Part 2. 集合

桂田 祐史

2013 年 5 月 2 日, 2014 年 7 月 6 日, 2015 年 7 月 16 日

目 次

論理の説明に続いて集合の説明に移る (全 3 回くらい)。授業の参考書としては、中内 [1] を推奨する。

なるべく簡単な例をその場でたくさん作ってあげること。

初回は記号の説明がどっと続くので、だれやすい。円滑に演習につなげられるよう、注意深い授業計画が必要である。

1 はじめに

数学において、集合という言葉は割と新しく、Cantor (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor, 1845–1918) がパイオニアである [1]。集合論も (論理と同様に) 厳密に取り扱うのは実はかなり難しいが、ここでは素朴に数学の言語としての集合の説明 (「素朴な集合論」 (naive set theory)) をする。

素朴でない集合論を調べるキーワードを一応あげておくと、「**公理的集合論**」(Zermelo-Frenkel set theory), 「**ツェルメロ・フレンケルの公理系**」である。参考書として (比較的入手しやすい) 齋藤 [2] をあげておく。

2 集合の定義, 要素

集合 (set) とは、範囲が明確に定まった、ものの集まりである。(1 個だけでも集まりと言う。さらには 0 個の集まりも考える (空集合)。)

集合を $A, B, \ldots$ などの文字で表す。

集合 A に属するものを、A の**要素**あるいは**元**と呼ぶ。いずれも英語の element の訳語である。

a が集合 A の要素 (元) である (a is an element of A) ことを、記号 $\in$ を用いて

$$a \in A \qquad (\text{あるいは} \quad A \ni a)$$

と表し、

「a は A に属する」, "a belongs to A", "a is in A", "a lies in A"

という。あるいは

「A は a を含む」, 「a は A に含まれる」, "A includes a", "A contains a"

とも言う (こちらは集合が集合に含まれることを表す $\subset$ と紛らわしいので使うな、という人がいる)。

$a \in A$ の否定 (「a が A の要素ではない」, 論理の記号を用いると $\neg(a \in A)$ と書ける) は

$$a \notin A \qquad (\text{あるいは} \quad A \not\ni a)$$

と表す。

例 2.1 (再掲 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$) 以下の記号は良く使われるもので覚えるべきである。

$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合 (すべての自然数の集合) とする。(自然数を英語で natural numbers と呼ぶが、その頭文字 n に由来する。)

$\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする。(ドイツ語で数を Zahl と呼ぶが、その頭文字 Z に由来する。)

[1] Cantor は、1874 年に有名な「超越数が代数的な数よりもはるかに多く存在すること」の証明を与えた。1878 年の論文で、二つの集合の "大きさ" の比較を 1 対 1 対応で行うことを提唱した。

$\mathbb{Q}$ を有理数全体の集合とする。(この記号は商 (quotient) の頭文字の q に由来しているらしい。有理数、無理数は英語でそれぞれ rational numbers, irrational numbers と呼ばれる。これは比 (ratio) に由来している。

$\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする。(実数を英語で real numbers と呼ぶが、その頭文字 r に由来する。)

$\mathbb{C}$ を複素数全体の集合とする。(複素数を英語で complex numbers と呼ぶが、その頭文字 c に由来する。なお、虚数は imaginary numbers と呼ばれる。)

(以上で、英語由来と書いたところも、本当はフランス語由来であるという人もいる ($\mathbb{C}$ など)。由来や歴史について正確に説明する努力はあまりしない。覚えるための記憶術くらいに受け取って下さい。)

無理数全体の集合を表す標準的な記号はないようである。後で説明する差集合の記号 $\setminus$ を用いて、$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ とするのが普通である。■

例 2.2 $1\in\mathbb{N}$, $-1\notin\mathbb{N}$, $-1\in\mathbb{Z}$, $\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$, $\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}$, $\pi\notin\mathbb{Q}$, $\pi\in\mathbb{R}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\notin\mathbb{R}$, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\in\mathbb{C}$. ■

どんな a に対しても、$a\in A$ か $a\notin A$ か、はっきり定まっているのが大前提である。

良く紹介される例であるが、「大きい数の集まり」というのは、基準がはっきりしないので集合とは認められない。

余談 2.1 どういう文字でも良いはずだが、集合は大文字で、要素は小文字で表すことが多い。集合の集合などが出て来るので、首尾一貫できるわけではないが。■

注意 2.3 「範囲が定まっている」というのは、個々のものに対して、それが考えている集合に属するか属さないか「すぐに分かる」、「知っている」というのとは異なる。例えば**オイラー定数**と呼ばれる実数 γ は、

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)$$

で定義できる (極限が存在することは証明できる) が、γ が有理数である ($\gamma\in\mathbb{Q}$) か、無理数である ($\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ つまり $\gamma\notin\mathbb{Q}$) か、現在 (2013 年) まで分かっていない。(Mathematica では、`EulerGamma` という名前がついていて、簡単に数値が調べられる。$\gamma=0.5772156649\cdots$) しかし、いずれであるか定まっていて、$\mathbb{Q}$ や無理数全体の集合の定義が曖昧というわけではない、と考えられている。(実数のうち、有理数であるか、無理数であるか、分からないものがあっても、有理数全体の集合、無理数全体の集合という概念が定義できないわけではない。) ■

注意 2.4 教科書 [3] で注意されているように、“$x\in A$” を「A に属する x」(x which belongs to A — 要するに $\in A$ を修飾節として扱う) と読むのが適当な場合がしばしばある。例えば

「任意の $x\in A$ に対して、$x\in B$ が成り立つ」

を、

「A に属する任意の x に対して、x は B に属する」

のように読むわけである [2]。筆者自身が大学 1 年生の頃に、断りなしにそういう書き方を使われて面食らった覚えがある。■

[2] かなり (語順が) 変わった読み方をする必要があるわけである。英語ならば関係代名詞を 1 つ挿入するだけで良いのだが、日本語に翻訳すると語順の入れ替わりが起こるのは仕方がないか。この辺は実は日本語を使って生じるハンディキャップかもしれない。

3　集合の相等

(集合が等しい、ということを定義する。「等しい」というのは簡単で明らかに思うかもしれないが、例えば数についての等式も、「表現が同じ」という意味ではなく、「値が等しい」という意味であることは注意した方が良いかもしれない。$1+1=2$ という等式をじっと見てみよう。$1+1$ と 2 は異なる式であるが、それらが表す数は同じ、ということである。)

定義 3.1 (集合の相等) 二つの集合 A と B に対して、命題

$$\forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \tag{$\sharp$}$$

(日本語で書くと「任意の x に対して、($x \in A$ ならば $x \in B$) かつ ($x \in B$ ならば $x \in A$)」) が成り立つとき、A と B は**等しい**と定義し、$A = B$ と表す。

($\sharp$) は記号 $\Leftrightarrow$ を使うと

$$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

と書ける。

$A = B$ の否定 (A と B は**等しくない**) は、$A \neq B$ で表す。

(復習: $p \Leftrightarrow q$ とは、$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ のことである。)

テキストでは、A と B が等しいとは

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

が成り立つことをいう、と書いてあるが、“$\forall x$” が省略されていると考えるべきである。

$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ という記号の約束　上に書いたことを以下では、

$$A = B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

のように表す。ここで $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ という記号には、左の式が成り立つことと右の式が成り立つことは同値である ($\cdots \Leftrightarrow \cdots$ が成り立つ) ということと、それで左の式の意味を定義する (define) という 2 つの意味が込められている。

数の場合の等号と同じようなことが成り立つ。

命題 3.2 (集合の相等関係は同値律を満たす) 次が成り立つ。

(1) $A = A$

(2) $A = B \Rightarrow B = A$

(3) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$

4　集合の表し方 (個々の集合の定義の仕方)

4.1　要素をすべて書く方法 (外延的定義)

集合の要素を書き並べて、中括弧 (braces) $\{\quad\}$ で囲んで集合を表すやり方がある (外延的定義と呼ばれる)。

例えば A が、1, 2, 3 をすべての要素とする集合であるとき、

$$A = \{1, 2, 3\}$$

と表す。

順番は不問で、重複も認める。例えば

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3\}.$$

この書き方は、要素が無限にたくさんある場合に少し困ることになる。例えば

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

と書くことが多いが、“$\cdots$” は曖昧になってしまう。

(テキストにも書いてあるように、「外延的定義」なんて言葉を覚える必要はまったくない。次項の「内包的定義」も同様である。今日だけ覚えておけば良い。)

(余談的注意。授業ではカットした。) 日常語では、「集まり」は複数 (2 個以上) のものに対してだけ使う言葉かもしれないが、集合は要素が 1 個だけの場合も考える。例えば

$$A = \{7\}.$$

このように要素が 1 個の集合は、**単元集合** (singleton) と呼ばれる (この言葉も覚える必要はない)。

$\{a\}$ は a とは異なるものである。

4.2 要素の条件を書く方法 (内包的定義)

その集合に属するための必要十分条件を記して集合を定義するやり方がある (集合の内包的定義という)。

例えば A が 1 以上 3 以下の自然数全体の集合であることを

$$A = \{x \mid x \text{ は 1 以上 3 以下の自然数}\}$$

と書く。もう一つ例をあげると

$$B = \{x \mid x \text{ は偶数}\}.$$

一般化すると、x に関する条件 $P(x)$ を用いて

$$\{x \mid P(x)\} \qquad (\text{あるいは } \{x; P(x)\}, \{x : P(x)\})$$

という記号で、条件 $P(x)$ をみたす x 全体の集合を表す。

ここでは x という文字を用いたが、代わりにどういう文字を使っても同じである。例えば

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \land x \geq 0\} = \{y \mid y \in \mathbb{R} \land y \geq 0\}.$$

内包的定義の書き方は無数にある。例えば

$$\{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0.4 < x < 3.2\} = \{x \mid x = 1 \lor x = 2 \lor x = 3\}.$$

余談的注意　集合の内包的定義にしても、外延的定義にしても、中括弧 (braces) $\{\quad\}$ を使っていることに注意しよう。$\{\quad\}$ は集合の定義以外にも使われるが、集合を定義するのには必ず $\{\quad\}$ を使う。

雑談ネタ (括弧を表す英語)　$(\quad)$ は paréntheses, $\{\quad\}$ は braces, $[\quad]$ は bráckets.

色々な書き方　条件が $P(x) \wedge Q(x)$ のように複数の条件を $\wedge$ (and, かつ) で結んだものである場合、$\wedge$ をカンマ , で済ませることがある。

$$\{x \mid P(x) \wedge Q(x)\} = \{x \mid P(x), Q(x)\}.$$

具体的な例をあげると

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &= \{x \mid x \text{ は } 1 \text{ 以上 } 3 \text{ 以下の自然数}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 3\} \\ &= \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 3\}. \end{aligned}$$

この集合を $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ とも書く。

つまり $P(x)$ が、x がある集合 A に属する (つまり $x \in A$) という条件である場合、

$$\{x \mid x \in A \wedge Q(x)\} = \{x \in A \mid Q(x)\}.$$

例 4.1 (テキストに載っている例) $x^2 - x - 1 < 0$ を満たす実数全体の集合。

$$\begin{aligned} \left\{x \mid x \text{ は } x^2 - x - 1 < 0 \text{ を満たす実数}\right\} &= \left\{x \mid x \text{ は実数かつ } x^2 - x - 1 < 0\right\} \\ &= \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - x - 1 < 0\right\} \\ &= \left\{x \mid x \text{ は実数}, x^2 - x - 1 < 0\right\} \\ &= \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - x - 1 < 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 < 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\} \\ &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

追加　A を集合、$f(x)$ を x についてのある式として、

$$\{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\} = \{y \mid \text{ある } x \in A \text{ が存在して } y = f(x)\}$$

を単に

$$\{f(x) \mid x \in A\}$$

と書くことが非常にしばしばある。例えば平方数 (ある自然数の平方となっているような数) の全体

$$\left\{m \mid \text{ある自然数 } n \text{ が存在して } m = n^2\right\}$$

のことを

$$\left\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

と書く。

より一般に $P(x)$ を x に関する条件として

$$\{f(x) \mid P(x)\} = \{y \mid (\exists x : P(x))\ y = f(x)\}.$$

この形で覚えておく (これを忘れると証明が出来ない！)

$$\{f(x) \mid x \in A\} := \{y \mid (\exists x \in A)\ y = f(x)\}.$$

5　部分集合, 含まれる

定義 5.1 (部分集合, 含む, 含まれる) 集合 A, B について

$$\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

が成り立つとき、「B は A の**部分集合** (subset) である」,「B は A に**含まれる**」,「A は B を**含む**」といい、

$$B \subset A \qquad (\text{あるいは } A \supset B)$$

と表す。$A \subset B$ の否定 (「A は B に含まれない」, $\neg(A \subset B)$) は、$A \not\subset B$ (あるいは $B \not\supset A$) と表す。
(おまけ) $B \subset A$ かつ $B \neq A$ であるとき、B は A の**真部分集合** (proper subset) であるといい、

$$B \subsetneqq A \qquad (\text{あるいは } A \supsetneqq B)$$

と表す。

例 5.2

$$\{1\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2,3\}, \quad \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}.$$

このようなとき

$$\{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$$

と書くことがある (数の場合の $1 < 2 < 3 < 4$ などと同様)。

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

$$\{x \mid x \text{ は正三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は二等辺三角形}\} \subset \{x \mid x \text{ は三角形}\}.$$

注意 5.3 ($\subset$ は等しい場合を含む！) すぐ後で証明するように、

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B) \land (B \subset A).$$

$A = B$ の場合も $A \subset B$ と書くことがありうるわけである (それは真な命題である)。例えば

$$\{1\} \subset \{1\}, \quad \{1,2\} \subset \{1,2\}, \quad \{1,2,3\} \subset \{1,2,3\},$$

はいずれも真の命題である。

数の大小では、$a < b$ と $b < a$ は決して両立しない: つまり任意の a, b に対して、$(a < b) \land (b < a)$ は偽である。一方

$$a = b \quad \Leftrightarrow \quad (a \leq b) \land (b \leq a).$$

この点で、$\subset$ は、($<$ ではなくて) 実数の大小を表す $\leq$ と似ている。
$a=b$ の場合も $a \leq b$ と書くことがありうる (それは真な命題である)。例えば $1 \leq 2$, $1 \leq 1$ のどちらも真である。

このせいであろうか、$B \subset A$, $B \subsetneqq A$ をそれぞれ、$B \subseteq A$ (あるいは $B \subseteqq A$), $B \subset A$ と書く流儀がある。その流儀を使うと、

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B) \land (B \subseteq A).$$

これは最近はあまり見掛けなくなった流儀であると感じているが(真似しない方が良いと思う)、遭遇する可能性が 0 とは言い切れない。 ■

命題 5.4 (集合の包含関係の性質) A, B, C は任意の集合とするとき、以下が成り立つ。

(1) $A \subset A$.

(2) $(A \subset B) \land (B \subset A) \Rightarrow A = B$.

(3) $(A \subset B) \land (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

(つまり、いわゆる順序関係の公理を満たす。実は (2) の逆も成り立つので、$\Rightarrow$ を $\Leftrightarrow$ に置き換えたものも成り立つ。)

(4) $(A \subset B) \land (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$.

(Cf. 実数について (1) $a \leq a$ (2) $a \leq b \land b \leq a \Rightarrow a = b$ (3) $a \leq b \land b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (4) $a \leq b \land b \leq a \Leftrightarrow a = b$)

証明

(1) 任意の命題 p に対して、$p \Rightarrow p$ は常に真であるから、任意の x に対して、$x \in A \Rightarrow x \in A$. ゆえに $A \subset A$.

(2) 任意の x に対して、

- $x \in A$ ならば仮定 $A \subset B$ より $x \in B$.
- $x \in B$ ならば仮定 $B \subset A$ より $x \in A$.

ゆえに

$$\forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \land (x \in B \Rightarrow x \in A)]$$

が証明できた。ゆえに $A = B$.

(3) 任意の x に対して、$x \in A$ ならば、仮定 $A \subset B$ より $x \in B$. さらに仮定 $B \subset C$ より $x \in C$. ゆえに

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が証明できた。ゆえに $A \subset C$.

(4) (2) は示してあるので、逆を証明すれば良い ($A = B$ ならば $A \subset B$. $A = B$ ならば $B \subset A$. ゆえに $A = B$ ならば $(A \subset B) \land (B \subset A)$ が成り立つ。)。

同時に証明することも出来る[3]。

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \forall x[(x \in A \Rightarrow x \in B) \land (x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow [\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)] \land [\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow (A \subset B) \land (B \subset A). \blacksquare \end{aligned}$$

6 空集合

定義 6.1 (空集合) 一つも「もの」を含まない「集まり」は、日常語としては「集まり」と言わないかもしれないが、数学では、要素を一つも持たない集合を考え (そういう集合は一つしかないことに注意する)、**空集合**(くうしゅうごう)(empty set) と呼び、$\emptyset$ という記号で表す。

$\emptyset$ はギリシャ文字のファイ ϕ と似ているが (黒板に書いたとき区別するのは困難である)、実は別物で、元々は数字の 0 に由来するらしい。

豆知識: テキストによっては、ϕ や $\varnothing$ という字体を用いる。TEX では、$\emptyset$ は `\emptyset`, $\varnothing$ は `\varnothing` と入力する。

命題 6.2 任意の集合 A に対して、空集合は A の部分集合である:

$$\emptyset \subset A.$$

(復習: $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$)

証明 任意の x に対して、$x \in \emptyset$ は偽であるから、$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ は真である[4]。すなわち $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ が証明できた。ゆえに $\emptyset \subset A$. ■

空集合は任意の集合の部分集合というのを認めている人でも、上の証明は受け入れにくく感じるのではないだろうか。「$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ を $(\forall x : P(x))Q(x)$ と書く。」という決まりを使うと、$A \subset B$ の定義 $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ は $(\forall x \in A)\ x \in B$ と書き直せる。すると命題の主張 $\emptyset \subset A$ は

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

と書けることになる。この形で納得出来るだろうか？一般に "$(\forall x : P(x))Q(x)$" という命題は、$P(x)$ を満たす x が存在しないとき、真である。例え話をすると「受験生のいない試験は (不合格者が一人もいないので) 全員合格」。

条件 $P(x)$ を満たす x が 1 つも存在しないとき、

$$\{x \mid P(x)\} = \emptyset.$$

$P(x)$ が簡単な式でも、それを満たす x が存在するかどうかはすぐには分からないことがしばしばあるので、決してナンセンスではない。

余談 6.1 有名なフェルマーの大定理 (ワイルズの定理, 1995 年) は、$n \geq 3$ を満たす任意の自然数 n について、方程式 $x^n + y^n = z^n$ の自然数解は存在しない、という内容である。つまり

$$\{(x, y, z, n) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 3, x^n + y^n = z^n\} = \emptyset$$

をフェルマーの大定理は主張しているわけである。■

[3] $(\forall x)\ P(x) \land Q(x) \Leftrightarrow ((\forall x)P(x)) \land ((\forall x)Q(x))$ を用いた。

[4] $p \Rightarrow q$ は $(\neg p) \lor q$ のことであったから、$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ は $x \notin \emptyset \lor x \in A$ ということである。

次節で共通部分を表す記号 $\cap$ を導入するが、A と B に共通の要素が存在しない場合は $A\cap B=\emptyset$ となり、もしも空集合を集合と認めないと、$A\cap B$ が定義出来ない場合が頻出することになり、かなり煩わしいことになるであろう。

7　和集合, 共通部分

定義 7.1 (合併集合、共通部分) A, B を集合とする。

$$A\cup B := \{x \mid x\in A \text{ または } x\in B\}$$

とおき、$A\cup B$ を A と B の**和集合** (sum) あるいは**合併集合**（がっぺいしゅうごう） (union) と呼ぶ。

$$A\cap B := \{x \mid x\in A \text{ かつ } x\in B\}$$

とおき、$A\cap B$ を A と B の**共通部分** (intersection) あるいは**交わり**, **積集合**と呼ぶ。

しばしば $\cup$, $\cap$ を「カップ」,「キャップ」と読む。コーヒーカップ、キャップ (帽子) を思い浮かべると良い。

授業ではヴェン図を描くこと。

例 7.2 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$ とするとき、

$$A\cup B=\{1,2,3,4\},\quad A\cap B=\{2,3\},\quad A\setminus B=\{1\}.\blacksquare$$

問　$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3,6,7\}$, $C=\{3,4,5,6\}$ とするとき、$(A\cap B)\cap C$, $A\cap(B\cap C)$, $A\cap(B\cup C)$, $(A\cap B)\cup C$ を求めよ。

3 つ以上の集合の共通部分 (あるいは和集合) については、

$$A\cap B\cap C := (A\cap B)\cap C,\quad A\cap B\cap C\cap D := ((A\cap B)\cap C)\cap D,\cdots$$

$$A\cup B\cup C := (A\cup B)\cup C,\quad A\cup B\cup C\cup D := ((A\cup B)\cup C)\cup D,\cdots$$

のように、とりあえず左から結合していくことにするが、結合律が成り立つので、どういう順番で結合しても同じものを表す (これは数について、$a+b+c$ や $a+b+c+d$ を考えるときと同じである)。例えば 4 つの集合の場合

$$((A\cap B)\cap C)\cap D=(A\cap B)\cap(C\cap D)=(A\cap(B\cap C))\cap D=A\cap((B\cap C)\cap D).$$

(1) $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

(2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) $A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

8 差集合, 補集合

定義 8.1 (差集合, 補集合) A, B を集合とするとき、

$$\{x \mid x \in A \land x \notin B\} \qquad (\text{これは } \{x \in A \mid x \notin B\} \text{ とも書ける})$$

を A から B を除いた**差集合** (difference set) と呼び、$A \setminus B$ あるいは $A - B$ で表す:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

訂正

差集合のことを "difference set" とうっかり書いてしまったけれど、それは少数派で、普通は違う意味に取られる (群論の用語) 可能性が高いらしい。$A \setminus B$ は、"the (set) difference", "the relative complement of B in A", "the relative complement of B with respect to A", "the set-theoretic difference of A and B" などと呼ぶのが普通のようだ。

しばしば、そのとき考察する対象全体の集合 X を定め、X の各部分集合 A に対して、$X \setminus A$ を考える。そういうとき、$X \setminus A$ を X における A の**補集合** (complement) と呼び、A^c で表す:

$$A^c := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

X は**全体集合** (total set), **ユニバース** (universe) などと呼ばれる。

A を全体集合 X の部分集合とするとき、任意の $x \in X$ に対して、

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A.$$

ゆえに A と B が全体集合 X の部分集合であるとき

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\} = \{x \mid x \in A \land x \in B^c\} = A \cap B^c.$$

注意 8.2 A の補集合を $\overline{A}$ と書く流儀もあるが、あまり使われない (その記号を位相空間の部分集合の閉包を表す記号に使いたいので、使わずに残しておきたい？)。■

対称差 (ややマイナー) A と B の**対称差** $A \triangle B$ を次式で定める。

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \cup B \land x \notin A \cap B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

$A \setminus B$, A^c, $A \triangle B$ をヴェン図を書いて理解すること。

9 $\cup$, $\cap$, ^{c} の満たす法則

島内 [4] を参考にした。

命題 9.1 以下、X を全体集合、A, B, C はその部分集合とする。

(1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ (冪等律, ベキ等律).

(2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (交換律).

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (結合律).

(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap X = A$, $A \cup X = X$.

(5) $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = X$.

(6) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

(7) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (分配律).

(8) $(A \cup B) \cap A = A$, $(A \cap B) \cup A = A$ (吸収律).

(9) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (de Morgran 律).

証明は、$\cup$, $\cap$, ^{c} の定義と論理の法則による。
(1) は $p \wedge p \Leftrightarrow p$, $p \vee p \Leftrightarrow p$ による。
(2) は $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ による。
(3) は $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ による。
(4) は $p \wedge F \Leftrightarrow F$, $p \vee F \Leftrightarrow p$, $p \wedge T \Leftrightarrow p$, $p \vee T \Leftrightarrow T$ による。
(5) は $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$(矛盾律), $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$ (排中律) による。
(7) は $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ による。
(8) は $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$, $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$ による。
(9) は $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg p)$, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg p)$ による。
例えば (9) の最初の等式の証明は次のようにする。

任意の x に対して、

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

ゆえに $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. ■

教科書 [3] の命題 3.28 にあるもので、上の命題 9.1 に入っていないもの。

(1) $A \setminus A = \emptyset$.
$\because A \setminus A = A \cap A^c = \emptyset$.

(2) $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$.
$\because A \setminus \emptyset = A \cap \emptyset^c = A \cap X = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset \cap A^c = \emptyset$.

(4) $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$.
$\because p \wedge q \Rightarrow p$, $p \Rightarrow p \vee q$ はともに真であるから。

(5) $A \cap B \subset A \cup B$.
$\because$ (4) と「$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$」から。

教科書 [3] の命題 3.30 にあるもので、上の命題 9.1 に入っていないもの。

(2) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ であれば、$A \cup B \subset C$ である。
$\because$ $x \in A \cup B$ とすると、$x \in A \vee x \in B$. 前者の場合、$A \subset C$ から $x \in C$. 後者の場合 $B \subset C$ から $x \in C$. いずれにせよ $x \in C$. ゆえに $A \cup B \subset C$.

(3) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ であれば、$C \subset A \cap B$ である。
$\because$ $x \in C$ とすると、$C \subset A$ より $x \in A$. また $C \subset B$ より $x \in B$. ゆえに $x \in A \cap B$. ゆえに $C \subset A \cap B$.

(5) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
$\because$ $A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c) = (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
$A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

次の例は、非常に良く使われる。(それにも関わらず、集合の説明をしてある本に載っていないことが多い。微積分の説明をしていて、はたと困ってその場で証明を書いたり、ヴェン図を描いてお茶を濁したりしている。)

例 9.2 A, B が集合 X の部分集合であるとき

$$A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B^c \quad \Leftrightarrow \quad A^c \supset B$$

であることを示せ (A^c, B^c は X を全体集合と考えるときの補集合)。

(メモ: ブルバキの集合論要約も見て、内容を取り込むことを考えよ。)

10 直積集合

定義 10.1 (順序対と直積集合) a と b が与えられたとき、順番を考慮した組 (a,b) を、a と b の**順序対** (an ordered pair) と呼ぶ。順序対の相等については、

$$(a,b) = (a',b') \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad a = a' \wedge b = b'$$

と定義する。

A と B が集合であるとき、A の要素と B の要素の順序対の全体を、A と B の**直積集合** (direct product) あるいは**デカルト積** (Cartesian product) と呼び、$A \times B$ で表す:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

(中学校の数学で学んだ平面上の点の座標は順序対の一種である。a と b が実数でない場合にも、同じようなことをしよう、というわけである。)

例 10.2 (順序対 vs 二元からなる集合) 順序対 (a,b) と 集合 $\{a,b\}$ との違いに注意する必要がある。

$$(x,y) = (1,2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \wedge y = 2.$$

$$(1,2) \neq (2,1).$$

$$\{x,y\} = \{1,2\} \quad \Leftrightarrow (x = 1 \wedge y = 2) \vee (x = 2 \wedge y = 1).$$

$$\{1,2\} = \{2,1\}.\blacksquare$$

注意 10.3 (開区間と順序対) $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であるとき、(a, b) で開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を表すことがあるわけであるが、字面だけ見ても順序対 (a, b) と区別がつかない。文脈を見て判断するしかない。このことを避けるためか、フランスでは、開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ を表すために $]a, b[$ という記号を用いる。

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}. \blacksquare$$

例 10.4 (直積集合の例) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ とするとき、

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

$A = \{$ うなどん, ボンゴレ, カレー $\}$, $B = \{$ 味噌汁, コーンスープ $\}$ とするとき、

$$A \times B = \Big\{(\text{うなどん}, \text{味噌汁}), (\text{うなどん}, \text{コーンスープ}), (\text{ボンゴレ}, \text{味噌汁}), \\ (\text{ボンゴレ}, \text{コーンスープ}), (\text{カレー}, \text{味噌汁}), (\text{カレー}, \text{コーンスープ})\Big\}. \blacksquare$$

3 つ以上の集合の直積も同様に定義する。

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \, | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n\}.$$

無限個の集合の直積を考えることもある (写像を説明してから述べる)。

$A \times A$ を A^2 と書く。3 つ以上の場合も同様である。

例 10.5

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}. \blacksquare$$

A, B のどちらか一方が空集合ならば、$A \times B$ は空集合である。

$$A \times \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \times B = \emptyset.$$

余談 10.1 直積集合はなぜ「積」と言って、$\times$ という掛け算マークを用いるのか? おそらく次のことが関係していると思う。A と B が有限集合であるとき、

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

が成り立つ。ここで $|\cdot|$ は集合の要素の個数を表す。

例えば、上の $A \times B$ の 2 つの例では、どちらも $|A| = 3$, $|B| = 2$ で、$|A \times B| = 6$. $\blacksquare$

余談 10.2 (順序対の集合論的定義) 現代の集合論のテキストでは、順序対は

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

により定義することが多い (Kuratowski が始めたとか)。こう定義すると確かに

$$(a, b) = (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \wedge b = b'$$

が成り立つ。しかし、これは自然数 0, 1, 2, 3, ... を

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \ldots, \quad n + 1 = n \cup \{n\}, \quad \ldots$$

と定義する[5]のと同じような、一つの方便に過ぎない、と考えるべきであろう。実際、順序対は

$$(a,b) := \{\{\{a\},\emptyset\},\{\{b\}\}\}$$

のように定義されたこともあったし、他にも

$$(a,b) := \{\{b\},\{a,b\}\},$$

$$(a,b) := \{a,\{a,b\}\}$$

など、色々な定義が可能である。 ■

11　ベキ集合 (冪集合)

集合 A に対して、A のすべての部分集合 ($\emptyset$ や A 自身を含む) からなる集合 (部分集合の全体の集合) を、A の**ベキ集合** (the power set of A) と呼び、$\mathrm{Pow}(A)$, 2^A と書く。

$$\mathrm{Pow}(A) = 2^A := \{B \mid B \subset A\} = \{B \mid B \text{ は } A \text{ の部分集合}\}.$$

例 11.1 $A = \emptyset$ のとき、

$$\mathrm{Pow}(A) = 2^A = \{\emptyset\}.$$

$A = \{a\}$ のとき、

$$\mathrm{Pow}(A) = 2^A = \{\emptyset, \{a\}\}.$$

$A = \{a, b\}$ のとき、

$$\mathrm{Pow}(A) = 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

$A = \{a, b, c\}$ のとき、

$$\mathrm{Pow}(A) = 2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}.$$

以上は a, b, c の中に等しいものがある場合も正しい。 ■

余談 11.1 a の b 乗 a^b は、英語で ($b = 2$ のときは "a square" のような特別な読み方はあるけれど) "a to the b-th power" と読まれる。$y = x^\alpha$ という関数は power function (冪関数) と呼ばれる。 ■

一般に相異なる n 個の要素からなる集合 A に対して、$\mathrm{Pow}(A)$ は 2^n 個の要素を持つ。このことは検算に有効である。

無限集合 A に対しても、A のベキ集合を考える。

12　集合族

要素が集合である集合、つまり集合の集合のことを**集合族** (a family of sets) という。

(その話をするときに、集合というと、何を指しているかわかりづらいので、「族」という言葉を使う。族の代わりに類という言葉を使うこともある。)

例えば

$$\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$$

[5]これから $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \cdots$, $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$　ちょっと異様な感じがする。普通 $0 \subset 1$ かどうか？と尋ねられたら「ナンセンスな問だ。もちろん No.」と答えるであろう。

は、2 つの集合 $\{1\}$ と $\{1,2,3\}$ からなる集合族である。

集合族 $\mathcal{A}$ に対して、和 (合併) $\bigcup \mathcal{A}$, 共通部分 $\bigcap \mathcal{A}$, 直積 $\prod \mathcal{A}$ が定義できる。

$$\bigcup \mathcal{A} := \{x \mid (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\},$$

$$\prod \mathcal{A} := (\text{後述}).$$

A と B が集合で、$\mathcal{A} = \{A, B\}$ のときは

$$\bigcup \mathcal{A} := A \cup B, \quad \bigcap \mathcal{A} := A \cap B$$

である。例えば $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1,2,3\}\}$ のとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \{1\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{1\} \cap \{1,2,3\} = \{1\}.$$

$\mathcal{A}$ が有限個の集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n からなる集合族 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ であるとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{1 \le k \le n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{1 \le k \le n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

$$\prod \mathcal{A} = \prod_{k=1}^{n} A_k = \prod_{1 \le k \le n} A_k := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n.$$

これだけだったら、わざわざ集合族という言葉を持ち出す必要はあまりないかもしれない。無限個の集合からなる集合族に対して、和、共通部分、直積が定義できる。

教科書では、なぜか可算個の集合族について限って説明してある (本当は違うはずだけど「集合列」と言っても良いことになるのか？解析で「区間縮小法」というのが出て来るので、その辺は整理しておきたい)。

任意の自然数 n に対して、集合 A_n が定まっているとする。このとき、$\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおき、その和、共通部分を

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in A_n\},$$

で定める。

直積は直観的には

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \in A_n\}.$$

$(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ の末尾の $\cdots$ が曖昧である。これについては後述する (まあ要するに数列みたいなもので、数列とその集合をどのように厳密に定義するか、ということである。一言でまとめると写像を用いる。)。

一般の集合族

空でない集合 Λ を添字集合とする集合族の定義をする。$\forall\lambda \in \Lambda$ に対して、集合 A_λ が定まっているとする。$\mathcal{A} := \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とするとき、

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \,|(\exists\lambda \in \Lambda)\ x \in A_\lambda\},$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \,|(\forall\lambda \in \Lambda)\ x \in A_\lambda\}.$$

直積 $\prod \mathcal{A} = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ については後述する。■

集合族の和集合、共通部分について幾つか実例をあげるが、簡単に分かることとして

$$A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \quad \text{特に} \quad A_1 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

$$A_n \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n. \quad \text{特に} \quad A_1 \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

1. 以上のことを証明せよ。

例 12.1 (1) 集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset A_{n+1}$ を満たすならば、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ であることを示せ。

(2) 集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \supset A_{n+1}$ を満たすならば、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$ であることを示せ。

(解答)

(1) 帰納法により $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_1 \subset A_n$ が証明できる。ゆえに $x \in A_1$ ならば、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $x \in A_n$. ゆえに $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $A_1 \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. 逆に $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$ は明らかであるから、$A_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(2) 帰納法により $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_1 \supset A_n$ が証明できる。$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ とする。定義より $(\exists n \in \mathbb{N})$ $x \in A_n$. 上に述べたことより $x \in A_1$. ゆえに $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset A_1$. 逆に $A_1 \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ であるから、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1$. ■

集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調に増加していくとき $(A_1 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots)$ の $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ と、集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調に減少していくとき $(A_1 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots)$ の $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ の実例をあげよう。

次に掲げるアルキメデスの公理を用いる。

アルキメデスの公理

$(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b.$

(この命題は、より簡潔な $(\forall c \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ n > c$ と同値であるが、オリジナルを尊重して上の形で覚えておくことにする。)

例 12.2 (1) 任意の自然数 n に対して、$A_n := (-1/n, 1/n) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/n < x < 1/n\}$ とおくとき、

$$(\sharp) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}.$$

(2) 任意の自然数 n に対して、$A_n := (-n, n) = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\}$ とおくとき、

$$(\flat) \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{R}.$$

証明

(1) (i) $x \in \{0\}$ とすると、$x = 0$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$-1/n < 0 < 1/n$ であるから、$x(=0) \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(ii) $x \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in A_n$. ゆえに $|x| < 1/n$. このとき $x = 0$ を背理法で証明する。もしも $x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0$. ゆえに (Archimedes の公理[6] より)

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \quad N|x| > 1.$$

すると $|x| > \dfrac{1}{N}$. これは矛盾である。ゆえに $x = 0$. すなわち $x \in \{0\}$.

(i), (ii) から (1) が成り立つ。

(2)

(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ A_n \subset \mathbb{R}$ であるから、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$ は明らかである。

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ とする。アルキメデスの公理から、$(\exists n \in \mathbb{N})\ n \cdot 1 > |x|$. ゆえに $x \in A_n$. ゆえに $x \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. ゆえに $\mathbb{R} \subset \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(i), (ii) から (2) が成り立つ。 ■

A 定義と記号の約束集

こういうものは自分で抜き出して作るもののような気もするけれど。

a が集合 A に属することを $a \in A$ (あるいは $A \ni a$) で表す。

[6] Archimedes の公理とは、「a, b を任意の正の数とするとき、ある自然数 n が存在して $na > b$.」という、普通に考えれば当たり前の性質のこと。実数を定義して色々な性質を証明していこうとすると、鍵となる重要な性質である。

$a_1, \ldots, a_n$ が要素で、それ以外に要素がない集合を $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ で表す。

$$\{x \mid P(x)\} := P(x) \text{ が成り立つような } x \text{ 全体の集合}.$$

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ は整数}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}.$$

$$\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ は有理数}\} = \left\{x \mid (\exists m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{Z})\ x = \frac{n}{m}\right\}.$$

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ は実数}\}.$$

$$\mathbb{C} := \{x \mid x \text{ は複素数}\}.$$

$$\{x \in A \mid P(x)\} := \{x \mid x \in A \land P(x)\}.$$

$$\{f(x) \mid x \in A\} := \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}.$$

$$(\text{集合の相等}) \quad A = B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

$$A \subset B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

$a \in A$, $A = B$ (集合の相等), $A \subset B$ の否定をそれぞれ $a \notin A$, $A \neq B$, $A \not\subset B$ と表す。

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

$$(\text{順序対の相等}) \quad (a, b) = (a', b') \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} a = a' \land b = b'.$$

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\} \quad (\text{ただし } (a, b) \text{ は順序対を表す}).$$

$$2^A := \{X \mid X \subset A\}.$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in A_n\}.$$

$\mathcal{A}$ を集合族とするとき、$\bigcup \mathcal{A} := \{x \mid (\exists A \in \mathcal{A}) x \in A\}$, $\bigcap \mathcal{A} := \{x \mid (\forall A \in \mathcal{A}) x \in A\}$.

B　がらくた箱

きちんと書けたら本文に含めるかも知れないが…

B.1

$A \cap B = \emptyset$ であるとき、$A \cup B$ のことを $A \sqcup B$ と書くことがある。
$A_1, \cdots, A_n$ に対して、

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき、$A_1 \cup \cdots \cup A_n$ を $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$ と書く。

以下、有限集合 A の要素の個数を $|A|$ と表す。出て来る集合はすべて有限集合とする。

$$|A \sqcup B| = |A| + |B|.$$

$$|A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

が成り立つ。
一般には

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

余談 B.1 図形の面積、体積を一般化した測度 $\mu(\cdot)$ について似たような式が成り立つ。

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).\blacksquare$$

B.2　カンマに関する注意

B.2.1　カンマで区切る

カンマというのは、複数のものを並べるときに、ものとものを区切るために使われることは理解しているであろうが、数学の世界では、ものを区切るときにそれ以外の方法はめったに使われない、ということを理解しよう。例えばものを区切るために空白は使われない。
(行列などは例外と言えるが、行列は表のようなもので、どこにものを書くのかが明白に分かるせいとも考えられる。ふと頭に浮かんだのだが、日本人が記号を決めたら、罫線とか、升目を使いそうだ。)
以上のことは簡単だと思うのだが、試験をするとカンマを省略する人が続出する。
a, b, c が簡単なもの (例えば数) であるとき、a, b, c をすべての要素とする集合を $\{a, b, c\}$ と書くのは誰でも出来るのだが、a, b, c が複雑になると、$\{a\,b\,c\}$ や $\{a, b, c, \}$ のようなものが答案に出現する。

B.2.2　条件とカンマ

条件をカンマで区切って並べるときは、普通は $\wedge$ を略したと考える。

$$P_1(x), P_2(x), \cdots, P_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \cdots \wedge P_n(x).$$

例えば $x = 1$, $y = 2$ は $x = 1 \wedge y = 2$ ということである。
方程式や不等式を扱う記号は、なんとなく古めかしくて、注意が必要である。例えば

$x^2-3x-2=0$ の解は $x=1,2$.

条件としては

$$x^2-3x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \vee x=2.$$

つまり

$$x=a_1,a_2,\ldots,a_n \quad \Leftrightarrow \quad x=a_1 \vee x=a_2 \vee \cdots \vee x=a_n.$$

(方程式の解集合が $\{1,2\}$ というのに近いノリなのだろうか？正直良く分からない。)
　また

$x^2-3x-2>0$ の解は $x<1$, $x>2$.

条件として

$$x^2-3x-2>0 \quad \Leftrightarrow \quad x<1 \vee x>2.$$

一方で連立方程式の解を $x=1$, $y=2$ と書くときの , は $\wedge$ であるから、基準が分かりづらい面がある。

B.3　便利な記法

$$\{z \,|\exists x(z=f(x) \wedge P(x))\}$$

を

$$\{f(x)\,|P(x)\}$$

と表す。

B.4　内包の公理 vs 分出の公理

　$\{x \mid P(x)\}$ はつねに集合を定めるというのが、**内包の公理**というものだが、実はこれを認めると、有名な **Russel のパラドックス**が生じる。
　集合は素朴に取り扱うと様々な矛盾を生じ得るということが分かってから、それを克服するための理論が模索された。今では公理的集合論というものが確立されていて、様々なパラドックスが解消された。
　公理的集合論では、任意の集合 A と条件 $P(x)$ に対して、集合 A の要素のうちで $P(x)$ を満たすものの全体は集合を定める、というのは認めても良いとされる。これを**分出の公理**という。これを内包の公理の代わりにして議論するわけである。

$$\forall A \quad \exists B \quad \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge P(x)).$$

A と $P(x)$ に対して、上の B は一意的に定まる。この B を

$$\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$$

あるいは

$$\{x \in A \mid P(x)\}$$

と表す。

公理的集合論では、この分出の公理を基礎として、色々な集合を定義する。例えば

$$B = \{x \mid x \in A, x \neq x\}$$

は一意的に定まるが、この B を空集合と呼び、$\emptyset$ で表す。また

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \lor x = b\}.$$

2015年度授業の記録

- 5月14日。宿題の解説をする (半分くらい時間を取られる)。証明は省いて、「◯◯集合」という用語と記号を教える (全体集合とか、補集合が漏れた)。問4[7] にどうやって取り組むか、15分程度説明。

- 5月21日。差集合仕切り直し ($X - A = \overline{A}$ が多かったこともあって)。証明系は飛ばして、冪集合まで。$\{f(x) \mid x \in A\}$ なども やった。

- 5月28日。お題は2つで、(1) 集合が集合に含まれることと集合が集合に等しいことの証明。(2) 集合族。(1) は全部は証明せず、適当に選択する。同値変形で一気に示すとか。$x \in A \Rightarrow x \in B$ とその逆を別々に示すとか。

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x) x \in A \in B$$
$$\vdots$$

  (2) の方でアルキメデスの公理を説明した。問6[8] は難しいという話も漏れ聞いたけれど、みなさん結構頑張っている。

2014年度授業の記録

- 5月8日。
  宿題 (問3) が出ています。論理について、特に量称 ($\forall$, $\exists$) の練習をしたいと思うでしょうけれど、それはこの後の集合、写像を学ぶ時にたくさん使うことになるので、それが練習になる。今日は集合、高校の数学 A に相当する部分だが、記号を使って定義するところが新しい。4節まではほぼ消化した。5節は注意 5.3, 証明は飛ばした。6節は $\emptyset \subset A$ の証明は飛ばした。問4を出題。

- 5月15日。
  問3と問4のレポートを返却し、プリントを使って手短に解説をする。「記号にゆっくり慣れて下さい」という。5節で証明を飛ばした命題 5.4 の証明をする。続いて $\emptyset \subset A$ の証明をする。

- 5月22日。

[7] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi4.pdf

[8] http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi6.pdf

参考文献

[1] 中内伸光：ろんりの練習帳, 共立出版 (2002).

[2] 齋藤正彦：数学の基礎 — 集合・数・位相, 東京大学出版会 (2002).

[3] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).

[4] 島内剛一：数学の基礎, 日本評論社 (1971).

索引