基礎数学 IV

桂田 祐史

2004 年 9 月 28 日

目 次

1　全体のイントロ

大きく分けて二つのことをする。

級数 (特に冪級数) 多くの量が級数で表現できる。特に「解析関数」の Taylor 展開は冪級数というものになる。

(常) 微分方程式[1] 非常に多くの現象が微分方程式で記述でき、それを調べることで現象が良く分かる。
(例えば、Newton による力学の確立は、Newton が自ら編み出した微分積分学を用いて微分方程式を解いたことに負う部分が大きい。例えば、万有引力の法則に従う二つの天体の運動を微分方程式で表わして解くと、Kepler の法則が出て来る (Kepler の法則の数学的証明)。)

勉強の仕方について。基礎数学 III と異なり内容が「初めて」であること、計算問題も多いので、問題演習が大事である。

2　級数のイントロ

色々な量が級数で表現できる。その基本的な取り扱いを学ぼう。

2.1　級数とは

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

のように無限数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を順に足していってできる「もの」を (無限) 級数 (infinite series) と呼ぶ[2]。有限和のときと同様に $\sum$ を用いて

$$\sum_{\substack{n=1\\ n=0}}^{\infty} a_n$$

と表わす。この式の意味は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (\text{部分和の極限})$$

であると定義する。

極限が有限の値になることを「級数は収束する」といい、そうでないことを「級数は発散する」と言う。

[2] これに対して、$a_1 + a_n + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ を有限級数と呼ぶ。単に級数と言ったときは無限級数を意味するのが普通である。

2.2 重要な級数のタイプ

級数の各項が変数を含む場合が重要である。

冪級数とフーリエ級数が応用上重要な級数の双璧と言えるであろう。

2.2.1 冪級数

例えば $a_n = c_n(x-a)^n$ (ただし a, c_n は定数で、x は変数) の場合、つまり

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

という形の級数を a を中心とする**冪級数**(べききゅうすう) (power series) または**整級数**と呼ぶ[3]。

これは多項式の一般化 (次数を無限大にした) とも見なせるし、等比級数の一般化 (係数を 1 でなくした) とも見なせる。

関数 f のテイラー展開

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

は冪級数であることに注意しよう。逆に収束する冪級数はある関数のテイラー展開であることが分かるので、

冪級数 ≒ テイラー展開

と考えても構わないであろう。

基礎数学 III で出て来たテイラー展開の例をいくつか思い出してみよう。

(1)
$$e^x = \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$

(2)
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

(3)
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

(4)
$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} \quad (x \in \mathbf{R})$$

(5)
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

[3]当て字をして「巾級数」と書くこともあるが、この講義では「ベキ級数」と板書することにする。

(6) $$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \quad (|x| < 1).$$

(7) $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < 1).$$

あるいは本質的に同じことだが

(8) $$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \quad (|x-1| < 1).$$

基礎数学 III の段階では、無限級数の扱い方を学んでいなかったが、基礎数学 IV では自由自在に扱えるようになる。

なお、冪級数を扱い出すと、**変数を複素数の範囲まで広げた方が便利**なことが分かってくる。二点ほど説明しておく。

1. テイラー展開を使うと、変数の範囲を自然に複素数まで広げることができる。

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \text{ は任意の複素数}).$$

$z = ix$ を代入すると ($i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$, $i^{2n-1} = (i^2)^{n-1} \cdot i = (-1)^{n-1} i$ に注意して)、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (ix)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} (ix)^{2n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}. \end{aligned}$$

これから Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が得られ、

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

などの関係式が得られる。

2. 上にあげた級数で、収束するための変数の範囲に制限がつくことが分かるが、それがどこから来るのか、実数の範囲だけで考えているうちは分からない。複素変数の範囲で考えると、その制限がはっきりと目に見えて分かるようになる。

2.2.2 フーリエ級数

周期 2π の周期関数 f は (病的な例外を除いて)、次のような三角関数を用いた級数で表わされる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

ここで $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

で求められる。

この級数を f のフーリエ級数と呼ぶ。

2.3 級数の具体例 (1) — 自然数の冪の逆数を項とするタイプ

以下、級数の具体例をいくつか示す。これらの結果は、一つの例外をのぞいて、この講義で証明する。

幅が 2 の板がたくさんあるとき、それをずらして積んで水平方向にどこまで伸るか。上にある部分の重心が下の板の上にあるという条件で考えると、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

これは段々増えていくものの、増加量は減少して 0 に収束するので、一定の値に収束してしまいそうな気もするが (例えば、床とボールの反発係数が 1 より小さいときに、ボールがいつまで跳ねているかを調べると、後で説明する等比級数になり、有限の時間を過ぎれば止ってしまう)、実は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \tag{9}$$

である。ただし「部分和が大きくなる速さはとても遅い」。これについては後述する。

これに対して、一項ごと符号を変えたものは収束する:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2. \tag{10}$$

似た級数で有名なものに**グレゴリーの級数**

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \tag{11}$$

がある[4]。

[4] これは一見 (6) に $x = 1$ を代入するだけのようであるが、さにあらず。$x = 1$ を代入しても良いことを保証するのは、結構高級な議論 (Abel の定理) が必要になる。(10) についても同様の事情がある。

一方、自然数の平方の逆数の和は有限になる。

(12)
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(この和が $\pi^2/6$ になることの証明は少し難しい。ある時期、よく知られた未解決問題であった。今では色々な証明が知られているが、基礎数学 IV の段階で証明するのは難しい。誰か自分で勉強して、黒板の前で説明できたら期末試験に 25 点進呈。先着一名様。)

(10), (11), (12) のいずれも、円とは全然関係なさそうなのに和に円周率 π が現われるのはちょっと不思議なこと。

和を具体的に求めるのは難しいが、収束発散については、次のように比較的簡単な結果となる。

(13)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}<\infty & (\alpha>1)\\ =\infty & (0<\alpha\le 1)\end{cases}$$

これは基礎数学 III に現われた

(14)
$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}<\infty & (\alpha>1)\\ \infty & (0<\alpha\le 1)\end{cases}$$

と関係が深い。

2.4 級数の具体例 (2) — 等比級数

基本的に高等学校の数学の復習ではあるが、重要である。

r を複素数の定数とする。

(15)
$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\begin{cases}\dfrac{1}{1-r} & (|r|<1)\\ \text{発散} & (|r|\ge 1)\end{cases}$$

これは結果だけでなく、途中経過も重要であり、マスターしておくことを強く勧める。要点は次の二つ。

1. 等比数列の和の公式
$$\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\begin{cases}\dfrac{1-r^n}{1-r} & (r\ne 1)\\ n & (r=1)\end{cases}$$
(これも丸暗記でなく、自力で導けること)

2. 等比数列の極限
$$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}0 & (|r|<1)\\ 1 & (r=1)\\ \text{発散} & (|r|\ge 1 \text{ かつ } r\ne 1)\end{cases}$$

2.5　級数の発散・収束の解析の具体例

2.5.1　(9) の証明

(これは講義で話すときは、図を描いて済ませてしまう。)

$n \le x \le n+1$ のとき、

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

であるから、

$$\frac{1}{n+1} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dx \le \frac{1}{n}.$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

(なお $\frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$ より $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \log n$ であり、$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \log n$ が示せるので、結局 $\log(n+1) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \log n$. 付録 D.3 を見よ。)

積分を使わない別証明　$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく。

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = s_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \ge s_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = s_2 + \frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \ge s_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = s_4 + \frac{1}{2},$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= s_{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&\ge s_{2^{n-1}} + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \quad (\text{かっこ内の項数は } 2^{n-1}) \\
&= s_{2^{n-1}} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

これから

$$s_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty.$$

自然数 n に対して、$m := \log_2 n$ の整数部分 とおくと、$2^m \leq n$ なので $s_{2^m} \leq s_n$. また $n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ なので $s_n \to \infty$. ■

　あるいは

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

だから、

$$s_2 - s_1 \geq \frac{1}{2},$$
$$s_4 - s_2 \geq \frac{1}{2},$$
$$\cdots$$
$$s_{2^n} - s_{2^{n-1}} \geq \frac{1}{2}$$

より

$$s_{2^n} - s_1 \geq \frac{n}{2}.$$

と書いた方がスマートかな。

2.5.2　(13) の証明

$0 \leq \alpha < 1$ の場合　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty$ となることは、前小節と同様にしても証明できるし、次のようにしても良い。

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$$

に注意して、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty.$$

$\alpha > 1$ の場合　$n - 1 \leq x \leq n$ のとき、

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

であるから、

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

となるので、

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\leq\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\int_{1}^{n}\frac{1}{x^\alpha}\,dx=\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n=\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}<\frac{1}{\alpha-1}$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha}<1+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

これから $n\to\infty$ のとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$ が無限大に発散せずに収束することはほぼ明らかであろう (厳密には「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理を用いる)。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\leq\frac{\alpha}{\alpha-1}<\infty.$$

2.6 $\log x$ が大きくなる速さについて

事実として

$$\lim_{x\to\infty}\log x=\infty \tag{16}$$

は知っているであろう。実際、任意の数 R に対しても、x を $x\geq e^R$ となる数とすると、

$$\log x\geq\log e^R=R$$

となる。つまり、x を十分大きくすれば、$\log x$ はいくらでも大きくすることが出来る。これは (16) を意味する。

ところで $\log x$ が大きくなる速さは非常に遅い。

例題 断面が、cm の単位で $y=\log x$ のグラフとなるような坂があったとする。例えば、原点から 1 (cm) 右に進んだところの高さが $\log 1=0$ (cm) で、原点から 2 (cm) 右に進んだところの高さが $\log 2=0.69\cdots$ (cm) である (ちなみに左側は絶壁で奈落の底に落ちて行く)。それでは原点から水平方向にどれだけ離れれば高さが 1m $=100$ cm になるか？

(A) このキャンパスの端から端まで

(B) 東京札幌間

(C) それ以上

解答 張るのなら (C) だろうと想像出来るだろうが、実際どれくらいになるかは以下の通り。x cm 離れたところで高さが 100 cm になったとすると、

$$\log x=100$$

より

$$x = e^{100} = 2.6881\cdots \times 10^{43}(\mathrm{cm}).\blacksquare$$

これは約 2.84×10^{25} 光年である[5]。宇宙の直径は数百億光年 (100 億 $= 10^{10}$) と言われているから、この宇宙に入っているうちは 1 m の高さになることはないというわけである。

3　教科書に書いてあること

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

あるいは

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

を冪級数という。$X = x - a$ とおくと、後者は前者に帰着されるので、基本的に前者を考える対象とする。

$a_n = 1$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の場合

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

となるが、

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

とおくと、$x \neq 1$ のとき、

$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

$|x| < 1$ ならば $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ であるから、

収束半径 $|x| < r$ で収束、$|x| > r$ で発散。どんな冪級数についても、収束半径が存在する。

3.1　簡単な性質

補題 3.1 $\displaystyle\sum_{n}^{\infty} a_n$ が収束するならば、以下の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

(2) ある実数 M が存在して、すべての n に対して、

$$|a_n| \leq M.$$

(これが成り立つとき、$\{a_n\}$ は**有界**であるという。)

[5] 1 光年とは光が 1 年間に進む距離で、約 9.45×10^{15} m/s

証明

第 n 部分和を s_n とすると、$\lim_{n\to\infty} s_n = s$. $a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ldots.\blacksquare$$

注意 3.1 補題 3.1 (1) の逆は真でない。つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても、$\sum_n a_n$ が収束するとは限らない。例えば $a_n = 1/n$ とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{(発散)}.\blacksquare$$

3.2 正項級数

$a_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ を満たす級数 $\sum_n a_n$ を**正項級数**と呼ぶ。

命題 3.1 (上に有界な単調増加数列は収束する) 実数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が、二条件

(i) すべての n に対して、$s_n \leq s_{n+1}$ が成り立つ。

(ii) ある実数 M が存在して、すべての n に対して $s_n \leq M$ が成り立つ。

を満たすならば、数列 $\{s_n\}$ は収束する。つまり、ある実数 s があって、

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

(なお $s \leq M$ が成り立つ。)

この命題は証明抜きで認めることにする (実数の連続性の一つの表現であって、証明は少し面倒である)。

系 3.1 (任意の部分和が有界な正項級数は収束する) 正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が、条件

ある実数 M があって、すべての $n \in \mathbf{N}$ に対して $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq M$

を満たすならば、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

証明

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が正項級数であることから $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は単調増加数列で、仮定から

$$s_n \le M \quad (n \in \mathbf{N})$$

命題より $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する。■

逆に収束列は有界であるから、

正項級数については、収束 $\Longleftrightarrow$ 有界

次の系は、後で紹介する命題 (系 ??) で代用できるので、時間がないときはカットできそう。

系 3.2 (優級数が収束すれば正項級数は収束する) 正項級数 $\sum_n a_n, \sum_n b_n$ が、二条件

(i) $a_n \le b_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

(ii) $\sum_n b_n$ は収束する。

を満たすならば、$\sum_n a_n$ も収束する。

証明

$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと、$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は明らかに単調増加である。さて、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の和を B とする:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

すると任意の $n \in \mathbf{N}$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le B.$$

これから $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する。■

例 3.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

が収束する優級数であるから収束する。実際

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{2}{n(n+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad (n\to\infty).\blacksquare$$

3.3 絶対収束

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束するという。

定理 3.1 (絶対収束する級数は収束する) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

(Cauchy 列の話を基礎数学 III でしていない。ここでそれをやってしまうと、平均的学生にとっては、焦点がぼけてしまいそうだ。証明は「後で時間があったら」にしました。)

証明

$\displaystyle s_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ S_n:=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\ (n\in\mathbf{N})$ とおく。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が絶対収束するという仮定から $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束列であり、Cauchy 列であることがわかる。一方、任意の n, m に対して、

$$|s_m-s_n|\le|S_m-S_n|$$

が成り立つ。実際、$n\le m$ とすると ($m\le n$ でも同様)

$$|s_m-s_n|=\left|\sum_{k=1}^{m}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{m}|a_k|=S_m-S_n=|S_m-S_n|.$$

ゆえに $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ も Cauchy 列であるから、収束する。■

別証明

$a_n\in\mathbf{R}\ (n\in\mathbf{N})$ のときに示す (複素数の場合は実部・虚部を取って考えればよい)。

$$b_n=\begin{cases}a_n & (a_n>0 \text{ の場合})\\ 0 & (a_n\le 0 \text{ の場合}),\end{cases}$$

$$c_n=\begin{cases}0 & (a_n>0 \text{ の場合})\\ -a_n & (a_n\le 0 \text{ の場合})\end{cases}$$

とおくと、

$$b_n\ge 0,\quad c_n\ge 0,\quad a_n=b_n-c_n,\quad |a_n|=b_n+c_n,\quad b_n\le|a_n|,\quad c_n\le|a_n|.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}b_n &\le \sum_{n=0}^{N}|a_n|\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|,\\ \sum_{n=0}^{N}c_n &\le \sum_{n=0}^{N}|a_n|\le\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|.\end{aligned}$$

ゆえに $\sum_n b_n, \sum_n c_n$ は収束する。ゆえに

$$\sum_n b_n + \sum_n c_n = \sum_n (b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

これから、$\sum_n a_n$ は収束する。■

絶対値を取って作った級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は正項級数なので、前小節の判定法が使える。

次の二つの定理は前小節の系 3.2, 3.1 の系とも言えるが、応用上重要であるから「定理」とした。

定理 3.2 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、ある実数 M が存在して

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq M \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つならば絶対収束する (もちろん収束する)。

定理 3.3 (優級数が収束すれば絶対収束する) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が、二条件

(i) $|a_n| \leq b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する。

を満たすならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する (もちろん収束する)。

証明

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ の第 n 項までの部分和を s_n とおく:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

明らかに $\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は単調増加である:

$$s_n \leq s_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

また $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の和を B とおくと、任意の n に対して、

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

ゆえに「上に有界な単調増加数列は収束する」という定理から、$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する。すなわち $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は収束する。■

定理 3.4 (絶対収束ならば可換収束) 絶対収束する級数では、項を加える順序をどう変えても同じ値に収束する。

定理 3.5 (級数の積) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が絶対収束するならば、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{左辺の級数は絶対収束}).$$

(左辺は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r+s=n}^{n} a_r b_s$ のように書かれることも多い。)

証明

まず絶対収束することは

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| \leq \sum_{n=0}^{m}\sum_{p+q=n} |a_p|\,|b_q| \leq \left(\sum_{p=0}^{m} |a_p|\right)\left(\sum_{q=0}^{m} |b_q|\right) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right) < \infty.$$

杉浦先生の本には添字について図示してあり分りやすい。

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{2m} c_n - \sum_{p=0}^{m} a_p \sum_{q=0}^{m} b_q\right| &\leq \sum_{q=m+1}^{2m}\sum_{p=0}^{2m-q} |a_p|\,|b_q| + \sum_{p=m+1}^{2m}\sum_{q=0}^{2m-p} |a_p|\,|b_q| \\
&\leq \sum_{q=m+1}^{2m}\sum_{p=0}^{m} |a_p|\,|b_q| + \sum_{p=m+1}^{2m}\sum_{q=0}^{m} |a_p|\,|b_q| \\
&\leq \sum_{q=m+1}^{2m} |b_q| \cdot \sum_{p=0}^{m} |a_p| + \sum_{p=m+1}^{2m} |a_p| \cdot \sum_{q=0}^{m} |b_q| \\
&\to 0 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} |a_p| + 0 \cdot \sum_{q=0}^{\infty} |b_q| = 0 \quad (m \to \infty).
\end{aligned}$$

もちろん

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{2m} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad \lim_{m\to\infty}\sum_{p=0}^{m} a_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \lim_{m\to\infty}\sum_{q=0}^{m} b_q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

であるから、目標だった等式が成り立つ。■

注意 3.2 () 定理 *3.5* について

- 実は $\sum a_n$, $\sum b_n$ の片方が絶対収束ならば、もう一方は単に収束するだけで、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

が成立すると記憶している…

3.4 d'Alembert の判定法, Cauchy-Hadamard の判定法

等比級数と比較することで簡単な収束判定法が得られる。

定理 3.6 (d'Alembert の判定法 (ratio test)) 極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r$$

が存在すると仮定する。

(1) $r < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(2) $r > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

注意 3.3 () (1) $r = 1$ のときは収束も発散もありうる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

を見よ。

(2) 実は上極限があれば十分である。■

定理 3.7 (Cauchy-Hadamard の判定法 (root test)) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$$

が存在すると仮定する。

(1) $r < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束する。

(2) $r > 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

3.5 条件収束

既に見たように絶対収束級数は普通の意味で収束する。その逆は真でない。つまり、収束はするが、絶対収束はしない級数もある。そういうものを**条件収束級数**と呼ぶ。

3.6 まな板に載せる問題

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

に $x = 1$ を代入できるか？実は出来て、

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$$

が得られるのだが、それは何故か？

まず絶対収束はしない。実際

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

とおくと、

$$|a_n| = \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)}$$

であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

3.7 交項級数 (交代級数)

定理 3.8 (Leibniz — 一般項の絶対値が単調減少して 0 に収束する交代級数は収束) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の一般項 a_n が、単調減少して 0 に収束する数列 $\{b_n\}$ によって[a]、

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

と表わされる場合、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。さらに

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le |a_{n+1}|\,.$$

[a]つまり $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \cdots \to 0$.

証明

1. (部分和の偶数項目、奇数項目はそれぞれ有界な単調列であること)

$$\begin{array}{lll}
s_1 = b_1, & & \\
s_2 = b_1 - b_2, & s_2 = s_1 - b_2 < s_1, & \\
s_3 = b_1 - b_2 + b_3, & s_3 = s_2 + b_3 > s_2, & s_3 = s_1 - (b_2 - b_3) < s_1, \\
s_4 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4, & s_4 = s_3 - b_4 < s_3, & s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) > s_2, \\
s_5 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5, & s_5 = s_4 + b_5 > s_4, & s_5 = s_3 - (b_4 - b_5) < s_3, \\
s_6 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6, & s_6 = s_5 - b_6 < s_5, & s_6 = s_4 + (b_5 - b_4) > s_4, \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

数列 $\{s_n\}$ は下がって、上がって、下がって、上がって、…と増減を交互に繰り返す。変化の幅が単調に小さくなるので、以前にいたところを飛び越えることはできない。

$$\begin{cases} s_1 > s_3 > s_5 > \cdots > s_{2k-1} > s_{2k+1} > \cdots > s_2, \\ s_2 < s_4 < s_6 < \cdots < s_{2k} < s_{2k+3} < \cdots < s_1 \end{cases}$$

2. (収束すること) $\{s_{2k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ は単調増加で上に有界、$\{s_{2k-1}\}_{k\in\mathbf{N}}$ は単調減少で下に有界なので、ともに収束する。

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s_{\mathrm{e}}, \quad \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = s_{\mathrm{o}}.$$

また

$$s_{\mathrm{e}} - s_{\mathrm{o}} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - s_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} (-b_{2k}) = 0$$

であるから、$s_{\mathrm{o}} = s_{\mathrm{e}}$. 共通の極限を s と書けば

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

3. (誤差評価) さて、狭義の単調列の極限であるから、

$$s_{2k} < s_{\mathrm{e}} = s, \quad s_{2k-1} > s_{\mathrm{o}} = s \quad (n \in \mathbf{N})$$

という大小関係が成立するので

$$s_{2k-1} > s_{2k+1} > s > s_{2k}.$$

これから、

$$|s_{2k+1} - s| = s_{2k+1} - s < s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} = |a_{2k+1}|,$$
$$|s - s_{2k}| = s - s_{2k} < s_{2k-1} - s_{2k} = -a_{2k-1} = |a_{2k-1}|.$$

まとめて

$$|s - s_n| < |a_n|. \blacksquare$$

例 3.2

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

は収束する。

4 冪級数

4.1 収束円、収束半径

系 4.1 (Abel) 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ に対して、収束するならば、$|x| < |x_0|$ であるすべての x に対して、$\displaystyle\sum_{n} a_n x^n$ は収束する。

系 4.2 (収束半径の存在) 巾級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して、次の 3 つのうちいずれか一つ、一つだけが成り立つ。

(i) 任意の $x \in \mathbf{C}$ に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

(ii) ある正の数 R があって、$|x| < R$ であるすべての x に対して、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は収束する。

(iii) すべての $x \neq 0$ に対して、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する。

例 4.1 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は公比が z の等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. ゆえに収束半径は 1.

同様に $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ は公比が $2z$ の等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow |2z| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1/2$. ゆえに収束半径は 1/2. ■

注意 4.1 (複素平面では)

定理 4.1 (収束半径を求める) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について、

(1) (d'Alembert の判定法) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = R$ が存在するならば収束半径は $1/R$ である。

(2) (Hadamard の判定法) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = S$ が存在するならば収束半径は $1/S$ である。

注意 4.2 (収束円の周上では) 収束円の周上 $x = R$ はどうなるか？

1. (周上のすべての点で収束する場合)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$$

は収束半径は 1 で、$|x| = 1$ のとき

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ は収束}$$

であるから、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ は絶対収束する。

2. (周上のすべての点で発散する場合)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

は等比級数であるから、$|x| < 1$ で収束、$|x| \geq 1$ で発散する。ゆえに収束半径は 1 で、収束円周上のすべての点で発散する[6]。

3. (周上の場所によって収束、発散が分かれる)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

の収束半径は 1. $x = 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

[6] $|x| = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} |x^n| = 1$ であり、$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ でないから収束しない。

であり、これが発散することは既に見た。実は、$|x|=1, x\neq 1$ のときは収束する。$x=-1$ のときは「条件収束」の項の Leibniz の定理で分かる:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\log 2.$$

$x\neq\pm 1$ のときは Abel の級数変形法で収束が分かる。■

4.2 ベキ級数の微積分

定理を紹介する前に (密輸入して) 使ってみよう。(紹介する前に使えるはずがないだろうと思うかも知れないが、あまりに自然な定理なので、使ってもそれと気付かないくらいなのである。むしろ、それを証明する必要のある定理と認識することの方が難しい。)

$|x|<1$ のとき、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

これを 0 から x まで積分して

$$\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad (|x|<1).$$

同様に $|x|<1$ のとき、等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

であるが、これを微分して

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

練習問題

(1) Arctan をベキ級数で表わせ (10/23 の小テスト)。(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$ を簡単にせよ。(ヒント: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}$.)

定理 4.2 (項別微分定理) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ と $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ は同じ収束半径 R を持ち、

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad(|x|<R).$$

特に冪級数は収束円の内部で何回でも微分可能である。特に

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

であり、収束冪級数は Taylor 展開である。

注意 4.3 実は一般には

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

は成り立たない。これが成り立つとき、項別微分可能であるという。上の定理は

冪級数は収束円の内部で何回でも項別微分可能である

と読める。■

例 4.2

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

の右辺の級数を微分すると自分自身になることが分かる。$(\exp z)'=\exp z$ であるから当たり前だが。

sin のベキ級数展開

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

を微分すると

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

となって cos のベキ級数展開が得られる。さらにこれを微分すると

$$-\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}$$

から

$$\sin z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

を得る。つまり sin, cos どちらか一方のベキ級数展開を得ておけば、それを微分することで他方のベキ級数展開を得る。同様のことは sinh, cosh についても言える。■

系 4.3 二つのベキ級数 $\sum_n a_n x^n$, $\sum_n b_n x^n$ がともに正の収束半径を持ち、小さい方の収束円の内部で

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

を満たすならば

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

定理 4.3 (項別積分定理) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ は同じ収束半径を持ち、

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

特に

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (b^{n+1} - a^{n+1})}{n+1}.$$

$$\sum_n a_n \pm \sum_n b_n = \sum_n (a_n \pm b_n),$$
$$\lambda \sum_n a_n = \sum_n (\lambda a_n)$$

それでは積は？

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right), \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ を $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の畳み込みと呼ぶことがある。

$\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ の両方が絶対収束であれば、$\sum_n c_n$ も絶対収束する。特に

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \right), \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

$b_0 \neq 0$ のときは割り算もできる。つまり

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n$$

となる $\{c_n\}$ が取れる。

A　数列の極限

A.1　基本的な定義、定理

定義 A.1 (極限の定義) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が複素数 a に収束するとは、

$$(\forall\varepsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbf{N}) \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

が成り立つことをいい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く。このとき「$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の極限は a である」という。極限を明示せずに、単に「$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束する」といったり、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ のことを収束列と呼んだりする。$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列でないとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は発散するという。

命題 A.1 (極限の一意性) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束するならば極限は一つしかない。

命題 A.2 (収束列の部分列は同じ極限を持つ収束列である) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が a に収束するならば、任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbf{N}}$ は a に収束する。

命題 A.3 (収束列は有界である) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が収束列ならば、ある実数 M が存在して、

$$|a_n| \leq M \quad (n \in \mathbf{N})$$

が成り立つ。

定義 A.2 ($\pm\infty$ への発散) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が

$$(\forall R \in \mathbf{R}) \quad (\exists N \in \mathbf{N}) \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n \geq N) \quad a_n \geq R$$

を満たすとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と書き、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は ∞ に発散するという。同様に

$$(\forall R \in \mathbf{R}) \quad (\exists N \in \mathbf{N}) \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n \geq N) \quad a_n \leq R$$

を満たすとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書き、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は $-\infty$ に発散するという。

命題 A.4 (収束列の和、差、積、商、絶対値) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ がそれぞれ a, b に収束するならば以下の (1) 〜 (6) が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b.$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=ab.$ 特に定数 c について $\lim_{n\to\infty}(ca_n)=ca.$

(4) さらに $b_n\neq 0$ $(n\in\mathbf{N})$, $b\neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$

(5) $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|a|.$

(6) $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a,\ \lim_{n\to\infty}a_{n-1}=a.$

命題 A.5 (挟み撃ちの原理) 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と実数 α について、

$$a_n\le b_n\le c_n\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha\in\mathbf{R}$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha.$$

系 A.1 (挟み撃ちの原理 (複素数版)) 複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と複素数 a について、

$$|a_n-a|\le\varepsilon_n\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

命題 A.6 (順序の保存) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ がそれぞれ a, b に収束する収束列で、

$$a_n\le b_n\quad(n\in\mathbf{N})$$

が成り立つとき、

$$a\le b.$$

真不等式 $a_n<b_n$ $(n\in\mathbf{N})$ に置き換えても $a<b$ は結論できない (もちろん $a\le b$ は成り立つ) ことに注意しよう。実際 $a_n=1-\dfrac{1}{n}$, $b_n=1$ とすると $a=b=1$.

アルキメデスの公理

$$(\forall a > 0) \quad (\forall b > 0) \quad (\exists n \in \mathbf{N}) \quad na > b$$

を用いると次の命題が証明できる。

命題 A.7 (基本的な数列の極限) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

ここまでは「実数の連続性」を使わずに済む話である。実数の連続性にはいくつかの表現があるが、数列の言葉で書けるものとして以下の二つをあげておく[7]。

定理 A.1 (上に有界な単調増加列は収束する) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が二条件

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は上に有界である。すなわち実数 M が存在して

$$a_n \le M \quad (n \in \mathbf{N}).$$

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は単調増加列である。すなわち

$$a_n \le a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

が成り立つならば、ある実数 a が存在して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(なお $a \le M$ が成り立つ。)

定義 A.3 (Cauchy 列) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N \in \mathbf{N}) \quad (\forall n \in \mathbf{N} : n \ge N) \quad (\forall m \in \mathbf{N} : m \ge N) \quad |a_n - a_m| \le \varepsilon$$

が成り立つことである。

余談 A.1 (“解析学の創始者” Cauchy) A.L.Cauchy (1789–1857) は、常微分方程式の解の一意存在定理 (Cauchy-Lipschitz[8] の定理) の証明や、複素解析 (complex analysis, 複素函数論とも呼ばれる) の建設 (Cauchy-Riemann の微分方程式, Cauchy の積分定理, Cauchy の積分公式など) だけでなく、解析学の基礎を確立したことでも名高い。いわゆる ε-δ 論法を導入し、極限、連続、定積分などの概念を明確にした。数列の収束判定条件としては (上に紹介した) Cauchy の条件を導入した。 ■

[7]もう一つ「実数全体の集合 $\mathbf{R}$ の部分集合 A, B が (i) $A \cup B = \mathbf{R}$, (ii) $A \cap B = \emptyset$, (iii) $(\forall a \in A)$ $(\forall b \in B)$ $a < b$. という三条件を満たすならば、ある実数 c が存在して、次の (a), (b) のいずれか一方が成り立つ。(a) $A = (-\infty, c)$, $B = [c, \infty)$, (b) $A = (-\infty, c]$, $B = (c, \infty)$.」

[8]R.O.S.Lipschitz (1832–1903) は、Cauchy の証明を単純化するとともに、仮定を $f = f(t, x)$ の x に関する連続な偏導関数の存在から、f の x に関する Lipschitz 条件に置き換えて定理を示した。

補題 A.1 収束列は Cauchy 列である。

補題 A.2 (R, C の完備性 — Cauchy 列は収束する) 実 (複素) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が Cauchy 列であるならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束列である。すなわち、ある実数 (複素数) a が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

A.2 知っているはず (?) の極限の証明

A.2.1 アルキメデスの原理

二つの正数 a, b があるとき、a がどんなに小さくても、a がどんなに大きくても、十分大きい自然数 n を取れば、

$$na > b$$

となる、というのは**アルキメデスの原理**と呼ばれる、実数の重要な性質である。

高校数学では当たり前のこととされる

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

や

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

の証明はアルキメデスの原理を使って証明される。例えば後者については、任意の $\varepsilon > 0$ を取ったとき、$a = \varepsilon$, $b = 1$ として、十分大きい自然数 N を取れば $Na > b$ が成り立つことから、

$$\varepsilon > \frac{1}{N}.$$

ゆえに $n \geq N$ なる任意の自然数 n に対して、

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \therefore \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を示している。

$a_n > 0$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

A.2.2 等比数列の極限

$$|r| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

の証明は？これは

$$R > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R^n = \infty$$

に帰着できる。

$\delta = R - 1$ とおくと、$\delta > 1$ で、2 項定理から

$$R^n = (1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \delta^k = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^n.$$

右辺の各項は正であるから、第 2 項以外を落せば

$$R^n \geq n\delta.$$

$n \to \infty$ のとき、$n\delta \to \infty$ であるから、$R^n \to \infty$.■

同様にして、任意の整数 k に対して、

$$R > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{R^n}{n^k} = \infty$$

や、

$$|r| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$$

が証明できる。念のため $k = 2$ の場合を見ておくと、$\delta = R - 1$ として、

$$R^n = (1+\delta)^n = 1 + n\delta + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\delta^3 + \cdots + \delta^n \geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\delta^3$$

より

$$\frac{R^n}{n^2} \geq \frac{(1-1/n)(n-2)}{6}\delta^3 \to \infty.$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^n}{n^2} = \infty.\blacksquare$$

A.2.3 指数関数、多項式関数、対数関数の大きさ勝負

$a > 1$, k を自然数とする。

$f(x) := \dfrac{a^x}{x^k}$ は

$$f'(x) = (a^x \log a) \cdot x^k + a^x \cdot kx^{k-1} = a^x x^{k-1}(x \log a + k)$$

であるから、$x < -k/\log a$ のとき単調減少、$x > -k/\log a$ のとき単調増加である。

前小節で分かったように

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$$

であるから、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty.$$

これから

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{|p(x)|} = \infty \quad (p(x) \text{ は } x \text{ の任意の多項式})$$

が分かる。

さて、これを使うと

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\log x)^k}=\infty$$

が証明できる。実際、$\log x=y$ とおくと、$x=e^y$ であり、$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ であるから、

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\log x)^k}=\lim_{y\to\infty}\frac{e^y}{y^k}=\infty.$$

もちろん次数が高いほど早く ∞ に近づくから、より一般に

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|p(x)|}{(\log x)^k}=\infty \quad (p(x)\text{ は }x\text{ の任意の多項式}).$$

まとめると、$x\to\infty$ のときの増加の速さについては

$$e^x\text{ の速さ}\gg|p(x)|\text{ の速さ}\gg(\log x)^k\text{ の速さ}.$$

A.2.4　その他

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=1$$

も時々現われる重要な結果である。

一つの証明は

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(n^{1/n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0 \quad (\because\text{ 前小節の結果})$$

より

$$\lim_{n\to\infty}n^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\exp\log\left(n^{1/n}\right)=\exp 0=1$$

とするものである。

もう一つはより直接的な方法で、$n^{1/n}>1$ であることに注意して、$n^{1/n}=1+a_n$ とおき、

$$n=\left(n^{1/n}\right)^n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n\geq\frac{n(n-1)}{2}a_n^2$$

より

$$\frac{2}{n-1}\geq a_n^2$$

が導かれ、$n\to\infty$ のとき $\dfrac{2}{n-1}\to 0$ であることから $a_n\to 0$. ゆえに $n^{1/n}=1+a_n\to 1$. ■

B　等比級数

B.1　等比数列の和

命題 B.1 $r\in\mathbf{C}$ とするとき、

$$\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\begin{cases}\dfrac{1-r^n}{1-r} & (r\neq 1)\\ n & (r=1)\end{cases}$$

証明

$r=1$ のときは明らか (1 を n 個足す) だから、$r \neq 1$ とする。

$$S = \sum_{k=0}^{n} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}$$

とおくと、

$$rS = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^{n-1} + r^n$$

であるから、

$$(1-r)S = 1 - r^n.$$

ゆえに

$$S = \frac{1-r^n}{1-r}.\blacksquare$$

注意 B.1 (高校数学の知識との照らし合わせ) 高等学校の数学の教科書では、初項 a, 公比 r の等比数列 (第 n 項は ar^{n-1} という形になる) の n 項までの和の公式は

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ na & (r = 1) \end{cases}$$

という形で教わった人が多いであろう。混乱するかもしれないので、少し手助けしておくと、$r \neq 1$ の場合の結果は

$$\text{初項} \times \frac{1 - \text{公比}^{\text{項数}}}{1 - \text{公比}}$$

という形で読むと良い。■

B.2　等比数列の極限

以下にあげる事実は、少なくとも実数の場合については、証明は別にして事実としては高校数学で学んでいることである。

補題 B.1 $r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty.$

証明

$t = r - 1$ とおくと、$t > 0$, $r = 1 + t$ であるから、2 項定理を用いて[9]

$$r^n = (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k t^k \geq 1 + nt.$$

[9] $k \geq 2$ に対応する項は 0 以上であることに注意。

$1+nt \to \infty$ $(n \to \infty)$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty. \blacksquare$$

系 B.1 $0 \leq r < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0.$

証明

$r=0$ のときは明らかだから、以下 $0<r<1$ の場合を考える。

$$r' = \frac{1}{r}$$

とおくと、$r'>1$ であり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(r')^n = \infty$ となるから、

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r'}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(r')^n} = 0. \blacksquare$$

命題 B.2 (等比数列の極限) $r \in \mathbf{C}$ とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1) \\ 1 & (r=1) \\ \text{発散} & (|r|\geq 1,\, r\neq 1). \end{cases}$$

証明

$|r|>1$ のとき、補題 B.1 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n| = \lim_{n\to\infty}|r|^n = \infty$ であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は発散する[10]。

$|r|<1$ のとき、系 B.1 より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n| = \lim_{n\to\infty}|r|^n = 0$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

である[11]。

$r=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ は明らかなので、以下 $|r|=1,\, r\neq 1$ とする。

$$\left|r^n - r^{n+1}\right| = |r^n(1-r)| = |r^n|\,|1-r| = 1\cdot|1-r| = |1-r|$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left|r^n - r^{n+1}\right| = |1-r| \neq 0.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$ は発散する[12]。 $\blacksquare$

[10]「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (収束) するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$ (収束)」の対偶として、「$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n|$ が発散するならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ も発散する。」

[11]複素数列の収束の定義は、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty}|a_n - a| = 0.$

[12]数列 $\{a_n\}$ が収束するならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n - a_{n+1}| = 0$ となるから。

B.3　等比級数の極限

定理 B.1 (等比級数の和) $r \in \mathbf{C}$ とするとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & (|r| < 1) \\ \text{発散} & (|r| \geq 1). \end{cases}$$

証明

$|r| \geq 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ は成り立たないので、$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ は収束しない。以下 $|r| < 1$ とする。すでに調べてあるように

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$$

であり、$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1-0}{1-r} = \frac{1}{1-r}.\blacksquare$$

B.4　練習問題

(10/2 の小テストで「余裕のある人向け」として紹介した。)

$$S = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots + nr^{n-1}$$

を求めよ。

$r = 1$ のときは

$$S = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$r \neq 1$ のときは、次のいずれかの方法。

$$rS = r + 2r^2 + 3r^4 + \cdots (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

と引き算して

$$(1-r)S = \sum_{k=0}^{n-1} r^{k-1} - nr^n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n = \frac{1-(n+1)r^n - nr^{n+1}}{1-r}$$

$$S = \frac{1-(n+1)r^n - nr^{n+1}}{(1-r)^2}.$$

あるいは

$$\begin{aligned} S &= \frac{d}{dr}\left(1+r+r^2+\cdots+r^n\right)=\frac{d}{dr}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{(1-r)(-nr^{n-1})-(-1)(1-r^n)}{(1-r)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)r^n-nr^{n+1}}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

C　Abel の級数変形法

C.1　Abel の業績

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、ベキ級数の収束発散についての基礎を確立した。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式が有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. 楕円関数論

など仕事 (後の二つは大仕事！) を行った。

C.2　Abel の級数変形法 (Abel 変換)

定理の述べ方としては、L.Schwartz に従い、有界変分列を持ち出すのが良いと思う。

定義 C.1 (有界変分列) 数列 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が**有界変分列**とは、

$$\sum_{n=1}^{\infty}|p_{n+1}-p_n|<\infty$$

が成り立つことである。

例えば $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が単調減少な収束列であれば有界変分列である。実際

$$\sum_{k=1}^{n}|p_{k+1}-p_k|=\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_{k+1})=p_1-p_{n+1}\to p_1-\lim_{n\to\infty}p_n \quad (n\to\infty).$$

また任意の有界変分列は収束する。実際

$$p_n=p_1+\sum_{k=1}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)$$

であるが、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(p_{n+1}-p_n)$ は絶対収束級数であるから、その部分和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(p_{k+1}-p_k)$ は Cauchy 列であり、もちろん収束する。

定理 C.1 (Abel) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と数列 $\{p_n\}_{n\geq 0}$ が次の条件 (1), (2) と (3a), (3b) のいずれかを満すとする。

(1) 部分和 $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ は有界。

(2) $\{p_n\}_{n\geq 0}$ は有界変分列。

(3a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = 0.$

(3b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する。

このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n a_n$ は収束し、

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} p_n a_n\right| \leq p_0 \sup_{n\geq 0} |s_n|.$$

証明

$m > n$ とするとき、

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} a_k p_k &= \sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_{k-1})\, p_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} s_k p_k - \sum_{k=n+1}^{m} s_{k-1} p_k = \sum_{k=n+1}^{m} s_k p_k - \sum_{k=n}^{m-1} s_k p_{k+1} \\
&= s_m p_m - s_n p_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} s_k \left(p_k - p_{k+1}\right).
\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k p_k\right| &\leq |s_m p_m - s_n p_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k|\, |p_k - p_{k+1}| \\
&\leq |s_m p_m - s_n p_{n+1}| + \sup_{n\geq 0} |s_n| \sum_{k=n+1}^{m-1} |p_k - p_{k+1}|\,.
\end{aligned}$$

仮定 (1), (2) より、右辺第 2 項は $m > n \to \infty$ のとき、いくらでも小さくできる。
仮定 (3a) が成り立つときは、

$$|s_m p_m - s_n p_{n+1}| \leq |s_m|\, |p_m| + |s_n|\, |p_{n+1}| \leq \sup_{n\geq 0} |s_n| \left(|p_m| + |p_{n+1}|\right) \to 0 \quad (m > n \to \infty).$$

一方、仮定 (3b) が成り立つときは、$\{s_n\}_{n\ge 0}$ は Cauchy 列となるので、

$$\begin{aligned}|s_m p_m - s_n p_{n+1}| &\le |(s_m - s_n)p_m - (p_m - p_{n+1})s_n| \\ &\le |s_m - s_n| \sup_{m\ge 0}|p_m| + |p_m - p_{n+1}| \sup_{n\ge 0}|s_n| \to 0 \quad (m > n \to \infty).\end{aligned}$$

いずれにせよ、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k p_k$ は Cauchy 列であることが分かった。ゆえに収束することが示せた。■

C.3 Abel の連続定理

定理 C.2 (Abel の連続定理) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が収束円周上の点 z_0 で収束すれば、z_0 を含む半径 $\{tz_0; t\in[0,1]\}$ で一様収束する (ゆえにその半径上で連続)。特に $z=R$ (R は収束半径) で収束すれば

$$\lim_{x\in\mathbf{R},x\to R}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

証明

$s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ とおく ($s_{-1}=0$ とする)。$\{s_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は収束するので、特に有界である:

$$\exists M\in\mathbf{R} \quad \text{s.t.} \quad |s_n| \le M \quad (n\in\mathbf{N}).$$

$a_n = s_n - s_{n-1}$ であるから、Abel の級数変形法で

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{n}(s_k - s_{k-1})x^k = \sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1}x^k = \sum_{k=0}^{n} s_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+1} \\ &= s_n x^n - (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k.\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^k - s_n\right| &= \left|s_n(x^n - 1) - (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k\right| = \left|s_n(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k - (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k x^k\right| \\ &\le M\,|x-1|\sum_{k=0}^{n-1}|x|^k + |1-x|\cdot M\sum_{k=0}^{n-1}|x|^k \\ &= 2M\frac{|1-x|}{1-|x|}(1-|x|^n).\end{aligned}$$

それゆえ適当な定数 C に対して、

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leq C$$

が成り立つ範囲を動かして $x \to 1$ とするとき、右辺は一様に 0 に収束する。■

例 C.1 Arctan の Maclaurin 展開

$$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

の収束半径は 1 であり、定理 3.8 より $x = 1$ で収束するので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1} \mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arctan}\, 1 = \frac{\pi}{4}. ■$$

例 C.2 $\log(1+x)$ の Maclaurin 展開

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (|x| < 1)$$

の収束半径は 1 であり、定理 3.8 より $x = 1$ で収束するので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \to 1} \log(1+x) = \log 2. ■$$

C.4 Tauber 型定理

(準備中)

C.5 Abel の総和法

(準備中)

D misc

D.1 Arctan の展開について

$f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ とおく。
$f^{(n)}(0)$ は以下のように求められる。

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

より

$$(1+x^2) f'(x) = 1.$$

Leibniz の定理を用いて、両辺を n 回微分すると、

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x^2)^{(k)}(f'(x))^{(n-k)}=0 \quad (n\geq 1).$$

$k\geq 3$ に対して $(1+x^2)^{(k)}=0$ であるから

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+n\cdot 2x\cdot f^{(n)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot f^{(n-1)}(x)=0 \quad (n\geq 1).$$

これを最高階導関数について解くと

(17) $$f^{(n+1)}(x)=\frac{-n}{1+x^2}\left[2xf^{(n)}(x)+(n-1)f^{(n-1)}(x)\right] \quad (n\geq 1).$$

こうして高階導関数に関する漸化式が得られたが、これを用いて n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ の具体形を求めるのは容易でない。ただし $x=0$ における高階微分係数を用いるのは簡単である。上式に $x=0$ を代入して

$$f^{(n+1)}(0)=-n(n-1)f^{(n-1)}(0) \quad (n\geq 1).$$

$f(0)=0,\ f'(0)=1$ より、

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & (n \text{ が偶数のとき})\\ (-1)^{k-1}(2k)! & (n \text{ が奇数 } 2k-1 \text{ のとき}).\end{cases}$$

複素函数論の知識があれば、f は 0 の周りで Taylor 展開可能であり、それが

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

であることが分かるが、大学一年次の微積分の知識だけではそれは無理である。

そこで Arctan 特有の議論をしなくてはならない。等比数列の和の公式から

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2}=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2} \quad (x^2\neq 1)$$

であるから、

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k+\frac{(-1)^2x^{2n}}{1+x^2}.$$

これから

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}x &= \int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-t^2)^k+\frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right)dt\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.\end{aligned}$$

右辺第二項を評価する。

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

$|x| \le 1$ であれば

$$\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \to 0 \quad (n\to\infty).$$

ゆえに $|x|\le 1$, $x^2 \ne 1$ であれば

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

この級数は収束円周上の 2 点 $x=\pm i$ (i は虚数単位) 以外では収束する級数である。

$M_n := \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|f^{(n)}(x)\right|$ とおき、$|x/(1+x^2)| \le 1/2$ に注意すると、(17) から

$$M_{n+1} \le nM_n + n(n-1)M_{n-1}.$$

一方、$M_0 = \pi/2$, $M_1 = 1$ であるから、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},\quad \max = 1,\quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\quad \max = \frac{3\sqrt{3}}{8},\quad f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},\quad \max = 2,\quad f^{(4)}$$

D.2　一般 2 項定理

定理 D.1 () $\alpha \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$ に対して、

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

ただし $(1+z)^\alpha$ は主値, $\binom{\alpha}{n}$ は一般 2 項係数である:

$$(1+z)^\alpha := \exp\left(\alpha \operatorname{Log}(1+z)\right) \quad (\operatorname{Log}\ は主値),$$

$$\binom{m}{n} := \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!} \quad (n\ge 1),\qquad \binom{m}{0} := 1.$$

D.3　Euler 定数

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right)$$

が存在する。これを Euler 定数と呼ぶ[13]。

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767234 88 \cdots.$$

(C で記す流儀もある。例えば杉浦 [?] がそうである。)

E　授業の記録

部屋は 5303 教室。

E.1　10/2

先週の休講について。
自己紹介。
2.4 等比級数まで。
等比級数の和を小テストとして出題した。

E.2　10/9

まず小テストの後始末をした。
この回はとにかく収束するか、発散するかがテーマ。
それから 2.5 をして、3.2, 3.3 のつまみ食い。目標はとにかく収束を保証する定理 3.23.3 の紹介である。
「絶対収束 $\Longrightarrow$ 収束」の証明は省略した。なんつーこった。それはどこかで Cauchy 列の話をしたときに。

E.3　10/16

ベキ級数の話。収束円の概念と収束半径の計算方法。
$\sum a_n$ と $\sum a_n x^n$ の収束判定法がまざってしまっている学生がちらほら。マズイ。

E.4　10/23

ベキ級数の話の 2 回目。「ベキ級数の微積分」。
まずは前回小テストの解答。
それから収束円周上での収束・発散。
ベキ級数の微分・積分については、まず例から。それから定理の紹介をした。
小テスト。わけが分からないという学生がかなりいて、授業の失敗を感じる。どこがまずかったか。
定理の証明は give up したが、$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ なども寝た子は起こさないのが正しいのか？

[13] Mathematica では、EulerGamma という名前の定数として使える。

E.5　10/30

級数の話最終回。

どうも前回の小テストの出来が悪かったので、まずベキ級数の微積分の例を補足。sin とか cos とか。

それから前回小テストの解答。収束半径は結構面倒だった、というかもっと以前にきちんとしておくべきところ。ここも sin, cos を使った。

今日のテーマは条件収束。まな板に載せるのはグレゴリーの級数。

Leibniz の定理は証明が見やすいのでやってみせる。中年の反復横飛び。

それから Abel の話。

少し気になるのだが、200 年も前の話をしていて嫌になる人はいないだろうか…適切な「余談」が必要かも知れない。

思い出すことが一つ。確か 3 年生のときに、複素函数論の演習書に由緒正しい数学者の名前のついた命題の証明をせよ、という問題がずらりと並んでいるのに泣き言を言った私に、今では演習問題レベルになってしまっているのだと断じた A 君。今となっては確かにそうだ。大学院に進学すればまがりなりにも現代数学の研究をしているのだ。つまり 1 年の勉強で時代を何十年、場合によっては百年以上駈けることが出来るわけだ。大学 1 年生くらいでへこたれる必要はない。

まあ、歴史については少しまとめておいて、一度学生に尋ねてみよう。

- 歴史を知った方が理解に役立つことがあると信じている。
- 歴史の順番に従って学んでいるわけではない。新しいことも学んでいる。
- 数学で一度発見された真理は永遠に真である。
- 2000 年以上も昔に発見されて、現在もなお重要かつ必要不可欠なものは多い。
- 自分が今習っていることが古い結果だと知ってもへこたれることはない。

Abel というのは、約 200 年前の人だが、彼の問題意識は高校生でも理解できるところが多く、紹介のしようによっては面白いのではないか。一方で、Abel のフーリェなどとのズレは興味深い。

小堀憲『大数学者』から Abel の他の数学者評

(1826 年 10 月 24 日付フルンボーへの手紙)
…この頃になってようやくのことで、ルジャンドル、コーシー、アシェント、セジェイ、およびプロシャ人のディリクレを知るようになりました。特にディリクレは僕をドイツ人と勘違いして尋ねてくれましたが、すばらしく頭の良い人です。…コーシーは「気違い」です。現代の数学をどのように取り扱うべきかを知っている数学者ではありますが、親しむことができません。業績は立派なものですが、書き方が明瞭ではありません。今でこそ読めますが、慣れないうちは、さっぱり理解できませんでした。…何といっても、今のフランスで純粋数学を本当にやっているのはこの人だけです。ポアソン、フーリェ、アンペールなどは物理学の方へ転向して、磁気だとか、電気だとか、物理学のことばかりやっています。ラプラスはもう何もやっていません。

溝畑茂『解析学小景』のはしがき

私は解析学を学びはじめたとき、グルサーの膨大な本に接して、すばらしいと思う反面、日暮れて道遠し[a]の感を持ったことがある。しかし、もしその時18世紀から19世紀にかけての解析学の発展の流れをある程度広く理解していたならば、それ程困ることはなかったのではないかと後日思うようになった。

本書はこれから解析学を学ぼうとしておられる方達の勉学の一助になればと念って、解析学の流れを形成する基本的事実を選んで説明を与えたものであるが、適切であったかどうかは読者の批判に委ねるしかないと思っている。

数学を専門にする読者のみならず、他の分野の自然科学、さらに工学の方達にも本書を楽しく読んで頂けることができれば幸甚と思っている。

1996年12月

溝畑 茂

[a]子胥、「史記」伍子胥列伝より。「人生の残された時間は少ないのにやらなければならないことは多い」という意味だとか。

あまった時間は級数の四則の話をした (前から狙っていた)。

まとめ

1. 級数とその収束・発散・和の定義: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ について、収束 $\Leftrightarrow \alpha > 1$. 特に境目の $\alpha = 1$ の場合の $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散。

3. 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ は $|r| < 1$ で収束して和は $\dfrac{1}{1-r}$, $|r| \geq 1$ で発散。

4. 絶対収束の定義と「絶対収束 $\Longrightarrow$ 収束」

5. 収束の判定法 (十分条件)
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq M\ (n \in \mathbf{N})$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束
   - $|a_n| \leq b_n\ (n \in \mathbf{N})$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 収束ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束

6. ベキ級数の定義

7. ベキ級数の収束円と収束半径
   任意のベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対して、$0 \leq R \leq \infty$ である R (収束半径) が定まり、
   $$|z| < R \quad\Longrightarrow\quad \text{絶対収束},\quad |z| > R \quad\Longrightarrow\quad \text{発散}.$$

8. ベキ級数の収束半径の計算方法
   例えば
   $$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{R}$$
   が定まれば (有限の極限値を持つか、∞ に発散するならば) R が収束半径になる。
   少し工夫すれば、$\displaystyle\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ の収束半径が ∞ であることが分かる。

9. ベキ級数の項別微分、項別積分定理
   ベキ級数 $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円の内部で項別微分、項別積分できる:
   $$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},\quad \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$
   特にベキ級数は収束円の内部で何回でも微分可能で、
   $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

10. 交代級数の収束

F 小テスト

F.1 第 1 回 10/2

次の (1), (2) に答えよ。余裕があれば (3) にも答えよ。

(1) 等比数列の和 $\sum_{k=0}^{n-1} r^k$ を求めよ (結果だけでなく途中経過も書け)。

(2) 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ の和を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$ を求めよ。

解答

付録 B「等比級数」に書いてある。

F.2 第 2 回 10/16

次のべき級数の収束半径を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$

解答

以下では収束半径を R と表わす。

(1) $a_n = n^3$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 1 = 1/R$$

より $R = 1$.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = 1 = 1/R$$

より $R = 1$.

(3) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 = 1/R$$

より $R = \infty$.

(4) $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ とおくと、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = \infty = 1/R$$

より $R = 0$. ■

F.3　第 3 回 10/23

$$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

であることを利用して、$\mathrm{Arctan}\, x$ をべき級数に展開し、その収束半径を求めよ。

ヒント $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)}$ であるから、等比級数の和の公式を使えば、$\dfrac{1}{1+x^2}$ をベキ級数で表わせる。

解答

$f(x) = \mathrm{Arctan}\, x$ とおくと、

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

項別積分定理から

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = 0 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

$f(x)$ のベキ級数展開の収束半径は $f'(x)$ のベキ級数展開の収束半径に等しいが、後者は公比 $(-x^2)$ の等比級数だから、収束 $\Leftrightarrow |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$. つまり収束半径は 1 である。■

G　演習問題

次の級数の和を求めよ。
(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ (6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\log\frac{1}{n}$
収束半径を求めよ。(1) $\sin x$ (2) $\cosh x$ (3) $\log(1+x)$

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$$

について、漸化式

$$x f_k'(x) = f(x)$$

が成り立つことを示せ。

H　遠山『数学入門』を読んで

2003 年度の授業で級数を終えてしばらくしてから、久しぶりに遠山 [2] を手にした。ぱらぱらめくっているうちに第 X 章「無限の算術 — 極限」という章を目にした。

ヤコブ・ベルヌーイ (1654–1705) の『無限級数論』に載っている六行詩の引用がある。

> 無限の級数が、たとえ限りなく見えようとも、
> 有限の和をもち、限界の前に身をかがめるように、
> いやしい物体のなかに、無限の神の影が宿り、
> かくも狭く限られながら、しかも限りなく増加する。
> 何という歓喜、測り知られぬもののなかに微小なるものを、
> また微小なるもののなかに、かの無限の神を観る。

無限の逆説について紹介があり、「その混乱は 1821 年になってコーシーがとどめをさすまで続いた。」

遠山先生の分析では、コーシーが無限級数の正しい理論をつくり上げられたのは、それ以前の数学者が見逃していた次の二つの点を見つけたからであるという。

1. 有限個の数を加えるときは、加える順序をいくら変えても答は変わらないが、この法則は無限個のたし算の場合には成り立たない。だから無限級数ははじめに並べたとおりに加えると定める。

2. 無限級数にいつでも和があるというのは迷信である (それまで和がないものに無理やり和を考えようとして混乱を生じていた)。数列の収束と発散という考えを持ち込んだ (例の ε-N 論法は Cauchy の発明らしい)。

なるほど。今勉強するときはまず真っ先に

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

と天下りに書き下してしまうが、歴史的にはここに至るまでが大変だったわけだ。

I　逆説

遠山 [2] で紹介されている話。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

2 項ずつまとめると

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots = \frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$$

これから値は 1/2 よりは大きくなると思われる (この推論は正しいし、実際の値は $\log 2 = 0.693147180559945309417232121\cdots$)。

しかし、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right) &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-2\Bigg(\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\right.\end{aligned}$$

これは一体どうしたことか。

チェコの哲学者ボルツァーノ (1781–1848) の『無限の逆説』の中の例。

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

最初から 2 項ずつまとめて

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0.$$

第 2 項目から 2 項ずつまとめて

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1.$$

和を x とおいて、

$$x=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-x \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2} \quad \text{(グランジ (1671–1742) の解).}$$

J 歴史についてのメモ

級数の理論の系譜は次のようなことになるか。

1. (参考まで) Sir Isaac Newton (1643–1727, 英国の Woolsthorpe に生まれ、ロンドンに没する)
2. (参考まで) Brook Taylor (1685–1731, 英国の Middlesex に生まれ、ロンドンにて没する)
3. (理論というよりも、とにかく結果を出しまくったという人だが、参考まで) Leonhard Euler (1707–1783, スイスの Basel に生まれ、ロシアの St Petersburg にて没する)
4. Augustin Louis Cauchy (1789–1859, フランスのパリに生まれ、パリ近郊の Sceaux にて没する)
   1821 年 "Cours d'analyse" (エコール・ポリテクニクの教科書)
   級数の和の定義, 数列の収束・発散の定義
5. Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー)
   ベキ級数の収束円, Abel の級数変形法, Abel の連続定理
6. (べき級数とは関係ないが参考まで) Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768–1830)
7. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897, Westphalia (now Germany) の Ostenfelde に生まれ、ベルリンにて没する)
   『連続関数の一様収束極限は連続』, Weierstrass の M test

今度学生達に級数の話をするときは、遠山先生の本を再読して準備することにしよう。

K　tan の Maclaurin 展開

参考文献

[1] 溝畑 茂, 解析学小景, 岩波書店 (1997).

[2] 遠山 啓, 数学入門 (上), (下), 岩波書店 (1960).