

# 写像

桂田 祐史

2013年5月11日, 2015年7月16日

(もともと自分の講義をするためのノートと言うこともあって)、テキストとして使うにはまだまだ推敲不十分だと考えていますが<sup>1</sup>、参考になるだろうと考えて公開しています。— まあ、これは説明が雑なことの言い訳ですね。

あちこちに「余談」が出て来るけれど、それは時間に余裕があって気が向けば話そうかくらいのものなので、スキップして構いません。

## 1 はじめに

集合と写像は、現代の数学にとって、両輪をなす基礎概念と言える。写像 (a mapping, a map) というのは、中学・高等学校で学ぶ関数 (function) を少し (?) 一般化した概念である。大雑把に言って、数以外のものを扱えるように関数を一般化したものが写像である。

### 関数は写像である

#### 写像には (高校数学で言う) 関数以外のものもある

**例 1.1 (こんなのも写像)**  $X = \{\text{カレー}, \text{ミートソース}, \text{うな丼}\}$ ,  $Y = \{\text{コーンスープ}, \text{みそ汁}\}$  が集合として確定していると仮定して、

$$f(\text{カレー}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{ミートソース}) = \text{コーンスープ}, \quad f(\text{うな丼}) = \text{みそ汁}$$

とすると、写像  $f: X \rightarrow Y$  が定まる。■

**余談 1.1 (関数という言葉をととても広い意味で使うことがある — あくまで余談)** 実は、現在の大学の数学のテキストでは、関数の定義について、次の二つの立場がある。

- (1) 関数は (定義域や終域が数や数ベクトルの集合という) 特別な写像である。  
(こじつけになるけれど<sup>2</sup>、**関数とは数に関わる写像**のことである。)
- (2) 関数と写像とは名前が違うだけで、まったく同じものである。定義域や終域が数の集合でなくても関数という。

---

<sup>1</sup>例や図は、その場、その日のアドリブと言うものも多く、ここには書いてない一方で、細かいことをブツブツ書いてあったりします。

<sup>2</sup>function は、本来は函数という訳語が正しいのだそうで、関数というのは当て字なのだそうです。そういう意見をお持ちの先生からすると、「数に関わる」なんてのは、ひどいこじつけでしょう。すみません。

この講義で採用した教科書 (中島 [1]) では、(1) の立場を取っている。この文書でも、その立場を取る。

高校での関数、写像

今の高校数学には、写像が出て来ない (らしい)。しかし定義域、値域、合成関数などの言葉はある。

実は、写像は、以前は高等学校で教えられていたこともあり、大学数学の少し古めの教科書では、そのことを仮定して書かれている場合もある。

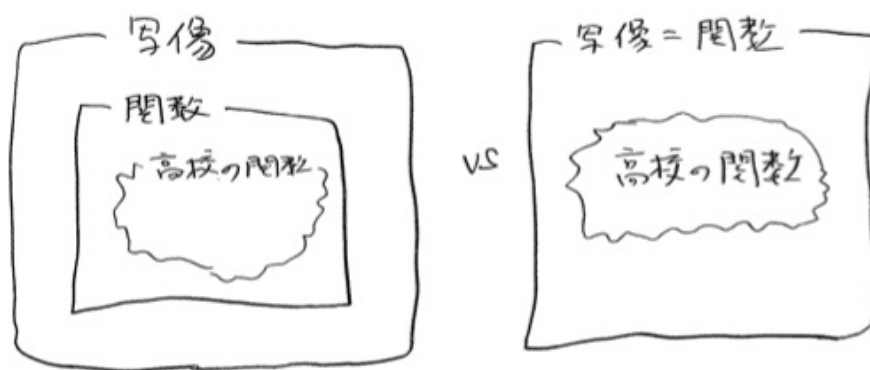


図 1: この絵が分かるようになって欲しい (一応は左の立場で説明する)

## 2 写像とは何か

### 2.1 写像, 定義域, 終域, 値域の定義

$X$  と  $Y$  を集合とする。 $f$  が  $X$  から  $Y$  への**写像** (a mapping, a map) であるとは、 $X$  の各々の (任意の) 要素  $x$  に対して、 $Y$  の要素がただ一つだけ定まっていて、その要素を  $f(x)$  と書くことを言う。

やや古めの本には、 $X$  から  $Y$  の中への**写像**, という言い方もある。

$f$  が  $X$  から  $Y$  への写像であることを、 $f: X \rightarrow Y$ , あるいは  $X \xrightarrow{f} Y$  と表す。

「 $f: X \rightarrow Y$ 」を「 $X$  から  $Y$  への写像  $f$ 」と読むべき場合も多い。

二つの写像  $f_1: X_1 \rightarrow Y_1$  と  $f_2: X_2 \rightarrow Y_2$  が等しいとは、

$$(X_1 = X_2) \wedge (Y_1 = Y_2) \wedge ((\forall x \in X_1) f_1(x) = f_2(x))$$

が成り立つことを言う<sup>3</sup>。

**注意 2.1 (細かい注意)**  $f$  を写像と言うけれども、その中に  $X$  と  $Y$  が何であるかの情報が含まれていると普通は考える。 $X, Y, f$ , 3つの組をまとめて写像と考えた方が良い。 ■

**例 2.2 (写像とは式のことではない — 異なる式で同じ写像が定義されることもある)**  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5\}$  のとき、 $f: X \rightarrow Y$  をすべて求めよう。 $x = 1, 2, 3$  に対する  $f(x)$  を指定すれば  $f$  が定まる。次の 8 つ  $f_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) がある。

<sup>3</sup>このうち  $Y_1 = Y_2$  を要求しない流儀もある。例えば河田・三村 [2]。

	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$
$f_1$	4	4	4
$f_2$	4	4	5
$f_3$	4	5	4
$f_4$	4	5	5
$f_5$	5	4	4
$f_6$	5	4	5
$f_7$	5	5	4
$f_8$	5	5	5

例えば

$$f_2(1) = 4, \quad f_2(2) = 4, \quad f_2(3) = 5.$$

$g(x) := \max\{x + 2, 4\}$  で  $g: X \rightarrow Y$  を定めると

$$g(1) = \max\{1 + 2, 4\} = 4, \quad g(2) = \max\{2 + 2, 4\} = 4, \quad g(3) = \max\{3 + 2, 4\} = 5.$$

$h(x) := \left\lceil \frac{x+7}{2} \right\rceil$  で  $h: X \rightarrow Y$  を定めると

$$h(1) = \left\lceil \frac{8}{2} \right\rceil = 4, \quad h(2) = \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 4, \quad h(3) = \left\lceil \frac{10}{2} \right\rceil = 5.$$

結局、 $f_2, g, h$  は、みな等しい:

$$f_2 = g = h.$$

写像の相等は上で定義したように、定義域  $X$ , 行き先  $Y$ , 写像の値の 3 つがそれぞれ一致することで、 $f(x)$  を定義する式が一致することではないことに注意する (そもそも  $f_2$  は、 $f_2(x)$  の式で与えていない)。■

**余談 2.1 (写像は規則ではない)** 時々、 $X$  の各々の要素  $x$  を、 $Y$  のただ一つの要素に対応する 規則 を  $X$  から  $Y$  への写像という、と説明する人がいるが (私も口を滑らしたことがあります)、「規則」は誤解を招きかねない表現である。「規則」とは、例えば式のように、値を求めるための手順を明確に説明したもののことだ、と受け取る人が出てしまいそう (違います)。規則 (式) が異なっても同じ写像が定義されるということは、写像が規則そのものではない、ということになる。

それとは別に、写像が定まることは分かっても、「規則があるなら規則を書け」というツッコミに答えられない場合が多いことを指摘しておく。例えば微分方程式の問題では、解 (それは関数である) が一意的に存在するが、それを具体的な式で書くことは不可能である、という状況が非常にしばしばある。

$$f''(x) = -\sin f(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0$$

という条件 (微分方程式の初期値問題の一つ) を満たす関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  はただ一つ存在する (これはある振り子の運動を表す関数になる)。しかし  $f(x)$  を  $x$  の具体的な式で書く (個々の  $x$  の値に対して  $f(x)$  の値を式で表す) ことは難しい。この場合は、楕円関数と言う (普通のカリキュラムでは教わらない) 関数を使えば、 $f(x)$  を書き表すことが出来るが、微分方程式を少し変えただけで、 $f$  が定まっても、 $f(x)$  を具体的な式で表示出来なくなる場合が多いことが知られている。■

**余談 2.2 (集合の言葉を使って写像を定義する)** 「定まっていて」というのは曖昧な気がするかもしれない。その批判はもっともである。きちんと定義するためには、例えば次のようにする。

$X$  と  $Y$  の直積集合  $X \times Y$  の部分集合  $f$  が

$$(i) (\forall x \in X) (\exists y \in Y) (x, y) \in f.$$

$$(ii) (\forall (x_1, y_1) \in X \times Y) (\forall (x_2, y_2) \in X \times Y) x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

を満たすとき、 $f$  を  $X$  から  $Y$  への写像と呼び、 $x \in X$  に対して  $(x, y) \in f$  となる  $y \in Y$  (これは一意に存在する) を  $f(x)$  と表す。■

$f(x)$  のことを、 $f$  による  $x$  の**像** (the image of  $x$  under  $f$ ),  $f$  の  $x$  での**値** (the mapping value at  $x$ ) と呼ぶ。英語では、“ $f$  of  $x$ ” と読む。

$f$  により  $x$  が  $y$  に対応することを、 $f: x \mapsto y$  と表す。 $f: x \mapsto y$  は、 $y = f(x)$  と同じ意味である。

$X$  を写像  $f$  の**定義域** (the domain of  $f$ , the domain of definition of  $f$ ) と呼ぶ。他に始域, 始集合, source set などと呼ぶこともある。(有名なブルバキ [3] では、 $X$  に名前を与えていない。)

ところが、 $Y$  には定着した名前がない。教科書では「 $f$  のレンジ」と呼んでいるが、この講義では「 $f$  の終域」と呼ぶことにしておく。レンジにしても終域にしても、この講義の外で名前を呼ぶ必要が生じた場合は、「この  $Y$  のことを  $f$  の○○と呼ぶことにします」と断った方がよい。

$X$  の任意の部分集合  $A$  に対して、

$$f(A) := \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\} \quad (\text{これは } \{f(x) \mid x \in A\} \text{ と書く})$$

とおき、 $A$  の  $f$  による**像** (the image of  $A$  under  $f$ ) と呼ぶ。特に、定義域  $X$  の  $f$  による像

$$f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

のことは単に  $f$  の**像** (the image of  $f$ ) あるいは  $f$  の**値域** (the range of  $f$ ) と呼ぶ。

高校数学で学ぶ関数の値域は、写像として考えた場合、ここで言う値域と一致すると考えて良い<sup>4</sup>。

値域は色々な表現がある

$$f \text{ の値域} = f \text{ の像} = f \text{ による } X \text{ の像} = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} = \text{Image}(f).$$

**余談 2.3 ( $Y$  の呼名)** 中途半端に読むと混乱しかねないので、特に興味がなければ読まないことを勧める。

- そもそも名前を書いてない本が多い。
- 日本語で、名前を書いてある本では、「終域」、「終集合」、「値域」、「余域」、「行き先」など色々な名前を使っている。終域を使っているのは、井関 [4], 弥永 [5]。多分「始域」と組になる語。「終集合」は「始集合」と組になる語で、グラフで使われる(?)。「行き先」を target の訳語として使っている本は調べた限りで1冊だけで、案外これが良いような気もするが、「域」や「集合」のような言葉がないと「要素  $x$  の行き先  $f(x)$ 」と混同しかねないかもしれない。なかなか決定打が出ない。
- 英語では、 $Y$  のことを “the codomain of  $f$ ”, “the target (set) of  $f$ ”, “the range of  $f$ ” などと呼ぶ。

<sup>4</sup>高校数学で「この関数の値域を求めよ」と言ったとき、不等式で書いた条件を答えとしてあつたりするので、同じであると厳密には言えないかもしれない。大学の数学で値域と言えば集合であつて、集合を定める条件ではない。つまり、例えば  $1 \leq y \leq 2$  であれば、 $\{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}$  と書くべきである。

- 「 $f$  の値域」 (“the range of  $f$ ” の訳?) ということもあるそうだが<sup>5</sup>、少数派である。岩波数学辞典第4版では、 $\{y|\exists x(x \in X, y = f(x))\}$  (つまり上の記号で  $f(X)$  のこと) を  $f$  の値域と呼び、 $Y$  のことを「 $f$  の値域と呼ぶこともあるので注意が必要である」と書いてある。

言葉遣いに関しては権威に従うのが良い、というわけで次のようにしておく。

「値域」という言葉は  $f(X)$  を表すために使われることが多いので、 $Y$  を表すための言葉として使うのは避けることを推奨する

- この講義の教科書 [1] では、 $Y$  のことを  $f$  の「レンジ」と呼んでいる。なかなかユニークである (もちろん主流の言葉遣いとは言えない)。おそらく著者の専門分野では “range” と呼ぶのが普通であり、出来ればその訳語である「値域」を採用したかったが、それは上にも書いたように岩波数学辞典でも二番手扱いにされているので、それを避けて “range” の読み「レンジ」を採用したと推察する。

立場	$Y$ の扱い	$f(X)$ の呼名
高校数学 (関数)	そんなの考えない	関数 $f(x)$ の値域
岩波数学辞典	名前を与えてない	$f$ の値域, $f$ による $X$ の像
教科書	レンジと呼ぶ	$f$ による $X$ の像
この講義	定着した呼び名はないと認めただ、この講義では $f$ の終域と呼ぶことにする。	$f$ の値域, $f$ による $X$ の像

表 1: まとめ

## 2.2 高校数学の関数から大学数学の関数へ

高校では、

1.  $f(x) = x$  の式, を書いて「 $f(x)$  は関数である」、と言うことが多い。確かに各々の  $x$  に対して、1つの  $f(x)$  が定まる。
2.  $f(x) = x$  の式があるとき、それに加えて、定義域  $X$ , 行き先  $Y$  を定めれば写像と見なせる。
  - (a)  $X$  は明記されていないことが多いが、その場合は、 $X$  を  $f(x)$  が意味を持つようなすべての実数  $x$  の集合とする、のが不文律らしい。
  - (b)  $Y$  については言及されていることはまれ。写像の定義をするために  $Y$  が必要な場合、 $f$  の値域を含む  $Y$  を選ばばよい。 $f$  の値域を決定するのは面倒な場合もあるが、とにかく  $f(x) \in \mathbb{R}$  であるから、とりあえず  $Y = \mathbb{R}$  としておけば良い。

<sup>5</sup>この辺の言葉遣いは、数学の中でも分野によって違う。筆者が普段読むテキスト、論文に出て来る「値域」、 “range” はすべて  $f(X)$  の意味であるので、 $Y$  のことを「値域」と読むのは少なからぬ抵抗を感じる。

**例 2.3** 以下のすべてで  $Y = \mathbb{R}$  とする。

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ , 確かに  $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して  $f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}$  とすれば OK (写像  $f: X \rightarrow Y$  が得られた).

$f(x) = \frac{1}{x}$ , 確かに  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  に対して  $f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  とすれば OK.

$f(x) = \sqrt{x}$ , 確かに  $\forall x \in [0, \infty)$  に対して  $f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $X = [0, \infty)$  とすれば OK.

$f(x) = \log x$ , 確かに  $\forall x \in (0, \infty)$  に対して  $f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $X = (0, \infty)$  とすれば OK.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} . \text{これは } X = \mathbb{R}$$

定義域はなるべく大きい集合という暗黙のルール(?) で決めた。■

**注意 2.4** 終域  $Y$  の取り方には自由度のある場合が多いが、値域は1つに定まる。高校数学でも「値域を求めよ」という問題はあった。■

関数とは? この教科書の立場は、

関数とは写像 (の1種) で、定義域  $X$  と行き先  $Y$  が  $\mathbb{R}^N$  の部分集合であるものこと (定義域は不問。終域だけ  $\mathbb{R}^N$  の部分集合とする、という意見もある。)

“高校数学の関数” に、 $X$  と  $Y$  を明記することを義務付ければ、めでたく (この教科書での) 関数になる。

## 2.3 色々な写像の例

**例 2.5 (恒等写像)**  $X$  を空でない集合とするとき、 $\text{id}_X: X \rightarrow X$  を  $\text{id}_X(x) = x$  ( $x \in X$ ) で定める。これを  $X$  の**恒等写像** (the identity mapping of  $X$ ) と呼ぶ。■

**例 2.6 (Dirichlet の関数)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}). \end{cases}$$

例えば  $f(1) = 1$ ,  $f(1/2) = 1$ ,  $f(\sqrt{2}) = 0$ ,  $f(\pi) = 0$ . この  $f$  を **Dirichlet の関数** と呼ぶ。■

**例 2.7 (射影)**  $X, Y$  が集合であるとき、直積集合  $X \times Y$  が定義できる。

$$\text{pr}_1: X \times Y \rightarrow X, \text{pr}_1(x, y) = x.$$

$$\text{pr}_2: X \times Y \rightarrow Y, \text{pr}_2(x, y) = y.$$

要するに、 $\text{pr}_j$  は第  $j$  成分を取り出す写像である。それぞれ  $X$  への射影、 $Y$  への射影と呼ぶ。

$X = \{\text{カレー}, \text{ミートソース}, \text{うな丼}\}$ ,  $Y = \{\text{コーンスープ}, \text{みそ汁}\}$  の場合... ■

**例 2.8 ( $\mathbb{R}^2$  の一次変換)**  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  とするとき、 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を以下のように定める。 $f(x, y) = (x', y')$  として、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

こういう形をした  $f$  を  $\mathbb{R}^2$  の**1次変換**という。  $ad - bc \neq 0$  のとき、直線を直線に、線分を線分に、三角形を三角形に (内部は内部に、周は周に) 写す。合同な変換に限っても、原点の回りの回転、原点を通る直線に関する対称移動など色々ある。■

**例 2.9**  $X :=$  平面内の多角形全体の集合,  $Y := \mathbb{R}$ ,  $f(A) := A$  の面積, として,  $f: X \rightarrow Y$  が定まる。■

**例 2.10 (微分)**  $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  を  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への  $C^\infty$  級の (無限回微分可能な) 関数の全体とする。 $X := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $Y := C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ ,  $D: X \rightarrow Y$  が

$$D(f) = f' \quad (f \in X)$$

で定まる。ただし  $f'$  は  $f$  の導関数とする。■

**例 2.11 (定値写像)**  $X, Y$  は空でない写像で,  $c \in Y$  とするとき,  $f: X \rightarrow Y$  を

$$f(x) = c \quad (x \in X)$$

で定める。このような  $f$  を **定値写像** (constant map)、**定数写像** と呼ぶ。■

**例 2.12 (特性関数)**  $X$  は空でない集合,  $A \subset X$  とするとき,  $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in X \setminus A) \end{cases}$$

で定める。この  $\chi_A$  を  $A$  の **特性関数** (the characteristic function of  $A$ ) または **定義関数** と呼ぶ。■

**例 2.13 (包含写像)**  $X \subset Y$  のとき,  $i: X \rightarrow Y$  を  $i(x) = x$  ( $x \in X$ ) で定める。この  $i$  を **包含写像** (the inclusion map) と呼ぶ。■

**例 2.14 (数列)** 数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

は,  $\mathbb{N}$  から  $\mathbb{R}$  への写像

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

と見なせる。

(余談)  $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$  の定義のところで,  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  というのが出て来たが, これは  $\mathbb{N}$  から  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  への写像で,  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in A_n$  を満たすもの、と考えれば良い。■

### 3 合成写像

合成関数の概念は自然に写像にも拡張できる。

**定義 3.1 (合成写像)**  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  とするとき、

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

で  $h: X \rightarrow Z$  が定められる (模式的な図を描こう)。この  $h$  を  $f$  と  $g$  の **合成** (the composition of  $f$  and  $g$ )、あるいは **合成写像** (the composite mapping) と呼び、 $g \circ f$  で表す:

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

時々  $g \circ f$  を単に  $gf$  と書くこともある。また  $\overbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}^{n \text{個}}$  を  $f^n$  と書くこともある。

**命題 3.2 (合成写像に関する結合律)**  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$  とするとき、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

**証明**  $g \circ f: X \rightarrow Z$  で、 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  ( $x \in X$ ) である。ゆえに  $h \circ (g \circ f): X \rightarrow W$  で、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

一方、 $h \circ g: Y \rightarrow W$  で、 $(h \circ g)(y) = h(g(y))$  ( $y \in Y$ ) である。ゆえに  $(h \circ g) \circ f: X \rightarrow W$  で、

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

ゆえに  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ . ■

**問 1.**  $f: X \rightarrow Y$  とするとき、

$$f \circ \text{id}_X = f, \quad \text{id}_Y \circ f = f$$

が成り立つことを示せ。

## 4 単射, 全射, 全単射, 逆写像

### 4.1 単射

**定義 4.1 (単射)**  $f: X \rightarrow Y$  が**単射** (an injection, 形容詞は injective) あるいは**1対1** (one to one) であるとは、

$$(\#) \quad (\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

が成り立つことを言う。

この条件 (#) は

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

と同値である (対偶であるから)。

**問 2.**  $f$  が単射でないことを論理式で表わせ。

**余談 4.1 (' の読み方)** 日本の高校では、 $x'$  を「エックス ダッシュ」を読むのが普通だが、英語では“x prime”「エックス プライム」と読むのが普通である。ダッシュ (dash) とは、ハイフン “-” より長い横棒 “—” (en-dash), “—” (em-dash) のことを言う (この二つのダッシュの使い分けは結構難しい…脱線になるけど)。■

**例 4.2**  $X =$  明治大学の学生全体,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}, f(x) =$  学生  $x$  の学生番号, とするとき、 $f$  は単射である。(もしそうでないと、学生番号の役目を果たさない。) ■



**例 4.3 (狭義単調ならば単射)** 任意の狭義単調増加関数  $((\forall x_1 \in X) (\forall x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)))$  を満たす  $f$  のこと) や、任意の狭義単調減少関数  $((\forall x_1 \in X) (\forall x_2 \in X) (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)))$  を満たす  $f$  のこと) は単射である。例えば  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$  は単射である。■

**問 3.** 狭義単調増加関数は単射であることを示せ。

**例 4.4**  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$  は単射でない。  $-1 \neq 1, f(-1) = f(1)$  であるから。

$f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$  は単射である。  $[0, \infty)$  に制限したことで、狭義単調増加  $(x < x' \Rightarrow f_2(x) < f_2(x'))$  であるから。

$f_1(x), f_2(x)$  とともに同じ式  $x^2$  で定義したが、定義域が違うことで、単射であるかどうかの違いが生じたことに注意すべきである。■

次の命題のうち、少なくとも (1), (2) は確実にマスターしてほしい。

**命題 4.5 (写像の合成と単射性)**  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  とする。

- (1)  $f$  と  $g$  が単射ならば、 $g \circ f$  は単射である。
- (2)  $g \circ f$  が単射ならば、 $f$  は単射である。
- (3)  $g \circ f$  が単射でも、 $g$  が単射とは限らない。

### 証明

(1)  $x, x' \in X, x \neq x'$  とすると、 $f$  が単射であるから、 $f(x) \neq f(x')$ 。  $g$  が単射であるから、 $g(f(x)) \neq g(f(x'))$ 。 ゆえに  $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x')$ 。 ゆえに  $g \circ f$  は単射である。(別証)  $x, x' \in X, g \circ f(x) = g \circ f(x')$  とすると、 $f(x), f(x') \in Y, g(f(x)) = g(f(x'))$  である。 $g$  が単射であることから  $f(x) = f(x')$ 。  $f$  が単射であることから  $x = x'$ 。 ゆえに  $g \circ f$  は単射である。

(2)  $x, x' \in X, f(x) = f(x')$  とする。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$

$g \circ f$  が単射であるという仮定から  $x = x'$ 。 ゆえに  $f$  は単射である。

(3) 反例をあげる。

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, \infty)),$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y^2 \quad (y \in \mathbb{N})$$

とすると

$$g \circ f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

これは単調増加であるから単射である。一方、 $g$  は単射でない ( $-1 \neq 1$  であるが、 $g(-1) = 1 = g(1)$ )。■

## 4.2 全射

**定義 4.6 (全射)**  $f: X \rightarrow Y$  が**全射** (a surjection, 形容詞は surjective) あるいは**上への写像** (an onto mapping, onto) であるとは、

$$(b) \quad (\forall y \in Y) (\exists x \in X) \quad y = f(x)$$

が成り立つことを言う。

この条件 (b) は

$$Y = f(X) \quad (\text{あるいは } Y = \text{Image } f)$$

とも書ける。実際 (一般に  $f(X) \subset Y$  が成り立つことに注意すれば)

$$\begin{aligned} (\forall y \in Y) (\exists x \in X) \quad y = f(x) &\Leftrightarrow Y \subset f(X) \\ &\Leftrightarrow Y = f(X). \end{aligned}$$

**問 4.**  $f$  が単射でないことを論理式で表わせ。

**例 4.7**  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^2$  は全射でない。実際、値域  $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$  であり (厳密な証明は、 $f_1$  の最小値が  $f_1(0) = 0$  で、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \infty$ , それと中間値の定理を用いる)、終域は  $\mathbb{R}$  で、 $f_1(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$  であるから。

$f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_3(x) = x^2$  は全射である。実際、値域は  $f_3(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ , 終域は  $[0, \infty)$  で、 $f_3(\mathbb{R}) = [0, \infty)$  であるから。■

命題 4.5 の全射を単射と入れ替えたバージョンが成立する。やはり少なくとも (1) と (2) をマスターしてほしい。

**命題 4.8 (写像の合成と全射性)**  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  とする。

(1)  $f$  と  $g$  が全射ならば、 $g \circ f$  は全射である。

(2)  $g \circ f$  が全射ならば、 $g$  は全射である。

(3)  $g \circ f$  が全射でも、 $f$  が全射とは限らない。

### 証明

(1)  $z$  を  $Z$  の任意の要素とする。 $g$  が全射であるから、 $(\exists y \in Y) g(y) = z$ . そのような  $y$  を一つ取る。 $f$  が全射であるから、 $(\exists x \in X) f(x) = y$ . このとき  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ . ゆえに  $g \circ f$  は全射である。

(2)  $z$  を  $Z$  の任意の要素とする。 $g \circ f$  が全射であるから、 $(\exists x \in X) (g \circ f)(x) = z$ . そのような  $x$  を一つ取る。 $y := f(x)$  とおくと、 $y \in Y$ ,  $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$ . ゆえに  $g$  は全射である。

(3) 反例をあげる。 $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,  $g(y) = y^2$  とすると、 $g \circ f(x) = x$  ( $x \in [0, \infty)$ ),  $g \circ f = \text{id}_{[0, \infty)}$  であるので、 $g \circ f$  は全射である。しかし  $f$  は全射ではない ( $f(x) = -1$  となる  $x$  は存在しない)。■

**命題 4.9 (写像の合成と単射性・全射性)**  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  とする。

- (1)  $g \circ f$  が単射で、 $f$  が全射ならば、 $g$  は単射である。
- (2)  $g \circ f$  が全射で、 $g$  が単射ならば、 $f$  は全射である。

### 証明

- (1)  $y, y' \in Y, y \neq y'$  とする。 $f$  が全射であるから、 $\exists x, x' \in X$  s.t.  $f(x) = y, f(x') = y'$ . このとき、

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x), \quad g(y') = g(f(x')) = g \circ f(x').$$

$g \circ f$  が単射という仮定から、 $g \circ f(x) \neq g \circ f(x')$ . ゆえに  $g(y) \neq g(y')$ . ゆえに  $g$  は単射である。■

- (2)  $z$  を  $Z$  の任意の要素とする。 $z := g(y)$  とおく。 $g \circ f$  が全射であるから、 $(\exists x \in X)$   $(g \circ f)(x) = z$ .

$$z = g(y) = g(f(x))$$

であり、 $g$  が単射であることから、 $y = f(x)$ . ゆえに  $f$  は全射である。

## 4.3 全単射

**定義 4.10 (全単射)**  $f: X \rightarrow Y$  が全射かつ単射であるとき、 $f$  を**全単射**あるいは**双射** (a bijection, 形容詞は bijective) あるいは**1対1対応** (one-to-one correspondence) と言う。

**余談 4.2 (1対1対応)** 「1対1対応」という言葉は、学生から質問されて思い出した。自分が高校生の頃には良く出会った表現で、家庭教師としても説明した覚えがある…ということを書いたのは、最近は聞いていない、ということである。

そもそも「1対1対応」は、1対1 (one to one, 単射のこと) と紛らわしいので注意が必要である。広辞苑第5版では、一対一対応とは「単射に同じ」となっている(つまり広辞苑は間違えている)。

「(写像  $f: X \rightarrow Y$  によって)  $X$  と  $Y$  は1体1に対応する ( $X$  and  $Y$  are in one-to-one correspondence)」という言い方が多く、写像が1対1対応である、という言い方は少ないと感じる。

「対応 (2項関係) は、それ自身とその逆対応がともに一意対応のとき、1対1対応であると言う」というのもある。■

**例 4.11** (いずれもグラフを描くと良い。)

- (1)  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ . 単射でない ( $-1 \neq 1$  であるが  $f_1(-1) = 1 = f_1(1)$ ). 全射でもない ( $f_1(x) = -1$  となる  $x \in \mathbb{R}$  は存在しない)。
- (2)  $f_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ . 単射である (狭義単調増加であるから)。全射ではない ( $f_2(x) = -1$  となる  $x \in [0, \infty)$  は存在しない)。
- (3)  $f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f_3(x) = x^2$ . 単射でない ( $f_1$  と同様)。全射である ( $y \in [0, \infty)$  であれば  $x := \sqrt{y}$  とおくと、 $x \in \mathbb{R}, f_3(x) = y$ )。

(4)  $f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_4(x) = x^2$ . 単射である ( $f_2$  と同様)。全射でもある ( $f_3$  と同様)。ゆえに全単射である。

定義域を  $[0, \infty)$  に制限することで単射になった。行き先を  $[0, \infty)$  に置き換えることで全射になった。■

**問 5.**  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5, 6\}$  とするとき、 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求めよ。そのうち単射であるもの、全射であるもの、全単射であるものはどれか。

#### 4.3.1 全単射と要素の個数

例 2.2 ( $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5\}$ ) では、単射は一つも存在せず、 $f_j$  ( $j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ) は全射であり、 $f_1$  と  $f_8$  は全射ではない。一方、問 5 ( $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5, 6\}$ ) では、全射も単射も存在するが、それらは一致した。

**問 6.**  $X = \{1, 2, 3\}$ ,  $Y = \{4, 5\}$  とするとき、 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるもの、全射であるものを指摘せよ。■

**問 7.**  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5\}$  とするとき、 $X$  から  $Y$  への写像をすべて求め、単射であるもの、全射であるものを指摘せよ。■

実は次の命題が成り立つ。

**命題 4.12 (有限集合の間の写像の全射性、単射性)**  $X, Y$  が有限集合であるとする。要素の個数をそれぞれ  $|X|, |Y|$  と書く。

(1)  $X$  から  $Y$  への単射が存在する  $\Leftrightarrow |X| \leq |Y|$ .

(2)  $X$  から  $Y$  への全射が存在する  $\Leftrightarrow |X| \geq |Y|$ .

(3)  $|X| = |Y|$  であるとき、任意の写像  $f: X \rightarrow Y$  について、以下の (i), (ii), (iii) は互いに同値である。

(i)  $f$  は単射である。

(ii)  $f$  は全射である。

(iii)  $f$  は全単射である。

(4)  $X$  から  $Y$  への全単射が存在する  $\Leftrightarrow |X| = |Y|$ .

**証明**  $n := |X|$ ,  $m := |Y|$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  とおく (それぞれ、どの二つの要素も互いに相異なる)。

(1)  $f: X \rightarrow Y$  が単射であれば、 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) はどの二つも相異なり、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} \subset Y$  であるから、要素の個数を比較して  $|X| = n \leq |Y|$ . 逆に  $n \leq m$  とすると、 $f(x_i) = y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$  を定義すると、 $f$  は単射となる。

(2)  $f: X \rightarrow Y$  が全射であれば、 $\{f(x_i) | 1 \leq i \leq n\} = Y$  であるから、 $|X| = n \geq |Y|$ . 逆に  $n \geq m$  とすると、 $f(x_i) = y_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ),  $f(x_i) = y_1$  ( $m < j \leq n$ ) とおくことで、 $f: X \rightarrow Y$  を定義すると、 $f$  は全射となる。

(3) (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) を示す。

$f: X \rightarrow Y$  が単射とする。 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) が相異なるので、 $|\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\}| = n$ , 仮定からそれが  $|Y|$  に等しく、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subset Y$  であるから、 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ . ゆえに  $f$  は全射である。

一方、 $f: X \rightarrow Y$  が全射とする。 $\{f(x_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = Y$ . 仮定から  $n = |Y|$  であるから、 $f(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) はどの二つも互いに相異なることが分かる。ゆえに  $f$  は単射である。

(4)  $X$  から  $Y$  への全単射が存在すれば、(1) から  $|X| \leq |Y|$ , (2) から  $|X| \geq |Y|$  であるから  $|X| = |Y|$ . 逆に  $|X| = |Y|$  とすると、(1) から  $X$  から  $Y$  への単射  $f$  が存在する。(3) から  $f$  は全単射である。■

**命題 4.13 (線形代数バージョン)**  $X, Y$  が体  $K$  上の有限次元線形空間であるとする。空間の次元をそれぞれ  $\dim X, \dim Y$  と書く。

(1)  $X$  から  $Y$  への単射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X \leq \dim Y$ .

(2)  $X$  から  $Y$  への全射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X \geq \dim Y$ .

(3)  $\dim X = \dim Y$  であるとき、任意の線形写像  $f: X \rightarrow Y$  について、以下は同値である。

(i)  $f$  は単射である。

(ii)  $f$  は全射である。

(iii)  $f$  は全単射である。

(4)  $X$  から  $Y$  への全単射な線形写像が存在する  $\Leftrightarrow \dim X = \dim Y$ .

## 4.4 逆写像

(ここを説明する前に、恒等写像  $\text{id}_X$  の復習をすること。)

$f: X \rightarrow Y$  を全単射と仮定する。

$f$  が全射であることから、 $\forall y \in Y$  に対して、 $f(x) = y$  となる  $x \in X$  が存在する。

そのような  $x$  は、 $f$  が単射であることから、(1 つの  $y$  に対して) 1 つしかない。実際  $y = f(x) = f(x')$  ならば、 $f$  が単射であることから  $x = x'$ .

**「一意に存在する」** このようなとき、「 $\forall y \in Y$  に対して、 $f(x) = y$  となる  $x \in X$  が一意に存在する」と言う。一意に存在するを  $\exists!$  で表すことがある ( $\exists!$  の代わりに  $\exists 1$  と書く人もいるが、まぎわらしい場合があるので、ここでは採用しない)。

記号  $\exists!$  の約束

「 $P(x)$  を満たす  $x$  が一意に存在する」とは

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \Rightarrow y = x)).$$

これを  $(\exists!x) P(x)$  と表す。

要するに「一意的に存在する」とは「1個だけ存在する」、「条件を満たすものの個数が1である」ということである。

この記号を用いると、 $f: X \rightarrow Y$  が全単射であるとき

$$(*) \quad (\forall y \in Y)(\exists! x \in X) \quad f(x) = y.$$

逆に  $(*)$  が成り立つならば、 $f$  が全単射であることが導かれる。

**問 8.**  $(*)$  が成り立つならば  $f$  が全単射であることを示せ。

以上をまとめておく。

**命題 4.14**  $f: X \rightarrow Y$  とするとき、次の二条件は同値である。

(i)  $f$  は全単射である。

(ii)  $(\forall y \in Y)(\exists! x \in X) \quad f(x) = y.$

「任意の  $y \in Y$  に対して、 $f(x) = y$  を満たす  $x \in X$  が一意的に存在する」

ゆえに  $y \in Y$  に対して

$$(1) \quad g(y) := "f(x) = y \text{ を満たす } x" \quad (f \text{ による像が } y \text{ であるような } x)$$

とすることで、写像  $g: Y \rightarrow X$  が定められる。この  $g$  を  $f$  の**逆写像** (the inverse mapping of  $f$ ) と呼び、記号  $f^{-1}$  で表す。 $f^{-1}$  は“f inverse”と読む。

すなわち、全単射  $f: X \rightarrow Y$  に対して、

$$(2) \quad f^{-1}(y) := "f(x) = y \text{ を満たす } x \in X" \quad (y \in Y)$$

で定まる  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  を  $f$  の逆写像と呼ぶ。

次は明らか (上でそのように定義したのだから) であるが、強調しておく (注意:  $f: X \rightarrow Y$  が全射であることから、終域  $Y$  は値域  $f(X)$  と一致するので、値域を終域や「レンジ」と言っても良い)。

(♡) 逆写像の定義域と値域は、それぞれ元の写像の値域と定義域である:

$$f^{-1} \text{ の定義域} = f \text{ の値域}, \quad f^{-1} \text{ の値域} = f \text{ の定義域.}$$

$f$  の逆写像が存在するとき、

$$(3) \quad (\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$$

である。これは逆写像  $f^{-1}$  の定義のようなもので、単純なことであるけれど、納得できるまで考えること。(  $f$  が全単射である場合に、与えられた  $y$  に対して、 $y = f(x)$  が成り立つような  $x$  のことを  $f^{-1}(y)$  と書くのだった。 )

$f$  の逆写像が存在するかどうか分からないときに、ある  $x \in X, y \in Y$  に対して  $y = f(x)$  が成り立っていても、 $x = f^{-1}(y)$  と書くことは正しくない。例えば  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f(x) = x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) で定めるとき、 $f(2) = 4$  であるが、 $f^{-1}(4) = 2$  と書いてはいけない (逆写像  $f^{-1}$  が存在しないのだから)。

(3) から

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in X), \quad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in Y)$$

が成り立つ<sup>6</sup>。合成写像の言葉を使って書き換えると

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad (x \in X), \quad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad (y \in Y).$$

ゆえに (明らかな  $f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$ ,  $f \circ f^{-1}: Y \rightarrow Y$  と合わせて)

$$(4) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

一応、まとめておく。

**命題 4.15**  $f: X \rightarrow Y$  が全単射であるとき、

$$(5) \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

ある意味でこの逆が成り立つ。次の命題は、 $g$  が  $f$  の逆写像であることを証明する必要がある場合に、役立つことが多い。

**命題 4.16** 写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  が

$$(\#) \quad g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たすならば (注:  $f$  が全単射であることは仮定していない)、 $f$  は全単射で、 $g = f^{-1}$  である。

(実は仮定の条件は  $f$  と  $g$  について対称なので、 $g$  も全単射で  $f = g^{-1}$  も成り立つ。)

**注意 4.17 (逆写像の定義 (テキストによる違い))**  $f: X \rightarrow Y$  が与えられたとき、この条件  $(\#)$  を満たす写像  $g$  のことを  $f$  の逆写像と定義するテキストも多い (そこで「逆写像の定義を書け」という問に、そういうように答えても良いことにする)。そこだけ見るとすつきりした感じがするかもしれないが、全単射ならば逆写像が存在するという議論をサボることは出来ない。近道が出来ないわけではない。■

**証明** 最初に恒等写像は全単射であることを注意しておく。 $g \circ f = \text{id}_X$  が単射であることから、 $f$  は単射であり (命題 4.5)、 $f \circ g = \text{id}_Y$  が全射であることから、 $f$  は全射である (命題 4.8)。ゆえに  $f$  は全単射であり、 $f^{-1}$  が存在する。任意の  $y$  に対して、 $x = f^{-1}(y)$  とおくと、 $y = f(x)$  であるが、 $g(y) = g(f(x)) = \text{id}_X(x) = x$ 。ゆえに  $g(y) = f^{-1}(y)$ 。ゆえに  $g = f^{-1}$  である。■

この証明の後半は、次のようにも出来る。 $g \circ f = \text{id}_X$  より  $(g \circ f) \circ f^{-1} = \text{id}_X \circ f^{-1}$ 。これから  $g = f^{-1}$ 。

**例 4.18 (あみだくじ)**  $n$  を自然数として、 $X := \{1, 2, \dots, n\}$  とおく。 $n$  本のあみだくじを 1 つ作ると、写像  $f: X \rightarrow X$  が定まるが、 $f$  は全単射である。— 逆向きなあみだくじの定める写像を  $g: X \rightarrow X$  とすると、 $g \circ f = \text{id}_X$ ,  $f \circ g = \text{id}_X$  が成り立つので、命題 4.16 により、 $f$  は全単射かつ  $g = f^{-1}$ 。■

条件  $(\#)$  は、 $f$  と  $g$  について対称であることに注意すると、 $g$  は全単射で、 $g^{-1} = f$  であることが分かる。ゆえに、次が得られる。

<sup>6</sup>念のため:  $\forall x \in X$  に対して、 $y := f(x)$  とおくと、 $x = f^{-1}(y)$  が成り立つので、 $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ 。同様に  $\forall y \in Y$  に対して、 $x := f^{-1}(y)$  とおくと、 $y = f(x)$  が成り立つので、 $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ 。

**系 4.19** 任意の全単射  $f$  に対して、 $f$  の逆写像  $f^{-1}$  は全単射で、 $f^{-1}$  の逆写像は  $f$  である。

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

**例 4.20**  $f_4: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $f_4(x) = x^2$  は全単射であるから、逆写像  $f_4^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  が存在する。実は  $f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$  である。■

**問 9.** 高校数学の関数  $f(x) = e^x$  から全単射な写像  $f: X \rightarrow Y$  を作れ ( $X, Y$  を適切に ( $X$  をなるべく大きく、 $f$  が全単射となるように) 定義し、 $f$  が全単射であることを確認せよ)。逆写像  $f^{-1}$  の定義域と「レンジ」は何か。 $f^{-1}(y)$  を普通どのように書くか。

もし逆三角関数  $\sin^{-1}$  を学んでいたら、それはどういう写像の逆写像であるか説明せよ。

**定理 4.21**  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  が共に全単射であるならば、 $g \circ f: X \rightarrow Z$  も全単射で、

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**証明**  $g \circ f: X \rightarrow Z, f^{-1} \circ g^{-1}: Z \rightarrow X$  であるから、合成可能である。

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = ((g \circ f) \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = (g \circ (f \circ f^{-1})) \circ g^{-1} = (g \circ \text{id}_Y) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_Z,$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f = (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)) \circ f = (f^{-1} \circ \text{id}_Y) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_X.$$

ゆえに  $f^{-1} \circ g^{-1}$  は  $g \circ f$  の逆写像である:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \blacksquare$$

**例 4.22 (線形代数)**  $A, B$  が正則な  $n$  次行列であるとき、 $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ . ■

## 5 部分集合の像と逆像

すでにフライング気味に  $f(X)$  という記号を使っているが、写像  $f$  による定義域の部分集合  $A$  の像  $f(A)$  を定義して、基本的な性質を述べる。

**定義 5.1 (部分集合の像, 写像の像 (値域))**  $f: X \rightarrow Y$  とする。

(1)  $A \subset X$  に対して、 $A$  の要素の  $f$  による像の全体を  $f(A)$  で表し、 $A$  の  $f$  による像 (the image of  $A$  under  $f$ ) または**順像** (the direct image of  $A$  under  $f$ ) と呼ぶ。

$$f(A) := \{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

(2) 特に写像  $f$  の定義域  $X$  の  $f$  による像  $f(X)$  を、 $f$  の像 (the image of  $f$ )、あるいは  $f$  の**値域** (the range of  $f$ ) と呼び、 $\text{Image}(f)$  と表す。

$$\text{Image}(f) := f(X) = \{y \mid (\exists x \in X) y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

$f: X \rightarrow Y, a \in X, A \subset X$  とするとき、 $f(a)$  と  $f(A)$  という記号が使えることになる。どちらも  $f$  による「エー」の像であるが、 $f(a)$  は  $Y$  の要素、 $f(A)$  は  $Y$  の部分集合である。異なる概念に対して、形だけからは区別が付かない同じ記号を用いることを、「記号の濫用」と



いい、あまり良くないこととされるが、上の記号は数学の普通のテキストを読むためには避けることが出来ない。

$(\exists x \in A) y = f(x)$  というのは、 $y$  に関する条件であることに注意しよう。 $\{y \mid P(y)\}$  ( $P(y)$  は  $y$  に関する条件) という形をしているわけである。 $\{f(x) \mid x \in A\}$  は  $\{y \mid (\exists x \in A) y = f(x)\}$  の略記法である。

特に  $f$  の値域は色々な記号、呼び名で表される。

$$f(X) = \text{Image}(f) = \text{“}f \text{ の値域”} = \text{“}f \text{ の像”} = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

**$f$  の値域とは、 $f$  の値の全体である。**

**定義 5.2 (部分集合の逆像)**  $f: X \rightarrow Y$  とする。 $B \subset Y$  に対して、 $X$  の要素で  $f$  による像が  $B$  に属するもの全体を  $f^{-1}(B)$  で表し、 $B$  の  $f$  による**逆像** (the inverse image of  $B$ , pull-back) と呼ぶ。

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

$f$  が全単射ではない場合、つまり  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  が存在しない場合にも、 $f^{-1}(B)$  という記号を用いることに注意が必要である。慣れないと混乱するかもしれない。教科書 [1] では、この点を強く非難している。

証明するときのために記憶すべきこと

$$y \in f(A) \Leftrightarrow (\exists x \in A) y = f(x).$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

**例 5.3**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x$  とするとき

$$f(\{0\}) = \{0\}, \quad f\left(\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \{0, 1\}, \quad f(\{0, \pi\}) = \{0\}, \quad f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1], \quad f([0, \pi]) = [0, 1].$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{Z}) z = n\pi\}, \quad f^{-1}(\{2\}) = \phi, \quad f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}, \quad f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 6\right]\right) = \dots$$

$f^{-1}$  は存在しないので、 $f^{-1}(2)$ ,  $f^{-1}(0)$  もナンセンスである。■

**注意 5.4 (教科書 [1] の記号法について)** [1] では、 $f(A)$  や  $f^{-1}(B)$  という記号を使うことのデメリットを指摘して、 $f(A)$  のことを  $f_*(A)$ ,  $f^{-1}(B)$  のことを  $f^*(B)$  と表している。

$$f(A) = f_*(A) = \text{“}A \text{ の } f \text{ による像”} = \{f(a) \mid a \in A\} = \{y \mid \exists a(a \in A \wedge y = f(a))\}.$$

$$f^{-1}(B) = f^*(B) = \text{“}B \text{ の } f \text{ による逆像”} = \{x \in X \mid f(x) \in B\} = \{x \mid x \in X \wedge f(x) \in B\}.$$

しかし、 $f(A)$  や  $f^{-1}(B)$  という記号はもう十分に普及してしまっていて、避けて通ることは到底不可能であると思う。だったら最初からその記号を用いて慣れてしまう方が良いと考える。

- $X$  の要素  $x$  の  $f$  による像  $f(x)$  と、 $X$  の部分集合  $A$  の  $f$  による像  $f(A)$  を混同しないように、不徹底なやり方ではあるけれど、配慮はされている。つまり、集合の要素を表すのには小文字を、(部分)集合を表すのには大文字を使っているのである。初心者向けの補助輪として当面十分であると考えられる。

- $f^*(B)$  と  $f_*(A)$  という記号を使う場合、どちらが順像、逆像であるか、混乱する可能性はないだろうか？逆写像  $f^{-1}$  がないときに  $f^{-1}(B)$  と書くのは混同のもとというのだが、逆写像  $f^{-1}$  が存在するときに、 $B$  の  $f$  による逆像と、 $B$  の  $f^{-1}$  による像が一致する。

$$\begin{aligned} f^{-1} \text{ による } B \text{ の像} &= \{x \in X \mid (\exists y) (y \in B \wedge x = f^{-1}(y))\} \\ &= \{x \in X \mid (\exists y) (y \in B \wedge y = f(x))\} \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ &= f \text{ による } B \text{ の逆像.} \end{aligned}$$

つまり教科書の記号によると  $(f^{-1})_*(B) = f^*(B)$  ということである。 $f^{-1}(B)$  という記号は  $f$  の像ではありえないことは明白で良いと思う。

- 読者の混乱を避けるためというが、結局のところ、記号を増やして読者の負担を増やしている面があることは否めない。 $f$  の値域 (像) を表すのに、 $\text{Image}(f)$ ,  $f_*(X)$ ,  $f(X)$  と記号を3つも覚えなくてはならない ( $\text{Image}(f)$  という記号自体は好ましく思うけれど)。

■

写像  $f: X \rightarrow Y$  が全射であるという条件は、 $f(X) = Y$  と表せる。

$f: X \rightarrow Y$  が全単射であるとき、 $B \subset Y$  の、逆写像  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  による像は、 $B$  の  $f$  による逆像に一致する。実際

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(b) \mid b \in B\} &= \{y \mid \exists b (b \in B \wedge y = f^{-1}(b))\} = \{y \mid \exists b (b \in B \wedge b = f(y))\} \\ &= \{y \mid f(y) \in B\}. \end{aligned}$$

**命題 5.5**  $f: X \rightarrow Y$  とする。

- (1)  $f(\emptyset) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ .
- (2)  $f^{-1}(Y) = X$ .
- (3)  $(\forall x \in X) f(\{x\}) = \{f(x)\}$ .
- (4)  $(\forall y \in Y) f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ .

**問 10.** 命題 5.5 を証明せよ。

**命題 5.6**  $f: X \rightarrow Y, A_1, A_2 \subset X$  とする。

- (1)  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$ .
- (2)  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ .
- (3)  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .
- (4)  $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$ .
- (5)  $f$  が単射であれば、(1) の逆が成り立ち、(2) と (4) の等式バージョンが成立する。すなわち、

$$(a) \quad f(A_1) \subset f(A_2) \Rightarrow A_1 \subset A_2.$$

$$(b) \quad f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

$$(c) \quad f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2).$$

- (6)  $f$  が単射でなければ (a), (b), (c) のそれぞれについて、それが成り立たないような  $A_1, A_2$  が存在する。

教科書に書いてあることを紹介する。

(3) では等式が成り立つのに、(2), (4) では等式になっていない。(5) では単射ならば等式が成り立つと書いてある。それならば単射でないならば等式が成り立たないのではないかと推測できる。それが成り立たないことを自分で確認する自主性が大事である。

要するに (6) で書いたことを自分で推測するようになろう、ということである。よくあるのは、成り立たないような反例をあげよ、という問題であるが、上では単射でなければ、必ず成り立たないという命題にした。

### 証明

- (1)  $A_1 \subset A_2$  を仮定する。 $y \in f(A_1)$  とすると、 $(\exists x \in A_1) y = f(x)$ 。  $A_1 \subset A_2$  であるから、 $x \in A_2$ 。ゆえに  $y \in f(A_2)$ 。ゆえに  $f(A_1) \subset f(A_2)$ 。
- (2) (定跡に従って、「 $y \in f(A_1 \cap A_2)$  とすると」で始めて証明することも出来るが、(1) を使おうと簡単である。)  $A_1 \cap A_2 \subset A_1$  かつ  $A_1 \cap A_2 \subset A_2$  であるから、(1) を用いると、 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$  かつ  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$ 。ゆえに  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ 。
- (3) (これも定跡に従って証明できるが、(1) を利用すると、少し簡単になる。)
  - (a)  $A_1 \subset A_1 \cup A_2$  かつ  $A_2 \subset A_1 \cup A_2$  であるから、(1) より  $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$  かつ  $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。ゆえに  $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ 。

(b)  $y \in f(A_1 \cup A_2)$  とすると、 $(\exists x \in A_1 \cup A_2) y = f(x)$ .  $x \in A_1$  の場合は  $y \in f(A_1)$  であるから、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ .  $x \in A_2$  の場合は  $y \in f(A_2)$  であるから、 $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ . いずれの場合も  $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ . ゆえに  $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ .

(a), (b) より  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ . (証明終)

(別証) 任意の  $y \in Y$  に対して、

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow (\exists x) (x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x) ((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow ((\exists x) (x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (\exists x) (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

ゆえに  $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ . (証明終) (途中で  $((\exists x)P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)P(x)) \vee ((\exists x)Q(x))$  を用いた<sup>7</sup>.)

(4)  $y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$  とすると、 $y \in f(A_1) \wedge y \notin f(A_2)$ .  $y \in f(A_1)$  であることから  $(\exists x \in A_1) y = f(x)$ . この  $x$  は  $A_2$  には属さない。実際  $x \in A_2$  とすると  $y \in f(A_2)$  となり矛盾が生じる。ゆえに  $x \in A_1 \setminus A_2$  であるから、 $y \in f(A_1 \setminus A_2)$ .

(5) 省略する。教科書 [1] の pp. 137–138 に載っている。

(6)  $f$  が単射でなければ、 $(\exists x_1 \in X) (\exists x_2 \in X) x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$ . そこで  $A_1 := \{x_1\}$ ,  $A_2 := \{x_2\}$  とおくと、

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \{f(x_1)\}, \\ f(A_2) &= \{f(x_2)\} = \{f(x_1)\} = f(A_1), \\ f(A_1 \cap A_2) &= f(\emptyset) = \emptyset, \\ f(A_1) \cap f(A_2) &= \{f(x_1)\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(A_1) &\subset f(A_2) \wedge A_1 \not\subset A_2, \\ f(A_1 \cap A_2) &\neq f(A_1) \cap f(A_2), \end{aligned}$$

$A_1 := \{x_1, x_2\}$ ,  $A_2 := \{x_2\}$  とおくと、

$$\begin{aligned} f(A_1 \setminus A_2) &= f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}, \\ f(A_1) \setminus f(A_2) &= \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_1)\} = \{f(x_1)\} \setminus \{f(x_1)\} = \emptyset \end{aligned}$$

であるから

$$f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2). \blacksquare$$

$f$  の逆像  $f^{-1}(\cdot)$  に関する公式はずっとシンプルで、証明もやさしい。変な話になるが、テストで出題されたら、絶対に逃がさない、くらいに考えて欲しい。

<sup>7</sup>これは  $\vee$  を  $\wedge$  にした式は一般には成り立たない。また  $\exists$  のかわりに  $\forall$  にしたときは、 $((\forall x)P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)P(x)) \wedge ((\forall x)Q(x))$  は一般に成り立つが、 $\wedge$  を  $\vee$  にした式は成り立たない。

**命題 5.7**  $f: X \rightarrow Y, B_1, B_2 \subset Y$  とする。

- (1)  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .
- (2)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .
- (3)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .
- (4)  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ . 特に  $B \subset Y$  に対して、 $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ .
- (5)  $f$  が全射ならば、(1) の逆も成立する。

$$B_1 \subset B_2 \Leftrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

**証明**

(1)  $B_1 \subset B_2$  を仮定する。  $x \in f^{-1}(B_1)$  とすると、  $f(x) \in B_1$ .  $B_1 \subset B_2$  より  $f(x) \in B_2$ . ゆえに  $x \in f^{-1}(B_2)$ . ゆえに  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .

(2)  $x \in X$  に対して、

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

ゆえに  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .

(3) (2) と同様に証明できる。

(4) (2) と同様に証明できる。

(5) (1) があるので、  $f$  が全射と仮定するとき、  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$  ならば  $B_1 \subset B_2$  が成り立つことを証明すればよい。  $y \in B_1$  とすると、  $f$  が全射という仮定から  $(\exists x \in X) y = f(x)$ .  $f(x) \in B_1$  であるから、  $x \in f^{-1}(B_1)$ . 仮定  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$  より  $x \in f^{-1}(B_2)$ . ゆえに  $y = f(x) \in B_2$ . ゆえに  $B_1 \subset B_2$ . ■

**命題 5.8**  $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset Y$  とする。

- (1)  $f^{-1}(f(A)) \supset A$ .  $f$  が単射ならば  $f^{-1}(f(A)) = A$ .
- (2)  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .  $f$  が全射ならば  $f(f^{-1}(B)) = B$ .
- (3)  $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ .

**証明** まず

$$\begin{aligned} y \in f(A) &\Leftrightarrow (\exists x \in A) y = f(x), \\ x \in f^{-1}(B) &\Leftrightarrow f(x) \in B \end{aligned}$$

を思い出す。

(1)  $x \in A$  とすると、 $f(x) \in f(A)$ . ゆえに  $x \in f^{-1}(f(A))$ . ゆえに  $A \subset f^{-1}(f(A))$ .

以下  $f$  が単射と仮定する。 $x \in f^{-1}(f(A))$  とすると、 $f(x) \in f(A)$ . ゆえに  $(\exists x' \in A) f(x) = f(x')$ .  $f$  が単射であることから  $x = x'$ . ゆえに  $x \in A$ . ゆえに  $f^{-1}(f(A)) \subset A$ . 従って  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

(2)  $y \in f(f^{-1}(B))$  とすると、 $(\exists x \in f^{-1}(B)) y = f(x)$ .  $x \in f^{-1}(B)$  であるから、 $f(x) \in B$ . ゆえに  $y \in B$ . ゆえに  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .

以下、 $f$  が全射と仮定する。 $y \in B$  とすると、 $(\exists x \in X) y = f(x)$ .  $f(x) \in B$  であることから、 $x \in f^{-1}(B)$ . すると  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ . ゆえに  $B \subset f(f^{-1}(B))$ . 従って、 $f(f^{-1}(B)) = B$ .

(3)  $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$  とすると、 $(\exists x \in A \cap f^{-1}(B)) y = f(x)$ .  $x \in A$  であるから、 $f(x) \in f(A)$ .  $x \in f^{-1}(B)$  であるから、 $f(x) \in B$ . ゆえに  $y = f(x) \in f(A) \cap B$ . ゆえに  $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$ .

逆に  $y \in f(A) \cap B$  とすると、 $y \in f(A)$  であることから、 $(\exists x \in A) y = f(x)$ .  $f(x) = y \in B$  であるから、 $x \in f^{-1}(B)$ . ゆえに  $x \in A \cap f^{-1}(B)$ . ゆえに  $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$ . ゆえに  $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$ .

以上から  $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ . ■

## 6 グラフ

$f: X \rightarrow Y$  とするとき、

$$\text{graph } f := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

とおき、 $f$  の**グラフ**と呼ぶ。

$\text{graph } f \subset X \times Y$  である。

$G \subset X \times Y$  がある写像のグラフであるためには、

$$(*) \quad \forall x \in X \quad \exists! z \in G \quad \text{pr}_1(z) = x$$

が成り立つことが必要十分である。

$X$  から  $Y$  への写像とは、 $X \times Y$  の部分集合  $G$  で、(\*) を満たすもの、と言っても良い。

## 2015年度授業の記録

- 6月4日。問6<sup>8</sup>の解説を配る。今日は写像の1回め。写像の定義と例。定値写像まで。
- 6月11日。前半は問6の解説(結構時間を使う)。後半は、特性関数、数列をやって、合成写像。  
(6月18日は中間試験。試験範囲は論理と集合。)
- 6月25日。単射、全射、全単射。
- 7月2日。全単射

<sup>8</sup><http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/toi6.pdf>

## 参考文献

- [1] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).
- [2] かわだ ゆきよし 河田敬義, ゆきお 三村雄征：現代数学概説 II, 岩波書店 (1965).
- [3] ブルバキ：数学原論 集合論 要約, 東京図書 (1968), 前原昭二 訳.
- [4] いせき きよし 井関清志：集合と論理, 新曜社 (1979).
- [5] 彌永昌吉：数の体系 上, 岩波書店 (1972).

# 索引

bijection, 10

bijjective, 10

composite mapping, 7

composition (of mapping), 7

identity mapping, 6

inclusion map, 7

injection, 8

injective, 8

one to one, 8

one-to-one correspondence, 10

onto, 9

onto mapping, 9

surjection, 9

surjective, 9

値, 4

1 次変換, 6

1 対 1 (写像が), 8

1 対 1 対応, 10

上への写像, 9

狭義単調減少, 8

狭義単調増加, 8

合成 (写像の), 7

合成写像, 7

恒等写像, 6

射影, 6

写像, 2

全射, 9

全単射, 10

像 (写像による), 4

双射, 10

単射, 8

定義域, 4

定義関数, 7

定数写像, 6

定値写像, 6

Dirichlet の関数, 6

特性関数, 7

包含写像, 7