数理リテラシー 宿題 6　(2015 年 5 月 28 日出題)

__ 年 __ 組 ____ 番　氏名 ______________　　(担当桂田)　裏面利用可

(1) 各自然数 n に対して、$A_n := \left(-1-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right)$, $B_n := \left[-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ とおくとき、(a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, (b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, (c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, (d) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ を求めよ。余裕があれば、(a), (b) の結果を証明せよ。

(2) A と B を任意の集合とするとき、$A\cap B=\emptyset \Leftrightarrow A\subset B^c$ が成り立つことを証明せよ。

- 前回配ったプリントの (2) の証明の最後

  $x\in B^c$. これは $x\in B$ と矛盾する。ゆえに $A\subset B^c$.

  は

  $x\in B^c$. これは $x\in B$ と矛盾する。ゆえに $A\cap B=\emptyset$.

  の書き間違いです。混乱させたかもしれません。すみません。

- n が小さいときに集合を具体的に書いてみよう、と言ってある。(高校数学段階でも、例えば数列などでそういうことは言われているはずだ。) それをせずに間違えた答だけ書いてある答案は、ちょっと情けない。

- 相変わらずカンマ “,” をまともに書かない人が多い。日本語の「、」は、使うべきか使わないべきか曖昧で、好みの部分も大きいが、カンマはそうでない。カンマが必要なときに書かないのは、日本語の文章で「。」を書くべきところで書かないのと同じくらい変だと思って下さい。

- ヴェン図では証明にならない。

- 「共通部分は存在しない」と書いた人が多いけれど、任意の集合 A, B に対して、A と B の共通部分 $A\cap B$ はいつでも存在する。それは普通は「共通部分は空集合である」の書き間違いとしか受け取ってもらえない。「共通部分は存在しない」と書いてある答案は、どうも日常語的な感覚で議論しているような雰囲気があって、意図がほとんど読み取れませんでした。

- 一般に次の命題が成り立つ。「$A_1\supset A_2\supset\cdots$ ならば、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$.」「$B_1\subset B_2\subset\cdots$ ならば、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_1$.」これはすぐ分かって欲しいし、証明も出来て欲しい。練習と思って証明を書いてみよう。(1) の (a) と (d) は、これからすぐ分かる。

- (1) の (b) と (c) は、無限個の集合の話なので、慣れないうちは少し難しいかも。(,) は [,] になって、[,] が (,) になるのは、不思議に感じられるかも (無限個でなければそうならない)。じっくりと考えて下さい。

- $A\cap B=\emptyset$ は、$A^c\cup B^c=X$ と同値であるから (証明できますか？)、(2) は、$A^c\cup B^c=X \Leftrightarrow A\subset B^c$ を示すという手もある。その方が考えやすいかもしれない (空集合の議論は分かりにくいので)。

実は (1) で B_n の定義は、印刷直前にとっさに変更したのですが、$B_1=[0,0]$ となってしまうのを見落としていた。変ですね。多くの学生は $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 0\}=\{0\}$ と解釈してくれて、問題として成立したけれど、$B_n=\left[-2+\dfrac{1}{n},2-\dfrac{1}{n}\right]$ のようにすべきだった。その場合は次のようになる。

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_1 = (-2,2),\qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = [-1,1].$$

問 6 解答

(1) まず $A_1=(-2,2)$, $A_2=(-3/2,3/2)$, $A_3=(-4/3,4/3)$, $A_4=(-5/4,5/4)$, $\cdots$ であり、$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset A_{n+1}\supset\cdots$ で、区間の左端と右端はそれぞれ -1 と 1 に近づく。

また $B_1=[0,0]=\{0\}$, $B_2=[-1/2,1/2]$, $B_3=[-2/3,2/3]$, $\cdots$ であり、 $B_1\subset B_2\subset\cdots$ であり、区間の左端と右端はそれぞれ -1 と 1 に近づく。

(a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-2,2)$　(b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [-1,1]$　(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = (-1,1)$　(d) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B_1 = \{0\}$

(a) の証明。

(i) x を $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とする。ある自然数 n が存在して、 $x\in A_n$. $A_n\subset A_1$ であるから、$x\in A_1$. ゆえに $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\subset A_1$.

(ii) x を A_1 の任意の要素とする。($n=1$ とおくと、$n\in\mathbb{N}$ かつ $x\in A_n$ であるから) $(\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n$ が成立する。ゆえに $x\in\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1\subset\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) から $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 = (-2,2)$.

(b) の証明。

(i) x を $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の任意の要素とする。任意の自然数 n に対して、$x\in A_n=(-1-1/n,1+1/n)$. ゆえに $|x|<1+1/n$. $|x|\le 1$ を証明するため、背理法を用いる。$|x|>1$ と仮定すると、$|x|-1>0$ であるから、アルキメデスの公理によって、$(\exists N\in\mathbb{N})\ N(|x|-1)>1$. これから $|x|>1+\dfrac{1}{N}$. これは矛盾である。ゆえに $|x|\le 1$. すなわち $x\in[-1,1]$. ゆえに $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\subset[-1,1]$.

(ii) x を $[-1,1]$ の任意の要素とする。任意の自然数 n に対して、$\dfrac{1}{n}>0$ であるから、$-1-\dfrac{1}{n}<-1\le x\le 1<1+\dfrac{1}{n}$. ゆえに $x\in(-1-1/n,1+1/n)=A_n$. ゆえに $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $[-1,1]\subset\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) から $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=[-1,1]$. ■

(2) ($\Rightarrow$) $A\cap B=\emptyset$ と仮定する。x を A の任意の要素とする。$x\in B^c$ を示すため、背理法を用いる。$x\in B^c$ でないと仮定すると、$x\in B$. ゆえに $x\in A\cap B$ であるので、$A\cap B\ne\emptyset$. これは仮定に矛盾する。ゆえに $x\in B^c$ である。従って $A\subset B^c$.

($\Leftarrow$) $A\subset B^c$ と仮定する。$A\cap B=\emptyset$ を示すため、背理法を用いる。$A\cap B\ne\emptyset$ とすると、$x\in A\cap B$ を満たす x が存在する。ゆえに $x\in A$ かつ $x\in B$ である。前者と $A\subset B^c$ から $x\in B^c$. これは $x\in B$ と矛盾する。ゆえに $A\cap B=\emptyset$. ■

(別解)

$$\begin{aligned}
A\cap B=\emptyset &\Leftrightarrow \neg\left((\exists x)x\in A\cap B\right)\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x\in A\wedge x\in B)\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg((x\in A)\wedge(x\in B))\\
&\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(x\in A))\vee(\neg(x\in B))\\
&\Leftrightarrow (\forall x)\neg(x\in A)\vee x\in B^c\\
&\Leftrightarrow (\forall x)x\in A\Rightarrow x\in B^c\\
&\Leftrightarrow A\subset B^c.\blacksquare
\end{aligned}$$