Part 1. 論理

桂田 祐史

katurada @ meiji.ac.jp (@は ASCII の@), 910 号室

2013 年 4 月, 2014 年 4 月 16 日, 2015 年 5 月 11 日

目 次

1　イントロ

数理リテラシーの 3 つの大きな話題 (論理、集合、写像) のうち、論理についての説明を始める (しかし例の中では集合を持ち出したりする)。

論理は数学の基礎と言えるが、論理をきちんと説明するのは案外難しい。大学の数学のテキストで論理を扱っているものは実はあまり多くない。論理については高等学校までの数学で身についているものとして、集合あたりから説明から始めているものが多い。数少ない論理を扱った本に初等的なものは少なく、内容も本ごとに大きく異なっている。

それでは高等学校の数学の教科書での論理の説明 (桂田 [1] 参照) はしっかりしているかというと、そうは言いにくいところがある。ド・モルガンの法則はあっても論理の分配律はないなど、不思議な感じのする内容である。

この講義で採用した教科書 (中島 [2]) は論理について説明してある点で貴重であると思う。この本の最初の部分では、日常語の論理と数学での論理の違いの説明にページを割いている。それは意味のあることだし、興味深く感じられる人もいるようだが、授業でこなすのは、かなり時間が必要になるし、以後の必要な数学を展開するのに必須とは思えない。そこでこの講義では、以下のようにする。

まず数学で用いる論理を記号、式で表すことを目標とする。式で表すことで論理の法則が明確になる。それを確認することで先に進み、最後に反省することにしよう (どちらかというと、教科書と逆に話を進める)。

教科書以外の読みやすい参考書を二三あげておく (どれもとてもお勧め)。中内 [3] 練習問題が多く、学習に便利だと思われる。新井 [4] は論理学の専門家による、初学者向けの分かりやすい真面目な入門書である。少しずれるが、分かりやすく数学議論を書くにはどうすれば良いか論じた結城 [5] をあげておく。

実を言うと、講義をする立場としては、上に紹介した教科書や参考書の説明では、自分自身がすっきりしないところがいくつかある。もう少し専門的な内容の本を何冊かめくってみて (例えば島内 [6], 前原 [7])、自分なりにすっきりした説明が出来ないか検討したが、今のところ解答が見つかっていない。

2 命題論理

命題と条件に関する論理演算 $\neg$ (〜でない), $\wedge$ (かつ), $\vee$ (または), $\Rightarrow$ (ならば) は、真理値を定めるルールによって特徴づけられる。見方によっては意味を考えずに (?) 定義出来る [1]。

この節では、複数の命題が組み合わされた複合命題の真偽を問う命題論理を扱う (変数を含む「条件 (述語)」については、次節で扱う)。

2.1 命題とその真偽

(以下、用語の説明をするが、数学的な定義というわけではない。)

正しいか正しくないか、数学的に判断できる主張 (文章や式) のことを**命題** (proposition) と呼ぶ。

(注意: 正しい、正しくないとは、道徳的・倫理的・法律的な善悪を言っているのではない。真理・事実に合致するか、ということである。)

例 2.1 「$1+1=2$」は命題である。「円周率は有理数である」、「$\sin 1$ は 1 より大きい」は命題である。「1 億は大きい」は命題でない。 ■

命題のことを $p, q, \cdots, p_1, p_2, \cdots$ のような文字や記号で表す。

ある命題が正しいことを「その命題は**真**である (true)」、「その命題は成り立つ」、「その命題が成立する」、「その命題の**真理値** (truth value) は T である」といい、命題が正しくないことを「その命題は**偽**(ぎ)である (false [fɔ́ːls], 「フォールス」)」、「その命題は成り立たない」、「その命題は成立しない」、「その命題の真理値は F である」という。つまり、ある命題の真理値とは、その命題が真であるか、偽であるかを T, F という記号で表したものである。T の代わりに 1, F の代わりに 0 と書く流儀もある (実は 2 進数のコンピューターでの論理演算に対応する)。

例 2.2 以下の 4 つの命題

p_1　$1+1=2$

p_2　円周率は有理数である。

p_3　$e > 2.7$ (ただし e は自然対数の底)

p_4　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

の真理値は順に T, F, T, T. ■

命題が真であることを論理的に示すことを命題を**証明する** (prove) という (あるいはその操作を**証明** (proof) と呼ぶ)。証明された命題のことを**定理** (theorem) と呼ぶ。

[1] いわゆる数の演算でも同様のことをしている。加える、引く、かける、割る、という量に関する演算が数の世界で形式的に定義されているわけだ。

脱線: 証明の起源

数学の議論は定理をつないで行く作業である。命題が真であることを示すためには証明が必要である。証明は古代ギリシャで発明された。一気にすごい (完成度の高い) ものが出来た。
アレクサンドリアのエウクレイデス (ユークリッド) により、その時期までの数学の集大成が「原論 (ストケイア)」にまとめられた (B.C. 3C 頃, 全 13 巻)。公理 5 (or 9), 公準 (5) から始めて 465 の定理を証明した。それらの定理は、現在でもすべて正しい (証明には文句もある) と考えられている。■

定理、補題、命題、系

数学のテキストや講義で、“正しい命題” という意味での定理を、定理 (theorem), **補題** (補助定理, lemma), 命題 (proposition), 系 (corollary) のように区別して呼ぶことがある。これは次のように使い分けられている。

- 全部定理にすると、数が多くなって、重要さの区別がつきにくいので、特に重要なものだけ「定理」と呼ぶ。
- 定理を証明する目的で用意される “小さめの定理” を「補題」と呼ぶ。
- 定理などからすぐに導かれる “小さめの定理” を系と呼ぶ。
- その他の “小さめの定理” を「命題」と呼ぶ。

■

余談 2.1 もう少し “文法” の説明をすべきかもしれない (採用している教科書がその辺を省略しているので…)。$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ を**論理記号**といい、命題を表す “変数” に相当する $p, q, \ldots$, $p_1, p_2, \ldots$ などを**命題変項**という。つねに T の真理値を持つ命題を表す記号 $\top$ とつねに F の真理値を持つ命題を表す記号 $\bot$ を導入し ($\top$, $\bot$ の代わりに $\curlyvee$, $\curlywedge$ を使う本もある。どういう字を採用するかは複数の流儀があるようだ。)、**命題定項**という。論理記号、命題変項、命題定項が語彙で、それらを適当なルールで組み合わせたもの全体を**論理式**と呼ぶ。■

2.2 否定

命題 p について、「p でない」という命題を、p の**否定** (negation) と呼び、$\neg p$ で表す。読むときは「p でない」または「not p」という。

例えば「$1+1=2$」を p とするとき、$\neg p$ は「$1+1\neq 2$」である。また「$\sqrt{10}>\pi$」を p とするとき、$\neg p$ は「$\sqrt{10}\le\pi$」である。(これはここに書くことではないような気もするが、集合の包含関係 $A\subset B$ の否定は $A\supset B$ ではなく、$A\not\subset B$ である。)

p の否定を表すのに、$\overline{p}$ や $\sim p$ など、$\neg p$ 以外の記号を用いることも多い。

(豆知識) $\neg p$ は TeX では `\neg p` と入力する。

次の 2 つのことを仮定する。

排中律 (the principle of excluded middle)

命題 p について、p または $\neg p$ のどちらかが成り立つ。

矛盾律 (the law of contradiction)

命題 p について、p と $\neg p$ が同時に成り立つことはない。

$1+1=2$ や $\pi > 4$ のような命題については、排中律が成り立つことは自明だが、成り立つかどうか容易に判定できないような命題についても排中律が成り立つことを仮定する。このことに不賛成な数学者もいて直観主義論理というのを考案したが (有名なのは Brouwer)、ここでは排中律を仮定して議論を行う。

矛盾の説明がない本も多いが、広辞苑によると、矛盾とは「同一の命題が肯定されると同時に否定されること。あるいは、命題とその否定との連言 (A かつ A でない)。」(この説明はきちんとしている)。つまり矛盾律とは、矛盾が生じないことを言っている。

任意の命題 p について、$\neg p$ の真理値は、p の真理値が T であれば F, p の真理値が F であれば T である。このことを

p	$\neg p$
T	F
F	T

(p とその否定 $\neg p$ の真理値表)

のような表形式で表したものを**真理値表** (truth table, 真偽表) と呼ぶ。

(念のため) 行ごとに読むわけである (p が T のとき $\neg p$ は F, p が F のとき $\neg p$ は T である)。

2.3 かつ (論理積)

2 つの命題 p と q に対して、「p であり、かつ q である」という命題を $p \wedge q$ と表し、「p かつ q」、「p and q」と読む。

p と q の論理積、連言(れんげん) (conjunction) と言う (覚えなくても良い？)。

「そして」、「しかし」は良く出て来るが、どちらも「かつ」と同じである (日常語としては、それぞれ、順接、逆接で、ニュアンスは異なるが)。

$p \wedge q$ の真理値は、p と q の真理値がともに T であるときに T で、そうでないときは F である。

p と q はそれぞれが T, F という 2 つの真理値を取るので、その組 (p,q) の真理値は 4 つの場合がある。そこで $p \wedge q$ の真理値は次のように表に出来る。

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(p, q とその論理積 $p \wedge q$ の真理値表)

(豆知識) TEX では `p \wedge q` と入力する。

2.4 または (論理和)

2 つの命題 p と q に対して、「p であるか、または q である」という命題を $p \vee q$ と表し、「p または q」、「p or q」と読む。

p と q の論理和、選言 (せんげん) (disjunction) と言う (覚えなくても良い？)。

(豆知識) TEX では `p \vee q` と入力する。

真理値は次のように「約束する」。

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(p, q とその論理和 $p \vee q$ の真理値表)

2, 3, 4 行目は抵抗がないと思うが、1 行目、つまり p が T, q が T であるとき、$p \vee q$ は T というのは、抵抗を感じる人がいるかもしれない。日常用語で「または」というのは、どちらか一方だけが、という意味 (**排他的論理和**という) に使う場合もあるからである。数学で「または」というのは、少なくとも一方が、という意味で使う約束である (そうする理由は、そうした方が全体としてシンプルになるからである)。

繰り返しになるが、p と q がともに T であるとき $p \vee q$ は T というのは、数学的事実を主張しているというよりも、そういうように $\vee$ という論理演算を定義している (約束である)。

ここまでの小まとめと注意

ここまで、命題の真理値 T, F と、命題に関する 3 つの演算 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ を導入した。

以下、これらの演算を組み合わせた複雑な式が登場する。

普通の数に対する演算 $\times$, $+$ については、「$\times$ を先に計算する」という約束をするが、$\wedge$, $\vee$ については特にそのような約束をしないのが普通である。そのため、どちらを先に計算するか、括弧を多用することになる。つまり数では、$p \times q$ と r の和を $p \times q + r$ と書けるが、論理では、$p \wedge q$ と r の論理和は $(p \wedge q) \vee r$ のように書かねばならない (括弧を省略して $p \wedge q \vee r$ とは書かない)。これは集合の $\cap$, $\cup$ についても同様で、$(A \cap B) \cup C$ のように括弧を付けるのが普通である。

なお、付録の A も参照することを勧める。

2.5 同値, 真理値表による証明

2 つの命題 p, q があるとき、(その具体的な内容に関わらず、その真理値のみに注目して) p と q の真理値が一致するとき、その 2 つの命題は**同値** (equivalent) であるといい、$p \equiv q$ で表す。

例えば

$$1+1=2 \quad \equiv \quad \sin 1 < 1.$$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

であるから、$\neg(\neg p)$ (これは単に $\neg\neg p$ とも書く) と p は同値である。つまり

(1) $$\neg\neg p \equiv p \quad (\textbf{反射律}).$$

同様にして以下のことが証明できる。

(2) 任意の命題 p について、$p \wedge (\neg p)$ は常に偽である (**矛盾律**)。任意の命題 p について、$p \vee (\neg p)$ は常に真である (**排中律**)。

(3) $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (**交換律**).

(4) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ (**結合律**).

(5) $p \vee (q \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge p \equiv p$ (**吸収律**).

(6) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (**分配律**).

(7) $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$ (**冪等律**).

(豆知識) 結合律、交換律、吸収律が成り立つ代数系を**束** (lattice) と呼ぶ。さらに**ブール束**と呼ばれる代数系もある。その典型例になっている。

ここでは分配律の一つ、

(♠) $$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

を証明しよう。これは次の真理値表から証明できる [2]。

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

[2] 普通の数の演算規則の証明と異なり、場合の数が有限個しかないので、すべての場合について計算して確かめるという手段が有効である (その意味では普通の数の演算規則の証明よりも易しい)。

書き方について: 左 1,2,3 列に注目。$2^3 = 8$ 個もれなく書くためには、樹形図を念頭におくと良い。辞書式順序と言っても良い。

真理値表の 5 列目と 8 列目の真理値が一致するので、($\spadesuit$) が成り立つ。■

問 1. 真理値表を書くプログラムはどう作れば良いか、調べよ。

余談 2.2 命題変項を含む論理式が、すべての命題変項の可能な真理値に対して、常に真となるとき、その論理式をトートロジー (恒真式, tautology) と呼ぶ。例えば $p \lor \neg p$ はトートロジーである。■

2.6 ド・モルガンの法則

任意の命題 p, q について

$$\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q),$$

$$\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$$

が成り立つ。これを**ド・モルガンの法則** (de Morgan の法則) と呼ぶ。

問 2. 真理値表を作って証明せよ。

集合の演算に関する法則として学んだ人が多いかも知れない。

例 2.3 p, q をそれぞれ「金の斧がもらえる」,「銀の斧がもらえる」という命題とする。

「金の斧がもらえる」かつ「銀の斧がもらえる」 (両方もらえる)

の否定は

「金の斧がもらえない」または「銀の斧がもらえない」(少なくとも一方はもらえない)

である。

一方

「金の斧がもらえる」または「銀の斧がもらえる」 (少なくとも片方はもらえる)

の否定は

「金の斧がもらえない」かつ「銀の斧がもらえない」(どちらももらえない)

である。■

「または」を「どちらか一方だけが成立するときに真」でなく、「少なくとも一方が成立するときに真」と定義したことで、上のようなきれいな形の式になることに注意する。

余談 2.3 論理の説明をする際に、上のように日常語による例を使う場合があるが、本当は、こういうのは命題もどきで、その真偽を数学的に判定できるようなものではない。「金の斧」がなんであるか、「もらえる」とはどういうことか、考え始めると、曖昧なことが分かる。■

2.7 (おまけ) コンピューターで論理演算

コンピューターのプログラミング言語の C では、古くから整数型データに対して論理演算が出来る。少々変則的であるが、0 は F, 0 以外の整数は T として扱われる。

$\neg$ は `!`, $\vee$ は `||`, $\wedge$ は `&&` で計算できる。

logical.c

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
  int p,q;
  printf("p !p\n");
  for (p = 1; p >= 0; p--)
      printf("%d %d\n", p, !p);

  printf("p q p||q p&&q p->q\n");
  for (p = 1; p >= 0; p--)
    for (q = 1; q >= 0; q--)
      printf("%d %d  %d    %d    %d\n", p, q, p||q, p&&q, !p||q);
  return 0;
}
```

実行結果

```
$ gcc logical.c
$ ./a.out
p !p
1 0
0 1
p q p||q p&&q p->q
1 1  1    1    1
1 0  1    0    0
0 1  1    0    1
0 0  0    0    1
$
```

結果を T, F で表すために軽くお化粧。

logical2.c

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
  int p,q;
  char TF[] = {'F','T'};
  printf("p !p\n");
  for (p = 1; p >= 0; p--)
      printf("%c %c\n", TF[p], TF[!p]);

  printf("p q p||q p&&q p->q\n");
  for (p = 1; p >= 0; p--)
    for (q = 1; q >= 0; q--)
      printf("%c %c  %c    %c    %c\n",
        TF[p], TF[q], TF[p||q], TF[p&&q], TF[!p||q]);
  return 0;
}
```

コンパイル＆実行結果

```
$ gcc logic2.c ; ./a.out
p !p
T F
F T
p q p||q p&&q p->q
T T  T    T    T
T F  T    F    F
F T  T    F    T
F F  F    F    T
$
```

2.8 同値変形による証明

真理値表による証明は強力であるが、

$$(\clubsuit) \qquad (p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

を証明せよ、と言われると面倒である [3]。p, q, r, s と 4 つあるので、$2^4 = 16$ 行必要になる。期末試験でそれを実行した人がいるが、書くのも大変、読んでチェックする方も大変、間違えたときバツをつけるのは悲しい (そうやったらミスをしても仕方がないので、やり方が悪い)。

数に関する式の証明 (計算) と同様に、既に述べた基本的なルールと、次の 2 つの定理を用いれば、式変形により証明が出来る。

[3] 数の場合の $(p+q)(r+s) = pr + ps + qr + qs$ に対応している。

定理 2.4 命題 p, q, r に対して

$$p \equiv q \quad \text{かつ} \quad q \equiv r$$

ならば

$$p \equiv r.$$

(数に関する等式についての「$p = q$ かつ $q = r$ ならば $p = r$」という定理の命題論理版である。)

定理 2.5 p, q, r に対して

$$p \equiv q$$

ならば、

(1) $\neg p \equiv \neg q$

(2) $p \wedge r \equiv q \wedge r$

(3) $p \vee r \equiv q \vee r$

が成り立つ。

(数に関する等式ならば、等式の両辺に同じ数を足したり、かけたりしても、等式が得られる、という定理の命題論理版である。)

問 3. 上の 2 つの定理を証明せよ。

問 4. (1) (♣) を証明せよ。(2) (♣) で $\wedge$ と $\vee$ を入れ替えた式を証明せよ。

2.9 矛盾と背理法

矛盾とは、ある命題 p とその否定命題「p でない」が同時に真である (つまり「p かつ p でない」が成り立つ) ことをいう。1 つの矛盾もないことを仮定している (**無矛盾律**)。

(実は 1 つの矛盾があれば、すべての命題 p について、p と $\neg p$ が証明できる — 要するに無茶苦茶になってしまうので、そういうことはないことを仮定している。)

命題が真であることを証明するために、命題が成り立たないと仮定すると、矛盾が導かれることを示す方法がある。これを**背理法**という。

2.10 ならば

命題に関する新しい演算として「ならば ($\Rightarrow$)」を導入する。

2 つの命題 p と q に対して、「p ならば q である (If p, then q)」という命題を $p \Rightarrow q$ と表す。その正確な意味は以下で定義する。

(本によっては、$p \Rightarrow q$ のことを $p \to q$ と書くものがある。さらに、$p \to q$ の真理値が T であることを $p \Rightarrow q$ と書いて区別して表すこともある。)

どのように定義するか、まず真理値表を用いて説明しよう。結論を先に書くと、次のようにする。

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

($p \Rightarrow q$ の真理値表)

普通は p が真のときのことしか考えない (そのとき q が真になるかどうか) ような気がするが、p が偽のときも、表を埋めておくのである。

理解した気分になるための解読？

$p \Rightarrow q$ が真であるためには、p が真であれば q が真であることが大事で、p が偽のときは q は真でも偽でもどちらでも良い (どちらでも $p \Rightarrow q$ は真である)。一方、p が真であるのに、q が偽である場合は、$p \Rightarrow q$ は偽である。

上の表の $p \Rightarrow q$ の真理値は $(\neg p) \vee q$ の真理値に一致する。そこで $p \Rightarrow q$ とは、$(\neg p) \vee q$ のことと定義することもある。(どちらでやっても良いはずだが、式で定義するのが扱いやすいためか、そうしてある本が多いような気がする。)

問 5. $(\neg p) \vee q$ の真理値表を書け。

真理値表で定義するにしても、$(\neg p) \vee q$ のこととして定義するにしても、

$$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q \tag{2}$$

である。

「p ならば q」の否定が、次のようにド・モルガンの法則を用いて計算できる [4]。

$$\begin{aligned} \neg (p \Rightarrow q) &\equiv \neg ((\neg p) \vee q) \\ &\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) \\ &\equiv p \wedge (\neg q). \end{aligned}$$

ゆえに

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge (\neg q). \tag{3}$$

もちろん真理値表を用いて証明することも出来る。いずれにしろ、重要な定理である。

「p ならば q」の否定は「p であるのに q でない」と言うと、雰囲気が出るだろうか？

[4] これは有名な問題で、これが出来れば数理リテラシーのレベル 1 クリアと言えるかも。

2.11 逆、対偶、裏

$q \Rightarrow p$ を命題 $p \Rightarrow q$ の**逆** (reverse) と呼ぶ。
$\neg q \Rightarrow \neg p$ を命題 $p \Rightarrow q$ の**対偶** (contraposition) と呼ぶ。
$\neg p \Rightarrow \neg q$ を命題 $p \Rightarrow q$ の裏と呼ぶ (らしい — 滅多に使わない[5])。
命題 $p \Rightarrow q$ が真であっても、その逆 $q \Rightarrow p$ が真であるとは限らない (「逆は必ずしも真ならず」)。

定理 2.6 命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\neg q \Rightarrow \neg p$ の真偽は一致する。

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p.$$

($(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$ と書いた方が良い？)

証明 略 (真理値表を書けば分かる)。■

例 2.7 $1+1=2 \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ は真。$1+1=3 \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ は真。■

注意 2.8 (後で出て来る条件 (述語) に対してではなく) 命題に対して $\Rightarrow$ を用いることに違和感を持つ人が少なくないと想像する。まず「ならば」の前後に書いてあることは、何か共通のものに関係したことで、前者が原因、後者がその結果のように思うのが普通であろう。以下のように定義すると、「$1+1=2$ ならば $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$」は真な命題となるが、真偽は別にして、異様な感じがするのではないか。高校の数学は、以前は命題に対して「ならば」を扱っていたが、現在の数学 A では、条件に限定しているようである (問題の回避)。■

2.12 必要条件、十分条件

命題 $p \Rightarrow q$ の真理値が T であるとき、p は q の**十分条件** (p は q が成り立つための十分条件)、q は p の**必要条件** (q は p が成り立つための必要条件) と呼ぶ。

命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ の真理値がともに T であるとき、p は q の**必要十分条件**である (p は q が成り立つための必要十分条件である) と呼ぶ。このことを $p \Leftrightarrow q$ で表す。
もちろん、p と q について対称なので、p と q を入れ替えても良い。
実は $p \equiv q$ と $p \Leftrightarrow q$ は同じである。普通の数学の議論をしているときは、$\Leftrightarrow$ を使うことの方が多い。

3 述語論理

やっと数学らしくなる (まともな内容のある命題が記述できる)。

[5]余談であるが、先日気楽なマンガを読んでいたら、裏と言うのが適切な状況で、登場人物が「裏を返せば…」と言っていて、少々びっくりした。

ただ1つの数学的対象を扱う場合はそれほど多くなく、複数 (しばしば無限個) の数学的対象に対して何か言及するのが重要である。例えば「すべての三角形について、その内角の和は 180° である」。そういうものを取り扱うのに述語論理が必要になる。

3.1 臨時講義: 数学で良く使う数の集合を表す記号

集合については、論理の後で解説するが、例を書くために、使えると便利なので以下の記号を前倒しで紹介しておく。

記号	意味	由来
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$	natural numbers (自然数)
$\mathbb{Z}$	整数数全体の集合 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$	Zahl (ドイツ語: 数)
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	quotient (比)
$\mathbb{R}$	実数全体の集合	real numbers (実数)
$\mathbb{C}$	複素数全体の集合	complex numbers (複素数)

図 1: 良く使う数の集合の記号

x が集合 A の要素であることを $x \in A$, x が集合 A の要素でないことを $x \notin A$ と書く。

3.2 述語 (命題関数)

「$x > 3$」は x の値を定めると命題になる。このような主張を x についての**条件**、**述語** (predicate)、**命題関数**と呼ぶ。
x についての条件を、$p(x)$, $q(x)$, $\cdots$ のように表す (既に慣れている数の集合上で定義された関数の記法と似ているので、あまり抵抗はないであろう)。

前節で導入した命題に関する演算 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ は、条件に関しても適用する。($\neg$ は別にして、$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ はそういうとき初めて、しっくり感じられるのではないだろうか？)

述語論理では、**量称記号** (quantifier, **限定記号**ともいう) と呼ばれる記号 $\forall$, $\exists$ が重要である。

3.3 「任意の」,「すべての」, $\forall$

数学で出て来る命題の多くは、何かある一定の範囲のものについて、1つの例外もなく何かが成立する、という形のものが多い。このような命題を**全称命題** (universal proposition) という。典型的な表現は「任意の○○に対して〜が成り立つ」。
「任意の」は「すべての」とも言い (この方が日常語に近くて親近感を持つ人がいるかもしれない)、「に対して」は「について」とも言い、「が成り立つ」は「が成立する」または「である」とも言うし、省略されることもある。

言葉で表すときは、「すべての」や「任意の」は省略されることも多い。
「(すべての、任意の) 三角形の内角の和は2直角である。」

「(すべての、任意の) 微分可能な関数は連続である」
「任意の x に対して $p(x)$ が成り立つ」という命題を

$$\forall x \quad p(x)$$

と表す。
$\forall$ は "All" の先頭の文字 'A' を逆立ちさせて作った記号である。
(豆知識) TEX では `\forall` と入力すると $\forall$ が出る。
例えば「すべての x に対して、x が実数ならば $x^2 \geq 0$ が成り立つ」という命題を

$$\forall x \quad x \text{が実数} \Rightarrow x^2 \geq 0$$

と表す。

括弧 (), [] を適当に補って

$$(\forall x) \quad x \text{が実数} \Rightarrow x^2 \geq 0,$$

$$\forall x \quad (x \text{が実数} \Rightarrow x^2 \geq 0),$$

$$(\forall x) \quad [x \text{が実数} \Rightarrow x^2 \geq 0]$$

のようにも書く。かっこのつけ方は、使う人の好みというか、かなりいい加減である。

$\forall$ まとめ

$p(x)$ を x についての条件 (x を定めると $p(x)$ が命題となる) とする。
"For all x, $p(x)$ (holds)",「任意の x に対して $p(x)$ (が成り立つ、である)」,「すべての x について $p(x)$」という命題を

$$\forall x\ p(x) \quad \text{あるいは} \quad \forall x(p(x)) \quad \text{あるいは} \quad (\forall x)p(x)$$

と書く。

上の例自体がそうであるように、数学で実際に現れる

$$(\forall x) \quad p(x)$$

の形の命題で、$p(x)$ は多くの場合、$p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$ という形をしている。$p_1(x)$ を「前提条件」,「付帯条件」のように考えて、

$$(\forall x : p_1(x)) \quad p_2(x)$$

と書くことがある。「$p_1(x)$ が成り立つような任意の x に対して $p_2(x)$ が成り立つ」と読む。
上の例では

$$(\forall x : x \text{は実数}) \quad x^2 \geq 0.$$

集合の記号を使うと、「x は実数」は「$x \in \mathbb{R}$」と書ける。すると

$$(\forall x : x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0$$

となるわけだが、しばしば

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 \geq 0$$

と略記される。「実数であるような任意の x に対して $x^2 \geq 0$」、あるいは「任意の実数 x に対して $x^2 \geq 0$」と読む。

$x \in \mathbb{R}$ は当然の前提と考えて省略することもある。

$$(\forall x) \quad x^2 \geq 0$$

(この講義では、なるべくこういう省略はしないことにするが、普通の数学の本では時々ある。)

似たケースとして

$$(\forall x : x > 0) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

を

$$(\forall x > 0) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

と書くこともある。

もう一つ

$$(\forall x : x \text{ は三角形}) \quad x \text{ の内角の和は } 180^\circ.$$

注意 3.1 (受験生のいないテストは全員合格) 教科書には、「すべての」「任意の」の意味に疑問は生じないというようなことが書いてあるが、

「○○の試験で、すべての受験生は合格した。」

という命題は、受験した人がいないとき、真であるか、偽であるか、それほど明らかでないと思う人が多いのではないだろうか。数学では受験した人がいない場合、上の主張は真であるとみなす。言い換えると、数学用語としての「すべて」「任意」はそういう意味であると約束する。(後の 3.9 でもう一度説明をする。) ■

余談 3.1 (体験談から) 昔、ある (当時そこそこ有名だった) 定理の仮定すべてを満たす対象が実は存在しないことが後から分かったことがあった。定義でも定理でも、少なくとも一つ例をあげることが大事である、という良く言われる心得の大事さを痛感する出来事であったが、論理について考察するための良い事例でもある。その定理の証明自体には間違いがなかった。要するに「仮定を満たす任意の x について、$P(x)$」という形の定理で、その証明は正しく、真な命題であった。間違いではないが、ナンセンスな (何の役にも立たない) 定理というわけである。■

余談 3.2 (ある年の期末試験) 後で条件 $p(x)$ を満たす x 全体の集合というのを

$$\{x \mid p(x)\}, \quad \{x; p(x)\}, \quad \{x : p(x)\}$$

などで表すということを習うせいか、$|$ と $:$ はいつでも同じように使えると勘違いするのか、

$$(\forall x \mid x > 0) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

のように書く人が (複数) 現れた。色々な数学書を読むけれど、こういう書き方をしている本を見たことはまだない。$\forall$ の付帯条件を表すのに $|$ を使うのは多分間違いであると思う。■

3.4 「存在する」,「ある」, $\exists$

「$\sim$ を満たす (ような) ○○が存在する」、「ある○○が存在して、$\sim$ が成り立つ」、「ある○○に対して、$\sim$ が成り立つ」、「ある○○が $\sim$ を満たす」という形の命題 (意味はどれも同じ) も良く出て来る。

「$x^3 - x + 1 = 0$ を満たす実数 x が存在する。」
「ある実数 x に対して、$x^3 - x + 1 = 0$ が成り立つ。」
「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0$ が成り立つ。」
「適当な実数 x を取れば、$x^3 - x + 1 = 0$ が成り立つ。」
このことを次のような式で表す。

$$\exists x \quad x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0.$$

記号 $\exists$ は存在する "exists" の先頭の文字 'E' を裏返して作ったと言われている。
(豆知識) TEX では `\exists` と入力すると $\exists$ が出る。
書き間違える人が時々いるので、日本人限定の覚え方「$\exists$ は片仮名のヨに似ている」。

次のように括弧をつけることが多い。

$$(\exists x) \quad x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0.$$

$$\exists x \quad (x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0).$$

$$(\exists x) \quad [x \in \mathbb{R} \land x^3 - x + 1 = 0].$$

$\exists$ まとめ

$p(x)$ を x についての条件 (x を定めると $p(x)$ が命題となる) とする。
"There exists x such that $p(x)$ (holds)",「ある x が存在して、$p(x)$ (が成り立つ, である)」,「ある x に対して (について)、$p(x)$ (が成り立つ, である)」,「$p(x)$ が成り立つような x が存在する」という命題を

$$\exists x\ p(x) \quad \text{あるいは} \quad \exists x(p(x)) \quad \text{あるいは} \quad (\exists x)\ p(x) \quad \text{あるいは} \quad \exists x \text{ s.t. } p(x)$$

と書く。

上の例がそうであるように、数学で実際に現れる

$$(\exists x) \quad p(x)$$

の形の命題で、$p(x)$ は多くの場合、$p_1(x) \land p_2(x)$ という形をしていて、$p_1(x)$ が x の考察の範囲 (例えば「x は実数である」,「$x \in \mathbb{R}$」など) を示している。そういうとき、

$$(\exists x) \quad p_1(x) \land p_2(x)$$

という命題を、「$p_1(x)$ を満たす x で、$p_2(x)$ が成り立つものが存在する」のように読むことがある。それに対応して

$$(\exists x : p_1(x)) \quad p_2(x)$$

のように書くことが多い。

上の例では

$$(\exists x : x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0$$

となる。これをさらに

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0$$

と略記することが多い。「実数 x で $x^3 - x + 1 = 0$ を満たすものが存在する」,「ある実数 x が存在して、$x^3 - x + 1 = 0$ が成り立つ」と読むとしっくりする。

例 3.2

$$\exists x \quad ((x > 0) \land (x^2 = 2))$$

を

$$(\exists x > 0) \quad x^2 = 2$$

のように書く。■

複数の量称がある場合、この書き方は特に便利である。

例 3.3 (ピタゴラス数 (Pythagorean numbers))

$$\exists x \exists y \exists z \quad (x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land z \in \mathbb{N} \land x^2 + y^2 = z^2)$$

は

$$(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(\exists z \in \mathbb{N}) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

のように書ける。■

例 3.4 (連続関数の定義) 関数 f が点 a で連続であるとは、条件「任意の正数 ε に対して、十分小さな正数 δ が存在して、$|x - a| < \delta$ を満たすすべての x に対して、$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$」が成り立つことと定義する。この ($f$ と a に関する) 条件は、この節で導入した記法によれば

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

と書ける。 元々の流儀 (付帯条件を使わない) で書くのは、かなり面倒でわかりづらくなる (興味ある人は試してみるとよい)。■

注意 3.5 (s.t. について) $\exists$ を含む論理式で、$\exists$ の直後に、しばしば “s.t. 〜” (「〜のような」) が使われる。例えば

$$(\exists x \in \mathbb{Q}) \quad x^2 = 2$$

を

$$(\exists x \in \mathbb{Q}) \quad \text{s.t.} \quad x^2 = 2$$

と書く。英語では、“There exists $x \in \mathbb{Q}$ such that $x^2 = 2$.” (「$x^2 = 2$ が成り立つような $x \in \mathbb{Q}$ が存在する。」) と読むので、s.t. をつけるのがしっくり来るのであろう。s.t. はあってもなくても良い。

注意すべきは、否定命題を作る場合に、

$$\forall x \in \mathbb{Q} \quad \text{s.t.} \quad x^2 \neq 2$$

とするのは変だ、ということである (これは「すべての $x \in \mathbb{Q}$ に対して $x^2 \neq 2$ が成り立つ」と読む式で、「〜のような」とは読まない)。■

3.5 複数の量称を含む命題

条件の中に 2 つの変数がある場合は、量称記号も 2 つ現れうる。$P(x,y)$ は x, y に関する条件であるとする。このとき、例えば $\forall y\ P(x,y)$ は、x に関する条件であるので、$\exists x\,(\forall y\ P(x,y))$ は命題になる (括弧を外して $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ と書くこともある)。「ある x が存在して、任意の y に対して $P(x,y)$ が成り立つ」と読めば良い。

例 3.6 (工事中)

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x > y.$
「任意の実数 x に対して、ある実数 y が存在して $x > y$.」

(2) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x = y.$
「ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して $x + y = y + x = y$.」■

このように、複数の量称がある場合、左から右に順に読み進むのが基本である。$\forall$ が続く場合と、$\exists$ が続く場合は、少しはしょった言い回しをすることが多い。

(1) $\forall x \forall y P(x,y)$　すべて (任意) の x, y に対して $P(x,y)$.

- 「すべての x, すべての y に対して $P(x,y)$」と読むことも多い。
- 「すべての x に対して、すべての y に対して $P(x,y)$」と読んでも間違いではないと思うが、そうしている人は少ないようである。

(2) $\exists x \exists y P(x,y)$　ある x と y が存在して $P(x,y)$.

- 「ある x とある y が存在して $P(x,y)$.」と読むことも多い。
- 「ある x が存在して、ある y が存在して $P(x,y)$.」と読んでも間違いではないと思うが、そうしている人は少ないようである。

(3) $\forall x \exists y P(x,y)$　すべて (任意) の x に対して、ある y が存在して $P(x,y)$.

(4) $\exists y \forall y P(x,y)$　ある y が存在して、すべて (任意) の x に対して $P(x,y)$.

世の中には、このような読み方があまり好きでなくて、

(3) $\forall x \exists y P(x,y)$ を「すべての x に対して、$P(x,y)$ であるような y が存在する」.

(4) $\exists y \forall x P(x,y)$ を「すべての x に対して $P(x,y)$ であるような y が存在する」.

と読む人もいる (読点「、」に注意)。日本語としては、あるいはこちらの表現の方が普通と感じる人がいるかもしれないが、間違えやすいので注意した方がよいであろう (読点の違いだけでは、聞いただけでは分からないことが多いだろう)。もっと上手な表現はないものだろうか…

私は、上に示したように機械的に左から右に読む方が誤解が生じにくいと考える。機械的な読み方はしばしば「日本語とは思えない」と非難されるが、仕方がないのではないだろうか。

例えば関数の連続性を表す

$$(\forall a\in\Omega)(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\Omega:|x-a|<\delta)\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

を聞く人が誤解を生じないように、日本語として自然に読むのはかなり難しい。この辺りは、語順を用いて意味を表す欧米語と日本語の違いに起因しているような気がする (英語ならば関係代名詞を使うと、式に書いた順を守った文が自然に出来る)。

3.6 量称を含む命題の証明

「証明せよ」に対してフリーズする前に。

どんな命題も証明出来るような万能の方法はないが、ぜひ試すべきことを説明する。

命題 $(\forall x\colon P_1(x))\ P_2(x)$ を証明するには、「x は $P_1(x)$ を満たす任意のモノとする」という意味のことを書き出して、$P_2(x)$ であることが証明できないか考えてみよう。

例 3.7

(4) $$(\forall x\in\mathbb{R})\quad x^2\ge 0$$

を証明しようとする場合、まず「x を任意の実数とする」と書き出し、$x^2\ge 0$ を導くことを目標として考える。

(証明) x を任意の実数とすると、$x>0$, $x=0$, $x<0$ のいずれかが成り立つ。

$x>0$ の場合、$x^2=x\cdot x>0$ (2 つの正の数の積は正).

$x=0$ の場合、$x^2=0$.

$x<0$ の場合、$-x>0$ であるから、$x^2=(-x)^2>0$ (2 つの正の数の積は正).

いずれの場合も $x^2\ge 0$ であるから、(4) が証明出来た。■

命題 $(\exists x\colon P_1(x))\ P_2(x)$ は、$(\exists x)\ P_1(x)\wedge P_2(x)$ という意味であるから、$P_1(x)$ と $P_2(x)$ を同時に満たすような x を実際に見つけることができれば、それで証明は完了である。

例 3.8

(5) $$(\exists x\in\mathbb{R})\quad x^2-3x+2=0.$$

(計算用紙に $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ とか書いて、方程式の解が $1,2$ であることが分かれば、以下のような解答が書ける。)

(証明) $x=1$ とすると、$x\in\mathbb{R}$,

$$x^2-3x+2=1^2-3\cdot 1+2=1-3+2=0.$$

ゆえに (5) が成り立つ。■

もちろん、いつもそういう単純な話で済むわけでない。

例 3.9

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^3 - x + 1 = 0. \tag{6}$$

この方程式は具体的に解けないこともないが、少し難しい[6]。

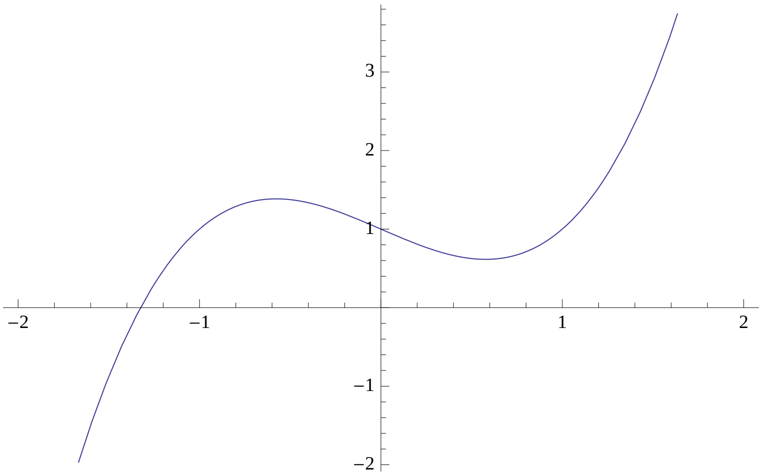

図 2: $f(x) = x^3 - x + 1$ のグラフ

(証明) 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) := x^3 - x + 1$ で定めると、$f(x)$ は x の多項式であるから、f は連続関数で、

$$f(0) = 1 > 0, \quad f(-2) = -8 - (-2) + 1 = -5 < 0.$$

中間値の定理により、$(\exists x \in (-2, 0))$ $f(x) = 0$. このとき x は実数で $x^3 - x + 1 = 0$. (ゆえに (6) が証明出来た。) ■

例 3.10

$$(\exists x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = y. \tag{7}$$

先頭が $\exists x$ であるから、x を具体的に見つけられれば良い。「$(\forall y \in \mathbb{Z})$ $x + y = y$」を満たすような x というのが分かるだろうか。
(証明) $x = 0$ とすると、$x \in \mathbb{Z}$ であり、かつ任意の $y \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$x + y = 0 + y = y.$$

ゆえに (7) が証明出来た。 ■

[6] Cardno の公式を使うと、$x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3(9-\sqrt{69})}} - \sqrt[3]{\frac{9-\sqrt{69}}{18}}$ が実数解と分かる。これが $x^3 - x + 1 = 0$ を満たすことの確認も一目ではわかりづらい。

例 3.11

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) \quad x + y = 0. \tag{8}$$

(証明) x を任意の整数とする。そのとき $y = -x$ とおくと、$y \in \mathbb{Z}$ であり、

$$x + y = x + (-x) = 0.$$

ゆえに (8) が証明出来た。 ■

3.7 量称と論理の法則、特に否定命題

以下の公式 (1)〜(7) が (任意の述語 $P(x)$, $Q(x)$ について) 成り立つ。

(1) $\neg(\forall x P(x)) \equiv (\exists x)(\neg P(x))$.

(2) $\neg(\exists x P(x)) \equiv (\forall x)(\neg P(x))$.

(3) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$.

(4) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$.

注意 3.12 (反例) 最初の公式は、「任意の x に対して $P(x)$ が成り立つ」の否定は「$P(x)$ が成り立たないような x が存在する」ということで、高校数学で学んだ「反例」という言葉を思い出す人もいるであろう。$\forall x\ P(x)$ という形をしている命題に対して、反例というのは $\neg P(x)$ を満たす具体的な x のことを指す。そういう x が発見できたとき、$(\exists x)\ \neg P(x)$ は真である。つまり、反例を見つけることで否定命題を証明し、もとの命題が偽であることが証明できた、ということである。 ■

注意 3.13 (3) で $\wedge$ の代わりに $\vee$ としたもの

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x)) \qquad \text{(この式は正しくない)}$$

は成り立たない。例えば $P(x)$ を「x が偶数である」, $Q(x)$ を「x が奇数である」とするとき、左辺は真であるが、右辺は偽である。

また (4) で $\vee$ の代わりに $\wedge$ としたもの

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x)) \qquad \text{(この式は正しくない)}$$

も成り立たない。■

(5) $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$.

(6) $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$.

(7) $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$.

注意 3.14 (7) だけ等号でなく、$\Rightarrow$ であることに注意しよう。一言でまとめると $\forall$ 同士、$\exists$ 同士は順序を入れ換えてもよいが、$\forall$ と $\exists$ を入れ換えることはできない (意味が変わってしまう)。これについては、次項で例をあげて調べることにする。 ■

付帯条件付きの量称 $(\forall x : A(x))$, $(\exists x : A(x))$ に対しても、上と同様の公式が成り立つ。

(1) $\neg(\exists x : A(x))P(x) \equiv (\forall x : A(x))(\neg P(x))$.

(2) $\neg(\forall x : A(x))P(x) \equiv (\exists x : A(x))(\neg P(x))$.

(3) $(\forall x : A(x))(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x : A(x))P(x) \land (\forall x : A(x))Q(x)$.

(4) $(\exists x : A(x))(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x : A(x))P(x) \lor (\exists x : A(x))Q(x)$.

(5) $(\exists x : A(x))(\exists y : B(y))P(x, y) \equiv (\exists y : B(y))(\exists x : A(x))P(x, y)$.

(6) $(\forall x : A(x))(\forall y : B(y))P(x, y) \equiv (\forall y : B(y))(\forall x : A(x))P(x, y)$.

(7) $(\exists y : B(y))(\forall x : A(x))P(x, y) \Rightarrow (\forall x : A(x))(\exists y : B(y))P(x, y)$.

最初の二つを確認する。

$$\begin{aligned}
\neg\left((\forall x : A(x))P(x)\right) &\equiv \neg\left(\forall x A(x) \Rightarrow P(x)\right) \equiv \neg\left(\forall x(\neg A(x) \lor P(x))\right) \\
&\equiv \exists x \neg(\neg A(x) \lor P(x)) \equiv \exists x\left(A(x) \land \neg P(x)\right) \\
&\equiv (\exists x : A(x))\neg P(x)
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\neg\left((\exists x : A(x))P(x)\right) &\equiv \neg\left(\exists x A(x) \land P(x)\right) \equiv \forall x \neg(A(x) \land P(x)) \\
&\equiv \forall x \neg A(x) \lor \neg P(x) \equiv \forall x A(x) \Rightarrow \neg P(x) \\
&\equiv (\forall x : A(x))\neg P(x)
\end{aligned}$$

3.8 量称記号 $\forall$, $\exists$ の順序について

量称記号の順序には注意しないといけない、という話。まずは実例で考えてみよう。

例 3.15 「どんな数に対しても、それより大きな数がある」は

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) \quad y > x$$

と表され、真な命題であるが、量称を入れ替えた

$$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) \quad y > x$$

は「どんな数よりも大きい数がある」という強い意味になり (そんなことありえない)、偽な命題である。■

問 6.　このことを証明せよ。

$\forall$ 同士、あるいは $\exists$ 同士は順番を入れ換えても式の内容は変わらないのだが、$\forall$ と $\exists$ の順番は入れ換えると意味が変わってしまうのである。(3.7 で見たように) 一般に "$\exists y \forall x P(x) \Rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$" が成り立つから、$\exists$ が先に現れる方が強い主張である。

例 3.16 (じゃんけん) 3 点からなる集合 $J = \{$ ぐう, ちょき, ぱあ $\}$ に、次のような 2 項関係 $\succ$ を導入する。

$$\text{ぐう} \succ \text{ちょき}, \quad \text{ちょき} \succ \text{ぱあ}, \quad \text{ぱあ} \succ \text{ぐう}$$

これ以外の場合は、$\succ$ は不成立とする (要するに「じゃんけん」の勝ち負けの判定)。例えば、ぱあ $\not\succ$ ちょき. こうすると、

$$(\forall t \in J)(\exists k \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても、それに勝つ手 k がある) は真であるが、

$$(\exists k \in J)(\forall t \in J) \quad k \succ t$$

(どんな手 t に対しても勝ってしまう "必勝手" k がある) は偽である。■

例 3.17 (Archimedes (アルキメデス) の公理) 2 つの正の実数 a, b を取ったとき (b がどんなに大きくても、あるいは a がどんなに小さくても)、a を十分たくさん足してやれば b を追い抜く。

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b.$$

これは公理というくらいで、真な命題であるが[7]、

$$(\forall a > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall b > 0) \quad na > b$$

は偽である。■

次の例は有名かつ重要である (残念ながら 1 年生の 5 月頃に持ち出す例としてはフライング気味かもしれない)。

例 3.18 (連続性と一様連続性) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f : I \to \mathbb{R}$ を写像とする。f が I で連続であるということを論理記号で書くと

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in I : |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる。また、f が I で一様連続であるということを、論理記号で書くと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(\forall y \in I : |x - y| < \delta) \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となる。

連続性と一様連続性は異なる概念であるが、それが $\forall, \exists$ の順番の違いだけで表されている。

[7] 実数全体の集合を構成する議論を行う場合は、証明可能な命題 (定理) となるが、それをさぼって、実数全体の集合が持ついくつかの性質を公理として認めて議論を始める立場では、公理とする必要がある (他の公理からは導かれない) ことのある命題である。

3.9 空集合の論理

空集合 $\emptyset$ は、任意の集合 A の部分集合である、すなわち

$$\emptyset \subset A \tag{9}$$

が成り立つ。このことを「知っている」人は多いだろうが、証明を考えたことはあるだろうか?

集合 A, B について、

$$A \subset B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

と定義した。任意の x に対して、$x \in \emptyset$ は偽であるから、$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ は真である。ゆえに $\emptyset \subset A$.

一方、

$$A \subset B \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall x \in A) \quad x \in B.$$

と書くことも出来る [8]。つまり A のすべてのメンバーに「B のメンバーであるか」というテストを受けさせ、全員合格ならば晴れて「$A \subset B$」であると言えるわけである。

すると (9) を証明するには、

$$(\forall x \in \emptyset) \quad x \in A$$

を示さねばならない。これは (上で別のやり方で示したように) 真なのであるが、感覚的に納得できるだろうか？

空集合はその定義から、要素を一つも持たない、すなわち $x \in \emptyset$ となる x は存在しない。テストの例え話を続けると、受験生がいないテストは「全員合格」なのだろうか、そうでないのだろうか、ということである。初めて出くわした人は戸惑うかも知れないが、数学ではこういう場合「全員合格」であると考える (言い換えると、全称記号 $\forall$ はそういう意味である、と約束する)。

似たようなことはあちこちで出て来る。

- 空集合は有界である (めったに必要にならないが)。
- 空集合は開集合である (これは重要で良く使われる)。

数学で「p ならば q」と証明するときに、条件 p を満たす場合は本当に存在するかどうか、直接は問題にならないことが多いことに注意しよう。

[8] 一般に $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ を $(\forall x : P(x))Q(x)$ と書くのであったから、$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ は、$(\forall x : x \in A) x \in B$ とも書ける、ということである。

付録

A　結合の優先順位

複数の論理記号が含まれる式を書くとき、結合の順番を表すためにカッコを用いる。

例えば、$p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee r$ から括弧を取って $p \wedge q \vee r$ としてしまうと、意味が分からなくなる。

数の四則演算でそうしたように、論理式についても、カッコを減らすために、演算に優先順位を設けて、括弧を適度に省略する。

1. $=, \in$
2. $\neg, \forall x, \exists x$
3. $\wedge, \vee$
4. $\Rightarrow$
5. $\Leftrightarrow$

($\Rightarrow$ と $\Leftrightarrow$ の優先順位は同じ、という人もいる。)

例えば

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$$

は

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

と書くことが出来る。

上のルールにおいても、$\wedge$ と $\vee$ は同じ優先順位なので、$\wedge$ と $\vee$ が混じる式では、やはりカッコ () をつけることが必須であることを注意する必要がある。($\wedge$ を論理積、$\vee$ を論理と呼ぶせいか、数の演算との類推から $\wedge$ を優先して、$(p \wedge q) \vee r$ を $p \wedge q \vee r$ と書ける、と誤解している人が多いような気がするが、そうではない。)

$$\{a, b\} = \{x | x = a \vee x = b\}$$

B　トートロジー

命題 $P, Q, \cdots$ を命題結合記号 ($\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) を使って組み合わせた命題で、$P, Q, \cdots$ がいかなる命題であっても、つねに真であるようなものを、トートロジー (tautology) または恒真命題と呼ぶ。

例として、$P \vee (\neg P)$

三段論法

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{10}$$

構成的仮言的三段論法

$$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q \tag{11}$$

$$((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R) \tag{12}$$

C　ユークリッドの原論 — 証明の起源

証明は、ギリシャ数学に起源があるとされている。「ヒポクラテスの三日月」で知られているキオスのヒポクラテスが証明の発明者であるという説が有力らしいが (斎藤 [8])、まとまった形で残っているものとしては、何と言っても「ユークリッド原論」が有名である。

「ユークリッド原論」は、アレキサンドリアのエウクレイデス ($E\upsilon\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\varsigma$, B. C. 3 世紀頃, 英語読みでは Euclid ユークリッド) が著したストケイア ($\Sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\alpha$, 英語では Elements, 日本語では「原論」) という書物である。その当時まで得られていた数学の多く [9] を集成したもの。

古い話のようだけれど、現代の数学の直接の祖先であり、現代の数学の骨格を決めているようなところがある。そして学校数学 (高等学校までの数学) は、少なくとも見掛け上そうなっていないので、1 年生に話す価値 (もしかすると必要性かもしれない) は高い。

それに先立つ他の文化圏 (古代バビロニア、古代エジプト、古代中国) で証明が行われた形跡はなく、その後も再発見されたという話はないようである。(個々の事実は、歴史上何度も再発見されているのに、証明するという行為自体は再発見されなかった？)

全 13 巻からなる (平面図形, 面積の変形 (“幾何的代数”), 円の性質, 円に内接・外接する多角形, 比例論, 比例論の図形への応用, 数論 (3 巻), 無理量論, 立体図形, 面積・体積, 正多面体)。いくつかの定義 ($23+2+11+7+18+4+22+0+0+(4+6+6)+29+0+0=132$) と、5 (or 9) つの公理、5 つの公準から、465 ($=48+14+37+16+25+33+39+27+36+115+39+18+18$) 個の命題を証明した。

さすがに現代の観点からは、証明に色々な不備が認められるが、掲げられた命題自体に間違いはないと言われている。これは非常に驚くべきことである。

9 つの公理　(準備中)

5 つの公準　(準備中)

QED のルーツ　今でも証明の終わりに QED と書くことがあるが、これは原論のラテン語訳で命題の証明の最後に書かれている “quod erat demonstrandum” (もとのギリシャ語では $\pi\ \varepsilon\ \rho\ \ \delta\ \varepsilon\ \iota\ \ \delta\ \varepsilon\ \xi\ \alpha\ \iota$. 英語で言うと “which had to be deomonstrated”, 「これが証明すべきことであった」という意味) の省略形である。

[9] 例えば、円錐曲線論は、ほかならぬエウクレイデスの著作があったらしいが、これは原論には含まれておらず、現在では残っていない (後から現れたアポロニオスの円錐曲線論に取って代わられたと言われている)。

D　基本的な用語・言葉遣い

D.1　用語の定義

D.2　議論の中での記号の定義

1 つの数学的対象を、文字や文字を組み合わせたもの等の 1 つの記号で表すことが良く行われる。

「p を命題とする。」

「x を任意の実数とする。」

「A, B を集合とするとき、…」

特にこれまでの議論に現れた対象を用いた式で新しい対象を定義して、それを一つの記号で表すとき、「記号 = 式 とおく」または「記号 = 式 とする」と書く。例えば x, y が既に定義済みであるとして、「$z = (x+y)^2$ とおく」のように書いたりする。

「a と b が等しい」という命題は、$a = b$ と書いても $b = a$ と書いても、どちらでも同じことだが、この定義の場合は $z = (x+y)^2$ の方が普通で、$(x+y)^2 = z$ とは書くことは少ない。

日本語では、「z で $(x+y)^2$ を表すことにする」よりは「$(x+y)^2$ を z で表す」のが自然そうなので、ともすると「$(x+y)^2 = z$ とおく」(一般化すると「式 = 記号」) と書きそうになるが、それは普通でないとされる。英語では、例えば "Let z be $(x+y)^2$" という表現になるので、z が先、$(x+y)^2$ が後、というのを自然に感じるらしい。

(脱線になるが、BASIC というプログラミング言語では、`A` に `B` を代入する命令文を `LET A=B` と書く。言語を作った人の頭の中で "Let `A` equal `B`" とか、"Let `A` be `B`" となっているのだろう。そういえば、Pascal のような ALGOL の子孫である言語では、代入文は `a:=b` と書くのであった。)

定義をするための等号は、単なる等式を構成するための等号とは異なると考えるべきかも知れない。しばしば $z \overset{\text{def.}}{=} (x+y)^2$ のように $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ を使うことがある。それ以外に $z := (x+y)^2$ という書き方もある。$:=$ は右辺の式の表すものを左辺の記号で表すという意味を含んでいる。

しばしば $(x+y)^2 =: z$ という書き方も目にすることがある。$(x+y)^2$ と z の語順が「普通」と逆になっているが、$=:$ のせいで、左辺が式で、右辺が記号ということが明瞭である。

D.3　命題、定理、補題、系

論理学の用語としては、「命題 (proposition)」は真偽の定まるような主張のことで、「定理 (theorem)」とは真な命題のことである。

数学の授業では、命題、定理、補題 (補助定理, lemma), 系 (corollary) というものが出て来るが、上の意味ではいずれも定理である。つまり、偽な命題は滅多に (例えば背理法の議論の中くらいしか) 現れず、出て来る命題は原則として真である。それを 4 つの言葉で表すのは、議論の流れの中での位置づけを分りやすく表そう、という意図がある。

理論の中で重要な、目印となるような命題のことを「定理」と呼ぶ。「定理」や「命題」からすぐに得られる定理のことを「系」と呼ぶ。「定理」や「命題」の証明のための準備的な位置づけの定理を「補題」と呼ぶ。

普段の数学の授業に出て来る補題、命題、定理、系はみな「真である命題」という意味で「定理」である

D.4　公理とは

公理とは何か。重要な用語なので国語辞典にも載っていて、多くは次の二つの意味 (引用したのは広辞苑) が載っている。

(a) 証明不可能であるとともに、また証明を必要とせず直接に自明の真として承認され他の命題の前提となる根本命題。

(b) ある理論領域で仮定される基本前提。この場合、公理は自明な真理ではなく、公理系のとり方によって定まる。従ってある公理系で公理である命題も、他の公理系においては公理から証明される定理となることや、また偽となることがある。

ユークリッド原論における公理 (axiom, common notion) と、公準 (postulate) は (a) の意味での公理である。Euclid 原論の公理は相等関係が満たすべきルールなどのいわゆる推論のための規則で、公準が幾何学のための「自明の真として承認される命題」である。

2014年度授業の記録

- 4月10日。イントロ。
- 4月17日: 論理の説明を開始した。2.6を後回しにして、2.7まで説明した。

4月17日の質問から

「命題 p, q の真理値が一致するとき、その2つの命題は同値であるといい、$p \equiv q$ で表す。」と説明した。

「$1+1=2$」を p,「$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$」を q とするとき、p と q の真理値はともに T であるけれど、$p \equiv q$ というのは合点が行かない、という意味のことを言った人がいた。

その感想はもっともだと感じる人も少なくないのでは、と思う (実は僕もそうである)。

実は今日この後、「ならば ($\Rightarrow$)」を説明するところで似たような疑問を持つ人が多く出て来ると想像する。

命題論理では、しばしば「その命題の具体的内容に立ち入らず、真理値のみに注目して」のような説明が添えられていることが多い。つまり真理値だけで扱える範囲のことだけをやっているわけである。

2つの要素 F と T だけからなる集合 $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ における演算 $\neg, \wedge, \vee$ の話、と割り切った説明をした方が良いかも知れない。

この疑問については、後でゆっくり考えてみたい。

- 4月24日: レポートの返却と解説 (解説はプリントを配って、なるべく簡単に済ませる)。前回飛ばした 2.6 を話す。2.8, 2.9, 2.10 を話す。ここまでで残り30分。3.1, 3.2, 3.3 まで。問2を出題した。
- 5月1日: 問2を返却して解説して、論理の残りを解説して。
  最近、QE (Quantifier Elimination, 限定記号消去, 限量記号消去) アルゴリズムが話題になっている。大学の数学の入試問題をコンピューターに解かせる、と受けそうなネタで、マスコミにも出て来た。
  穴井 宏和, 横山 和弘: QE の計算アルゴリズムとその応用 — 数式処理による最適化, 東京大学出版会 (2011) という本がある。

2015年度授業の記録

- 4月16日。数理リテラシーのイントロ。10分くらい論理の話。命題とその真理値。否定について。

  (イントロの適正な長さは40分くらいかな。お説教はあまり役に立たず、実践の中で指摘しないと分からないかも…もしイントロをするのならば「定義とは何か」,「定理とは何か」という教科書に載っていない話をするのが有益かも。)

- 4月23日。前回の続きから、宿題1を解き始めてもらう。「ならば」の前まで。「$p \vee q$ を M とおくと、$M \equiv p \vee Q$.」から解き始めるのもやった。

  (宿題1で同値変形による証明の問題を入れておくべきだった。授業がそこまで進まなくてボツになっても良いから、入れておくべきだ。)

- 4月30日。「ならば」をやって、ささっと駆け足して (つもり)、述語論理に入る。(命題論理で1.5回強かかるのかな。) あまり進まなかった。問2に (1), (2), (3) と出したけれど、量称を含む命題の証明の練習である (3) は除外とした。シラバスでは論理を3回で済ませることになっているけれど、講義のイントロを長くやっていると無理なのかも。

- 5月7日。問1を返却して、問2を提出してもらった。量称記号を含む命題の読み方 (半分は復習)。量称記号を含む命題の証明のヒント。7つの計算規則。$\neg\exists \equiv \forall\neg$, $\neg\forall \equiv \exists\neg$, $\forall(\wedge) = (\forall) \wedge (\forall)$, $\exists(\vee) = (\exists) \vee (\exists)$, $\forall\forall$ の順序交換, $\exists\exists$ の順序交換, $\exists\forall \Rightarrow \forall\exists$. 問3を出した。$\neg\left((\forall x : A(x))P(x)\right) \equiv (\exists x : A(x))\neg P(x))$ は急遽出したけれど、証明すべきかも。たくさん質問が来た。再履修生の出席率が悪いのは困ったな。

参考文献

[1] 桂田祐史：高校の数学Aの論理を超特急で振り返る, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/math-A.pdf (2013, 2014).

[2] 中島匠一：集合・写像・論理 — 数学の基本を学ぶ, 共立出版 (2012).

[3] 中内伸光：ろんりの練習帳, 共立出版 (2002).

[4] 新井紀子：数学は言葉 — math stories, 東京図書 (2009), 数理論理の専門家によって比較的最近書かれた本であり、 とても参考になる。

[5] 結城浩：数学文章作法 基礎編, ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2013).

[6] 島内剛一：数学の基礎, 日本評論社 (1971).

[7] 前原昭二：数理論理学序説, 共立出版 (1966, 2010).

[8] 斎藤憲：キオスのヒポクラテスと論証数学の発明, 第17回ギリシャ哲学セミナー講演, http://greek-philosophy.org/ja/files/2013/03/Saito2013.pdf (2013).

索 引