# 2015 年度 数理リテラシー 期末試験問題

2015 年 7 月 24 日 (金曜)13:00〜15:00 施行, 担当　桂田 祐史
ノート等持ち込み禁止, 解答用紙 (2 枚) のみ提出

**1.**　次の各文を記号のみを用いて表せ。
(1) 「$p$ ならば $q$」は、「$q$ でないならば $p$ でない」と同値である。(2) $-1$ は自然数でないが、整数である。(3) $A$ と $B$ の和集合の補集合は、$A$ の補集合と $B$ の補集合の共通部分に等しい。(4) $x$ が $A$ から $B$ を除いた差集合の要素であるためには、$x$ が $A$ の要素であり、かつ $x$ が $B$ の要素でないことが必要十分である。(5) ある複素数 $w$ が存在して、任意の複素数 $z$ に対して、$z+w=w+z=0$ が成り立つ。

**2.**　(1) 命題論理の分配律 $(p\vee q)\wedge r\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ を用いて

$$(*)\qquad (p\vee q)\wedge(r\vee s)\equiv(p\wedge r)\vee(p\wedge s)\vee(q\wedge r)\vee(q\wedge s)$$

を証明せよ。(2) (1) の結果を利用して、連立不等式 $(x-1)(x-3)>0$, $x(x-2)>0$ の解を求めよ。

**3.**　次の (1), (2) の文を、論理式で表し、証明せよ。

(1) 任意の整数 $x$ に対して、ある整数 $y$ が存在して、$x+y=y+x=0$ が成り立つ。

(2) ある実数 $x$ が存在して、任意の実数 $y$ に対して、$y^2+2y>x$ が成り立つ。

**4.**　(1) アルキメデスの公理を論理式を用いて表せ。(2) 実数 $x$ が任意の自然数 $n$ に対して、$-\dfrac{1}{2n}<x<\dfrac{1}{n}$ を満たすならば、$x=0$ であることを示せ。

**5.**　(1) 集合 $A$, $B$ に対して、(a), (b) が成り立つための条件を論理式で表わせ。(a) $A\subset B$　(b) $A=B$.
(2) $A$, $B$ を集合とするとき、次の各記号が表すものの定義を述べ、またそれらが何と呼ばれるか答えよ。
(a) $A\cup B$　(b) $A\cap B$　(c) $A\times B$　(d) $2^A$ (または $\mathrm{Pow}(A)$)　(e) $A\setminus B$

**6.**　(1) $n=1,2,\ldots$ に対して $A_n$ が集合であるとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ の定義を書け。(2) $A_n=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{n}\le x\le 2-\frac{1}{n}\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ とするとき、$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ を求めよ。(3) $\displaystyle\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)^c=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n^c)$ を証明せよ。

**7.**　(1) 写像が全射であることの定義を述べ、全射な写像の例をあげよ。　(2) 写像が単射であることの定義を述べ、単射な写像の例をあげよ。　(3) $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ とするとき、以下の (a), (b) を証明し、(c) の反例を書け。　(a) $f$ と $g$ が全射であれば $g\circ f$ も全射である。　(b) $g\circ f$ が全射であれば $g$ も全射である。　(c) $g\circ f$ が全射であれば $f$ も全射である。

**8.**　$f\colon X\to Y$ とする。(1) $X$ の部分集合 $A$ の $f$ による像 $f(A)$, $Y$ の部分集合 $B$ の $f$ による逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を記せ。(2) $A_1,A_2\subset X$ とするとき、$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$ を証明せよ。また $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$ が成り立たないような、$f$, $A_1$, $A_2$ の例をあげよ。(3) $B_1,B_2\subset Y$ とするとき、$f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$ を証明せよ。

**9.**　$X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f\colon X\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ で定めるとき、以下の問に答えよ。$f(X)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f(\emptyset)$, $f^{-1}(\emptyset)$, $f(\{1\})$, $f([1/2,3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}((0,3])$ を求めよ。

**10.**　空でない集合 $U$ の部分集合のうち空集合でないもの全体を $X$ とおき、$X$ に属する $A$, $B$ に対して、

$$A\sim B \quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$$

と定義する。このとき以下の問に答えよ。
(1) $U=\{1,2,3\}$ とするとき、$X$ を求めよ。　(2) $\sim$ が $X$ 上の同値関係であることを示せ。

(とりあえず略解。採点をすると同時に、講評を書き足します。)

## 解答と解説

**1.** (1) $p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ (2) $-1 \not\in \mathbb{N} \wedge -1 \in \mathbb{Z}$ (3) $(A \cup B)^c = (A^c) \cap (B^c)$ (4) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \not\in B$ (5) $(\exists w \in \mathbb{C})\ (\forall z \in \mathbb{C})\ z + w = w + z = 0$

**2.** (1) 分配律 $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ と可換律 $p \wedge q \equiv q \wedge p$ から

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge (r \vee s)) \vee (q \wedge (r \vee s)) \equiv ((r \vee s) \wedge p) \vee ((r \vee s) \wedge q).$$

再び分配律、それに続いて可換律、結合律を用いて、

$$\begin{aligned}((r \vee s) \wedge p) \vee ((r \vee s) \wedge q) &\equiv ((r \wedge p) \vee (s \wedge p)) \vee ((r \wedge q) \vee (s \wedge q)) \\ &\equiv ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)) \vee ((q \wedge r) \vee (q \wedge s)) \\ &\equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).\end{aligned}$$

ゆえに

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s).$$

(2) (数直線に図を書いて、答を求める方法は知っているでしょうが、その論理はどうか？ということです。)

$$\begin{aligned}(x-1)(x-3) > 0 \wedge x(x-2) > 0 &\Leftrightarrow (x < 1 \vee x > 3) \wedge (x < 0 \vee x > 2) \\ &\Leftrightarrow (x < 1 \wedge x < 0) \vee (x < 1 \wedge x > 2) \vee (x > 3 \wedge x < 0) \vee (x > 3 \wedge x > 2) \\ &\Leftrightarrow (x < 0) \vee (\mathrm{F}) \vee (\mathrm{F}) \vee (x > 3) \\ &\Leftrightarrow x < 0 \vee x > 3. \blacksquare\end{aligned}$$

**3.** (1) $(\forall x \in \mathbb{Z}0)\ (\exists y \in \mathbb{Z})\ x + y = y + x = 0.$ (証明) $x$ を任意の整数とするとき、$y = -x$ とおくと、$y$ は整数であり、$x + y = x + (-x) = 0$ かつ $y + x = (-x) + x = 0.$

(2) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ y^2 + 2y > x.$ (証明) $x = -2$ とおくと、$x$ は実数であり、任意の実数 $y$ に対して、

$$y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1 \geq -1 > -2 = x.$$

ゆえに $y^2 + 2y > x.$ $\blacksquare$

**4.** (1) $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b.$ (2) 実数 $x$ が、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) - \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$$

を満たすと仮定する。任意の自然数 $n$ に対して、$-\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}$ であるから、$|x| < \dfrac{1}{n}.$ $x = 0$ を背理法で証明するため、$x \neq 0$ と仮定すると、$|x| > 0.$ $a = |x|$, $b = 1$ として、アルキメデスの公理を用いると、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $N|x| > 1.$ ゆえに $|x| > \dfrac{1}{N}.$ これは矛盾である。ゆえに $x = 0.$ $\blacksquare$

結構多くの人が $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R}0)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ と間違えました。$a$ が $0$ や負だったら、ダメと気づいて欲しいです。

**5.** (1) (a) $A \subset B \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall x \in A) \quad x \in B.$ (b) $A \subset B \wedge B \subset A.$ (2) (a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$ $A$ と $B$ の和集合 (合併集合) と呼ぶ。(b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$ $A$ と $B$ の共通部分と呼ぶ。 (c) $A \times B = \{z \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)\ z = (x, y)\}.$ $A$ と $B$ の直積集合と呼ぶ。 (d) $2^A\,\{C \mid C$ は $A$ の部分集合$\}.$ $A$ のベキ集合と呼ぶ。 (e) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \not\in B\}.$ $A$ から $B$ を除いた差集合と呼ぶ。 $\blacksquare$

完璧に出来た人が多い中で、まともに出来ない人もいました。宿題、中間試験で出題して、両方とも添削して返却したのに出来ない人は、深刻に反省すべきです。

**6.** (1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid (\forall n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}$. (2) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid 0\le x\le 1\}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid -1\le x<2\}$. (3)

$$\begin{aligned} x\in\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c &\Leftrightarrow \neg\left(x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &\Leftrightarrow \neg\left((\exists n\in\mathbb{N})\quad x\in A_n\right) \\ &\Leftrightarrow (\forall x\in N)\quad x\notin A_n \\ &\Leftrightarrow (\forall x\in N)\quad x\in A_n^c \\ &\Leftrightarrow x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n^c). \end{aligned}$$

**6** (1) になると、急に集合の書き方を忘れる人が多い。$\{(\exists n\in\mathbb{N})\ x\in A_n\}$ なんて書いたりする。$\{x \mid P(x)\}$ という書き方が身についていない、ということだろう。

**7.** (1) $X, Y$ は集合、$f\colon X\to Y$ とする。$f$ が全射であるとは、$(\forall y\in Y)\ (\exists x\in X)\ y=f(x)$ が成り立つことをいう。$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$ は全射である。実際、任意の $y\in\mathbb{R}$ 対して、$x=y$ とおくと、$x$ は実数で、$f(x)=y$. (2) $X, Y$ は集合、$f\colon X\to Y$ とする。$f$ が単射であるとは、$(\forall x\in X)\ (\forall x'\in X)\ x\ne x' \Rightarrow f(x)\ne f(x')$ が成り立つことをいう。$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$ は単射である。実際、任意の $x, x'\in\mathbb{R}$ 対して、$x\ne x'$ であれば、$f(x)=x\ne x'=f(x')$ であるから、 $f(x)\ne f(x')$. (3) (a) $f$ と $g$ が全射と仮定する。$z$ を $Z$ の任意の元とするとき、$g$ が全射であることから、ある $y\in Y$ が存在して $z=g(y)$. $f$ が全射であることから、ある $x\in X$ が存在して $y=f(x)$. このとき、$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=z$. ゆえに $g\circ f$ は全射である。(b) $g\circ f$ が全射と仮定する。$z$ を $Z$ の任意の元とするとき、$g\circ f$ が全射であることから、ある $x\in X$ が存在して $z=g\circ f(x)$. $y:=f(x)$ とおくと、$y\in Y$ であり、$g(y)=g(f(x))=g\circ f(x)=z$. これは $g$ が全射であることを示している。 (c)

**7** (3) でとても多かった誤答は、$z$ でなく、$y$ からスタートするもの。$f, g$ の順にということなのかな。任意の $z$ から始まり、$z$ から $y$ が決まり、その $y$ から $x$ が決まり、というのが本当なのに、$y$ から始めたら無茶苦茶。

**8.** (1) $f(A)=\{y \mid (\exists x\in A)\ y=f(x)\}$. $f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$. (2) $y\in f(A_1\cap A_2)$ とすると、$y=f(x)$ を満たす $x\in A_1\cap A_2$ が存在する。$y=f(x)$, $x\in A_1$ より $y\in f(A_1)$. 同様に $y=f(x)$, $x\in A_2$ より $y\in f(A_2)$. ゆえに $y\in f(A_1)\cap f(A_2)$. ゆえに $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$. $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $A_1=\{-1\}$, $A_2=\{1\}$ とするとき、$f(A_1\cap A_2)=f(\emptyset)=\emptyset$, $f(A_1)\cap f(A_2)=\{1\}\cap\{1\}=\{1\}$ であるので、$f(A_1\cap A_2)\ne f(A_1)\cap f(A_2)$. (3)

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(B_1\setminus B_2) &\Leftrightarrow f(x)\in B_1\setminus B_2 \\ &\Leftrightarrow f(x)\in B_1\wedge\neg(f(x)\in B_2) \\ &\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\wedge\neg(x\in f^{-1}(B_2)) \\ &\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2).\blacksquare \end{aligned}$$

$f(A)$ は $f(A)=\{f(x) \mid x\in A\}$ と書いても良いことにしてありますが、実際に証明するときは、

$$y\in f(A) \quad\Leftrightarrow\quad (\exists x\in A)\quad y=f(x)$$

が使えないと話が前に進められません。

**9.** $f(X)=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, $f^{-1}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(\emptyset)=\emptyset$, $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $f(\{1\})=\{f(1)\}=\{2\}$, $f([1/2,3])=[2,10/3]$, $f^{-1}(\{1\})=\emptyset$, $f^{-1}(\{3\})=\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$, $f^{-1}((0,3])=\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

**10.** (1) $U = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$. (2) (i) $A \in X$ とするとき、$\mathrm{id}_A\colon A \to A$ は全単射であるから、$A \sim A$. (ii) $A, B \in X$, $A \sim B$ とすると、全単射 $f\colon A \to B$ が存在する。このとき $f$ の逆写像 $f^{-1}$ は $B$ から $A$ への全単射であるから、$B \sim A$. (iii) $A, B, C \in X$, $A \sim B$, $B \sim C$ とすると、2 つの全単射 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ が存在する。このとき $g \circ f$ は $A$ から $C$ への全単射であるから、$A \sim C$. (i), (ii), (iii) から、$\sim$ は $X$ 上の同値関係である。 ■