

__年__組__番 氏名_____ (解答は裏面も使用可)

(1) 次の命題を証明せよ。

(a) 任意の整数 x に対して、 $y > x$ を満たすような整数 y が存在する。

(b) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) xy = yx = y$.

(2) 次の論理式の否定を作れ。ただし、(a) では $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は数列, $a \in \mathbb{R}$. (b)~(d) で $A \subset \mathbb{R}^n$, $|x|$ は $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ の長さ ($= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$), $B(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon\}$, (c) では $a \in \mathbb{R}^n$ とする。(説明を書いたけれど、問題を解くのにこれらの情報はほとんど必要がない。)

(a) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) |x_n - a| \leq \varepsilon$.

(b) $(\forall a \in A) (\exists \varepsilon > 0) B(a; \varepsilon) \subset A$.

(c) $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in B(a; \delta)) |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

(d) $(\exists R \in \mathbb{R}) (\forall x \in A) |x| \leq R$.

(3) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ と分配律 $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$ を用いて、連立方程式
$$\begin{cases} x(x^2 + 4y + y^2) = 0 \\ (y + 2)(y + x^2) = 0 \end{cases}$$
 を解け。