 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である) (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$)