1変数の積分の計算

桂田 祐史

2004年7月13日
小修正 2006/12/30
http://www.math.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kiso3/sekibun.pdf

目 次

1 はじめに

この文書は 1 変数関数の不定積分の計算に関するメモである。

計算練習に関しては現時点 (2003 年) では[1]、高等学校の数学 III の教科書あるいは問題集が実際上最も勧められる参考書である。大学一年次の微積分までの範囲で、高校数学の問題集に載っていないことはあまりない (逆三角関数程度？)。

2 不定積分の公式

2.1 積分の線形性

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

[1]もうすぐ高校数学のカリキュラムが変るので、ここに述べていることは成立しなくなる可能性が高い。

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

2.2 置換積分

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \quad t = g(x).$$

2.3 部分積分

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

2.4 冪

$$\int x^\alpha\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & (\alpha \neq -1) \\ \log|x| + C & (\alpha = -1) \end{cases}$$

2.5 三角関数と指数関数

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

$a > 0$, $a \neq 1$ なる a に対して、

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

もっともこれを覚えるよりは、$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x\log a}$ という書き換えに慣れる方がよい。

2.6 双曲線関数

双曲線関数は e^x の有理式なので、後で述べるように必ず不定積分が出来るが、三角関数に類似した結果が得られる。

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C,$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = \coth x + C.$$

2.7 対数積分

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C.$$

特に

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C,$$

$$\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C.$$

2.8 $1/\sqrt{a^2-x^2}$

大学になってから習った新しい公式である (定積分の計算は高校数学でも出て来た)。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,x + C.$$

$a>0$ に対して

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

丸暗記よりも $x = a\sin\theta$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ という変数変換を覚えた方がよい。

2.9 $1/(x^2+a^2)$

これも大学になってから習った新しい公式である (定積分の計算は…同上)。

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{Arctan}\,x + C.$$

$a>0$ に対して

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

これも丸暗記よりも $x = a\tan\theta$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ という変数変換を覚えた方がよい。

2.10 $\sqrt{a^2 - x^2}$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

丸暗記はやや危険であろう。色々なやり方があり、どれも重要だが、覚え方としては、図形的な意味をつける 2.10.1 がお勧めである (要するに円がらみの図形の面積なので、定積分ならば高校数学レベルである)。

2.10.1 図形的に考える (おすすめ)

$$\begin{aligned}
\int_0^X \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \text{“}y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ と } x \text{ 軸}, x = 0, x = X \text{ で囲まれる部分の面積”} \\
&= \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{1}{2}X\sqrt{a^2 - X^2} \quad (\theta \text{ は扇形の中心角}) \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{X}{a}\right) + X\sqrt{a^2 - X^2}\right).
\end{aligned}$$

2.10.2 置換 $x = a\sin\theta$ による方法 (応用が効く)

$x = a\sin\theta$ $(\theta \in [-\pi/2, \pi/2])$ とおくと、

$$dx = a\cos\theta\,d\theta, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta = a^2\int \cos^2\theta\,d\theta = a^2\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \frac{a^2}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

2.10.3 部分積分による方法 (参考まで)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int (x)' \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)'dx \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}
\end{aligned}$$

より

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right) + C.$$

2.11　$1/\sqrt{x^2+k}$

$k \neq 0$ であるとき、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C.$$

($k>0$ のときは絶対値の記号は不要である。また $k<0$ であっても $x \geq \sqrt{|k|}$ のときは、やはり絶対値の記号は不要である。$k<0$ でかつ $x \leq -\sqrt{|k|}$ のときは絶対値の記号は省けない。)

この公式にはあまり親しみのない人が多いであろう。

もちろん、右辺を微分したら左辺の被積分関数になることを確認すれば証明できるわけだが、右辺がそれほど覚えやすい形ではないので、何か良い手はないかと考えるのは自然であろう。

筆者は一応高校の数学の授業で ($t-x=\sqrt{x^2+k}$ と置く導出法を) 習ったが、覚えづらくて閉口した覚えがある。k の符号に応じて、$k=a^2$ の場合には $x=a\tan t$, $k=-a^2$ の場合には $x=a/\sin t$ という置換もあり、これはかなり一般性があるものの、それほど簡単にはならず、決定打とは言いづらい。

Mathematica などを使うと、$k>0$ の場合に結果が逆双曲線関数 $\sinh^{-1} = \mathrm{ArcSinh}[]$ で表示される。確かに双曲線関数を用いて置換するというやり方はあるが、それほど簡単とは言えないと思う。

k を 0 でない実定数、a を正定数として

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}, \quad I_p = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}, \quad I_m = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

とおく。

I_p, I_m は後述するように逆双曲線関数を用いて結果を表すこともできる (特に勧めない)。

2.11.1　双曲線関数による置換積分を用いる

(逆双曲線関数については、B を参照せよ。)

I_p の場合　$x=a\sinh t$ とおくと、

$$dx = a\cosh t\,dt, \quad \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)} = \sqrt{a^2\cosh^2 t} = a\cosh t$$

であるから、

$$\begin{aligned} I_p &= \int \frac{a\cosh t}{a\cosh t}dt = \int dt = t + C = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C = \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right| + C \\ &= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \log a + C = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C'. \end{aligned}$$

この I_p については、逆双曲線関数を使った

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

の形で覚えておいても良いかもしれない。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

と並べると面白い。

I_m **の場合**　$x^2-a^2\geq 0$ であるためには、$x\geq a$ または $x\leq -a$ である必要がある。
　$x\geq a$ のとき、$x=a\cosh t$ $(t\geq 0)$ とおくと、$(a\sinh t\geq 0$ に注意して$)$

$$dx=a\sinh t\,dt,\quad \sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\cosh^2 t-1)}=\sqrt{a^2\sinh^2 t}=a\sinh t$$

であるから、

$$\begin{aligned}I_m&=\int\frac{a\sinh t}{a\sinh t}dt=\int dt=t+C=\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C\\&=\log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C\\&=\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)-\log a+C=\log\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C'.\end{aligned}$$

　$x\leq -a$ のときは $x=-a\cosh t$ $(t\geq 0)$ とおいて、

$$dx=-a\sinh t,\quad \sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$$

であるから

$$\begin{aligned}I_m&=\int\frac{-a\sinh t}{a\sinh t}dt=-t+C=-\cosh^{-1}\left(\frac{-x}{a}\right)+C\\&=-\log\left(\frac{-x}{a}+\sqrt{\left(\frac{-x}{a}\right)^2-1}\right)+C\\&=-\log\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+\log a+C\\&=\log\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^{-1}+\log a+C\\&=\log\frac{-\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{a^2}+\log a+C\\&=\log\left[-\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]-\log a+C\\&=\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+C.\end{aligned}$$

　結果を $\cosh^{-1}$ で書きたければ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\operatorname{sign}x\cdot\cosh^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right)=\begin{cases}\cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) & (x>a)\\ -\cosh^{-1}\left(\dfrac{-x}{a}\right) & (x<-a).\end{cases}$$

2.11.2　三角関数による置換積分を用いる (参考 — だたし定積分向き？)

I_p **の場合**　$x=a\tan t$ とおくと、

$$dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,\quad \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}=\frac{a}{\cos t}$$

であるから

$$I_p\ =\ \int\frac{\cos t}{a}\frac{a}{\cos^2 t}\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}\,dt.$$

$u = \sin t$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
I_p &= \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} + C = \log\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| + C = \log\left|\tan t + \sqrt{\tan^2 t + 1}\right| + C \\
&= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| - \log a + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C'.
\end{aligned}
$$

I_m **の場合**　$x = \dfrac{a}{\sin t}$ とおくと、

$$
dx = \frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)} = a\frac{\cos t}{\sin t}
$$

であるから

$$
I_m = \int \frac{\sin t}{a\cos t}\cdot\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt = -\int\frac{dt}{\sin t} = \int\frac{-\sin t}{1-\cos^2 t}\,dt.
$$

$u = \cos t$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
I_p &= \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u} + C \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{(1+\cos t)^2}{\sin^2 t} + C = \log\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C = \log\left|\cot t + \frac{1}{\sin t}\right| + C \\
&= \log\left|\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x}{a}\right| + C = \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| - \log a + C = \log\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C'.
\end{aligned}
$$

2.11.3　置換 $t - x = \sqrt{x^2+k}$ (すすめられる？)

(高等学校の授業で習った — よくこんなのを教えてくれたものだと思う。)

$$
t - x = \sqrt{x^2+k}
$$

とおくと、

$$
\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{x+\sqrt{x^2+k}}{\sqrt{x^2+k}} = \frac{t}{\sqrt{x^2+k}}
$$

であるから

$$
\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}.
$$

ゆえに

$$
I = \int\frac{dt}{t} = \log t + C = \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C.
$$

2.11.4　この公式とどう付き合うか

色々悩んだ結果、私の結論は「覚える。ただし危ないので使う前に検算する。」というものである。つまり

$$
\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\;\right|
$$

を覚え、使う際は右辺を微分して左辺になることをチェックする、ということである。

2.12 $\sqrt{x^2+k}$

$k \neq 0$ のとき、

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right).$$

これまた面倒である。$1/\sqrt{x^2+k}$ の積分と同様、色々なやり方があるが、簡単な方法はない(少なくとも知らない)。

試験対策としては[2]、部分積分を用いて $1/\sqrt{x^2+k}$ に帰着させ、$1/\sqrt{x^2+k}$ の積分は覚える、というのが良さそうである。

k を 0 でない実定数、a を正定数として

$$I = \int \sqrt{x^2+k}\,dx, \quad I_p = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx, \quad I_m = \int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

とおく。

2.12.1 部分積分で $1/\sqrt{x^2+k}$ の積分に帰着 (おすすめ)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{x^2+k}\,dx = \int (x)' \cdot \sqrt{x^2+k}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int x \cdot \left(\sqrt{x^2+k}\right)'\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+k} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} \\
&= x\sqrt{x^2+k} - I + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}
\end{aligned}$$

より

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right) + C.$$

2.12.2 双曲線関数で置換積分 (参考)

I_p の場合　$x = a\sinh t$ とおくと (既に見たように)

$$dx = a\cosh t\,dt, \quad \sqrt{x^2+a^2} = a\cosh t$$

[2] 記憶術みたいなものは、数学の授業で教えるものではないという人もいるであろうが、大きな知識の体系とどうつきあうかということも大事である。実際的には「コンピューターとお友だちになる」ことで対処するのが良いと思うが、自分の身体だけで何とかするというのならば、どこまで式を覚えて、どこから手で導出するか事前に考えておく態度は重要である。

であるから、

$$\begin{aligned}
I_p &= a^2\int \cosh^2 dt = a^2\int \frac{\cosh 2t+1}{2}dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sinh 2t\right)+C = \frac{a^2}{2}(t+\sinh t\cosh t)+C = \frac{a^2}{2}\left(t+\sinh t\sqrt{\sinh^2 t+1}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right|+x\sqrt{x^2+a^2}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)-\frac{a^2}{2}\log a+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)+C'.
\end{aligned}$$

I_m **の場合**　$x=a\cosh t$ とおくと (既に見たように)

$$dx = a\sinh t\,dt, \quad \sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$$

であるから、

$$\begin{aligned}
I_m &= a^2\int \sinh^2 t\,dt = a^2\int \frac{\cosh 2t-1}{2}\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2t-t\right)+C = \frac{a^2}{2}(\sinh t\cosh t-t)+C = \frac{a^2}{2}\left(\cosh t\sqrt{\cosh^2 t-1}-t\right)+C \\
&= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)+\frac{a^2}{2}\log a+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right)+C'.
\end{aligned}$$

2.12.3　三角関数で置換積分 (参考)

I_p **の場合**　$x=a\tan t$ とおくと、

$$dx=\frac{a}{\cos^2 t}\,dt, \quad \sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}=\frac{a}{\cos t}$$

であるから、

$$I_p = \int \frac{a}{\cos t}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}\,dt = a^2\int\frac{dt}{\cos^3 t} = a^2\int\frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}dt.$$

$u=\sin t$ とおくと、

$$\begin{aligned}
I_p &= a^2\int\frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{a^2}{4}\int\left(\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)du \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{-1}{u-1}+\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{-1}{u+1}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{2u}{1-u^2}+\log\frac{(1+u)^2}{1-u^2}\right)+C.
\end{aligned}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\frac{2u}{1-u^2} &= \frac{2\sin t}{\cos^2 t} = 2\tan t\sqrt{\tan^2 t+1} = 2\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}, \\
\log\frac{(1+u)^2}{1-u^2} &= \log\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t} = 2\log\frac{1+\sin t}{\cos t} = 2\log\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| \\
&= 2\log\left|\tan t+\sqrt{\tan^2 t+1}\right| = 2\log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right| \\
&= 2\left(\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \log|a|\right)
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
I_p = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)+C'.
$$

I_m の場合　$x=\dfrac{a}{\sin t}$ とおくと

$$
dx = -\frac{a\cos t}{\sin^2}dt, \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t}
$$

であるから、

$$
I_m = \int\frac{a\cos t}{\sin t}\cdot\frac{-a\cos t}{\sin^2 t}dt = -a^2\int\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt = a^2\int\frac{\cos^2 t}{(1-\cos^2 t)^2}(-\sin t)dt.
$$

$\cos t = u$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
I_m &= a^2\int\frac{u^2}{(1-u^2)^2}du \\
&= \frac{a^2}{4}\int\left(\frac{1}{(u+1)^2}+\frac{-1}{u+1}+\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}\right)du \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{-1}{u+1}-\log(u+1)+\log(u-1)+\frac{-1}{u-1}\right)+C \\
&= \frac{a^2}{4}\left(\frac{2u}{1-u^2}+\log\frac{1-u}{1+u}\right)+C
\end{aligned}
$$

2.12.4　置換 $t-x=\sqrt{x^2+k}$ (参考)

　$t-x=\sqrt{x^2+k}$ とおくと、$t^2-2tx+x^2=x^2+k$ であるから、x について解いて、

$$
x = \frac{t^2-k}{2t} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{t}\right).
$$

ゆえに

$$
dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{t^2}\right)dt = \frac{t^2+k}{2t^2}dt.
$$

一方で、

$$
\sqrt{x^2+k} = t-x = t-\frac{t^2-k}{2t} = \frac{t^2+k}{2t}
$$

となるから、

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{t^2+k}{2t}\cdot\frac{t^2+k}{2t^2}dt = \int \frac{(t^2+k)^2}{4t^3}dt = \frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2k}{t}+\frac{k^2}{t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}+2k\log|t|-\frac{k^2}{2t^2}\right)+C \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{t^4-k^2}{2t^2}+2k\log|t|\right)+C = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+k}{2t}\cdot\frac{t^2-k}{2t}+k\log|t|\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k}+k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right)+C.
\end{aligned}
$$

2.12.5　応用 — 放物線の弧長

$y=x^2$ の $x=a$ から $x=b$ までの弧長

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_a^b \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right)\right]_a^b = \left[x\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right]_a^b+\frac{1}{4}\left[\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right|\right]_a^b
\end{aligned}
$$

3　練習帳

3.1　x^α の積分

$f(x)=\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ の形をしているもの。

$$
\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad \int (x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{4}})dx,\quad \int \frac{1+2x^2+3x^3}{x^2}\,dx
$$

など。

3.2　変数変換 (置換積分)

3.2.1　総論

$$
I = \int g(f(x))f'(x)\,dx
$$

という形になっていれば $u=f(x)$ とおくことで、

$$
I = \int g(u)\,du
$$

となる。

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ のとき $f'(x)=2ax+b$ より $(2ax+b)\,dx=du$. 特に

$$
\int g(x^2+c)x\,dx = \int g(u)\frac{u}{2}\,du,\quad u=x^2+c.
$$

(2) $f(x) = \sin x$ のとき $f'(x) = \cos x$ より $\cos x\,dx = du$.

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx = \int g(u)\,du, \quad u = \sin x.$$

同様に

$$\int g(\cos x)\sin x\,dx = -\int g(u)\,du, \quad u = \cos x.$$

(3) $f(x) = \log x$ のとき $f'(x) = 1/x$ より $\dfrac{dx}{x} = du$.

$$\int \frac{g(\log x)}{x}\,dx = \int g(u)\,du, \quad u = \log x.$$

3.2.2 例

例 3.1

$$I = \int (2x+3)^5\,dx$$

$u = 2x+3$ とおくと $du = 2dx$ より $dx = \dfrac{du}{2}$ だから、

$$I = \int u^5 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^6}{6} + C = \frac{(2x+3)^6}{12} + C.$$

例 3.2

$$I = \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

$u = x^2+1$ とおくと $du = 2x\,dx$ だから $x\,dx = \dfrac{du}{2}$ なので、

$$I = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{2} + C = \frac{-u^{-1}}{2} + C = \frac{-1}{2(x^2+1)} + C.$$

例 3.3

$$I = \int x^2\sqrt{2x+1}\,dx.$$

$u = 2x+1$ とおくと $du = 2dx$, $x = \dfrac{u-1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{u-1}{2}\right)^2 \cdot u^{1/2}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int (u-1)^2 u^{1/2}\,du \\
&= \frac{1}{8}\int \left(u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2}\right) du \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C = \frac{1}{28}u^{7/2} - \frac{1}{10}u^{5/2} + \frac{1}{12}u^{3/2} + C.
\end{aligned}$$

あるいは $u = \sqrt{2x+1}$ とおくと、$x = (u^2-1)/2$ で $dx = u\,du$

$$I = \int \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 u\cdot u\,du = \frac{1}{4}\int (u^6 - 2u^4 + u^2)du = \cdots$$

例 3.4

$$I = \int \sin^3 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx.$$

$u = \cos x$ とおくと、$du = -\sin x\, dx$ であるから、

$$I = \int (1-u^2)(-du) = \int (u^2-1)\, du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

例 3.5

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{(\sin x)'}{1-\sin^2 x}\, dx = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.\end{aligned}$$

例 3.6 $u = \log x$ とおくと $du = \frac{1}{x}\, dx$ より

$$\int \frac{(\log x)^3}{x}\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\log x)^4}{4} + C.$$

同様に $\displaystyle\int \frac{\sin(\log x)}{x}\, dx$ なども積分できる。

例 3.7

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$$

となるので $x - 1 = 2\sin\theta$ とおくと

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta, \quad \sqrt{4-(x-1)^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = 2\cos\theta$$

であるから、

$$I = \int d\theta = \theta + C = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.$$

3.3 部分積分

“多項式 $\times$ 指数関数または sin, cos” というタイプは、部分積分をすることで多項式を消去することができる。

例 3.8

$$\int xe^x\, dx = \int (e^x)' x\, dx = e^x x - \int e^x \cdot 1\, dx = e^x x - e^x + C.$$

例 3.9

$$\int x\sin x\, dx = \int (-\cos x)' \cdot x\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

例 3.10

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\, dx &= \int x^2 \cdot (\sin x)'\, dx = x^2\sin x - \int 2x\cdot\sin x\, |dx = x^2\sin x - 2\int x(-\cos x)'\, dx \\ &= x^2\sin x + 2\left(x\cos x - \int 1\cdot\cos x\, dx\right) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.\end{aligned}$$

多項式 $\times \log x$ の場合は、$\log x$ の方を消すとうまく行く。

例 3.11

$$\int x\log x\,dx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C.$$

この特別な場合が、有名な $\log x$ の積分である:

例 3.12

$$\int\log x\,dx=\int(x)'\cdot\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\log x-x+C.$$

同様にして $\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx$, $\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx$ などが計算できる。

さて、指数関数 $\times \sin x$ (または $\cos x$) は二回部分積分すると自分自身が現われて解けるのであった。

例 3.13

$$\begin{aligned}
I &= \int e^x\sin x\,dx=\int(e^x)'\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx\\
&= e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx\\
&= e^x\sin x-e^x\cos x-I
\end{aligned}$$

より

$$I=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C.$$

別解として、

$$\begin{aligned}
\int e^x(\cos x+i\sin x)\,dx &= \int e^{(1+i)x}dx=\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}+C=\frac{1-i}{2}e^x(\cos x+i\sin x)+C\\
&= \frac{e^x}{2}(1-i)(\cos x+i\sin x)+C=\frac{e^x}{2}\left[\cos x+\sin x+(-\cos x+\sin x)i\right]+C
\end{aligned}$$

の虚数部分を取って、

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C'.$$

似たようなタイプとして次のものも重要である。

例 3.14

$$\begin{aligned}
I &= \int\sqrt{x^2+k}\,dx=\int(x)'\cdot\sqrt{x^2+k}\,dx=x\sqrt{x^2+k}-\int x\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}\,dx\\
&= x\sqrt{x^2+k}-\int\frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx=x\sqrt{x^2+k}-\int\sqrt{x^2+k}+k\int\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}\,dx
\end{aligned}$$

より

$$I=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+k}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\right)+C.$$

練習用の類題として

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

がある。

部分積分で漸化式を得るという問題もある。

例 3.15

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta \quad (n \in \mathbf{Z},\, n \geq 0)$$

とするとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} (-\cos\theta)' \sin^{n-1}\theta\, d\theta = -\left[\cos\theta \sin^{n-1}\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot (n-1)\sin^{n-2}\theta \cos\theta\, d\theta \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta\, d\theta = (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta\, d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

より

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

ゆえに

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

一方

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$$

であるから、

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \cdots = \frac{2k\cdot(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)\cdot(2k-a)\cdots 3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}.$$

類題として (広義積分となってしまうが)、

$$I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$$

また

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$$

は理論上も重要である。これについては、命題 4.2 を見よ。

4 有理関数の積分

4.1 有理関数の不定積分は初等関数で表わせる — Leibniz の定理

Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716) は 1702, 1703 年に発表した 2 編の論文で、有理関数の積分が初等関数になることを示した。もっとも実係数多項式が 1 次, 2 次因子の積に分解されるという定理 (代数学の基本定理) の証明はもっと後 (1799, Gauss) である。

定理 4.1 (有理関数の不定積分) 有理関数の不定積分は有理関数と対数関数、Arctan で表わされる。

4.2 定理 4.1 の証明

有理式

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

があるとき、まず分子 $g(x)$ を分母 $f(x)$ で割った商と余りをそれぞれ $q(x)$, $r(x)$ とする。つまり

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x) \quad \text{または} \quad r(x) = 0.$$

すると

$$R(x) = \frac{q(x)f(x) + r(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}.$$

ゆえに

$$\int R(x)\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{f(x)}\,dx.$$

$q(x)$ は多項式なのでその積分は容易に実行できる。そこで以下は、「分子の次数 $<$ 分母の次数」となる有理式 $\dfrac{r(x)}{f(x)}$ の計算を考える。

次の小節で説明する部分分数への分解 (部分分数展開) を用いれば、

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} \quad (a \text{ は実数の定数}, n \text{ は自然数})$$

と

$$\int \frac{x \text{ の 1 次式}}{p(x)^n} dx \quad (p(x) \text{ は実数の範囲では因数分解できない 2 次式}, n \text{ は自然数})$$

を求めることに帰着できる。このうち前者は簡単で、

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & (n > 1) \\ \log|x-a| & (n = 1). \end{cases}$$

後者については、

$$p(x) = a\,(x - (\alpha + i\beta))\,(x - (\alpha - i\beta)) \quad (a,\ \alpha,\ \beta \text{ は実数で、} a\beta \neq 0,\ i \text{ は虚数単位})$$

と書けるので、

$$p(x) = a\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)$$

となるから、$x - \alpha = u$ と置換することによって、

$$\int \frac{u \text{ の 1 次式}}{(u^2 + \beta^2)^n}\,du$$

に帰着される。この積分は次に掲げる漸化式を用いて計算できる。

命題 4.2 (1) b を実数, n を自然数とするとき、

$$\int \frac{x}{(x^2+b^2)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}} & (n>1) \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+b^2) & (n=1). \end{cases}$$

(2) b を 0 でない実数とするとき、

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+b^2)^n}\,dx \quad (n \text{ は自然数})$$

とおくと、

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{x}{(2n-2)(x^2+b^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right) & (n>1) \\ \dfrac{1}{b}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{b}\right) & (n=1). \end{cases}$$

証明

(1) $u = x^2+b^2$ と置換すれば簡単に示せる。

(2) $n=1$ のときは明らかである ($x = b\tan\theta$ と置換せよ)。$n>1$ のときは、I_{n-1} に対して「良く出てくる」部分積分計算を行って

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int (x^2+b^2)^{1-n}\,dx = \int (x)'\cdot(x^2+b^2)^{1-n}\,dx \\ &= x(x^2+b^2)^{1-n} - \int x\cdot(1-n)(x^2+b^2)^{-n}(2x)\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+b^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{x^2+b^2-b^2}{(x^2+b^2)^n}\,dx \\ &= \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + 2(n-1)(I_{n-1}-b^2 I_n). \end{aligned}$$

移項して

$$2(n-1)b^2 I_n = \frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}.$$

ゆえに

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)b^2}\left(\frac{x}{(x^2+b^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right). \blacksquare$$

4.3 部分分数への分解

4.3.1 方針

$R(x)$ を分子の次数が分母の次数より小さい有理式 (以下、便宜的に真分数式と呼ぶことにする) とする:

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad \deg g(x) < \deg f(x).$$

部分分数への分解の定理を示して、その証明を与えることは実は簡単であるが、初めて学ぶ場合には定理の理解そのものが結構難しいので、ここでは順を追って (決して最短というわけではない) 説明する。

4.3.2 分母の因数分解

分母 $f(x)$ の因数分解が問題になるが、多項式の因数分解については、まず次が基本的である。

代数学の基本定理 (ダランベール、ガウス)

複素数係数の n 次多項式 $f(x)$ は n 個の複素数の根を持つ。すなわち

$$f(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \quad (A,\, \alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots,\, \alpha_n \text{ は複素数})$$

と 1 次式の積として表わせる。

(少なくとも一つの根 α_1 を持つことが分かれば、因数定理から $f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x)$ と書けることが分かり、後は帰納法で簡単である。少なくとも一つの根を持つことの証明はそれなりに難しく、ここでは省略する。複素函数論 (関数論、複素解析) の本に載っていることが多い。)

「根とは」　a が多項式 $f(x)$ の根であるとは、$f(x)$ が $x-a$ で割り切れることをいう。a が方程式 $f(x)=0$ の解であるとは、$f(a)=0$ が成り立つことをいう。因数定理により、この二つの条件は同値である。現在の高校数学では (多項式の) 「根 (root)」という言葉を習わず、方程式の「解」だけで済ませるらしい。両者は本当は異なる概念で、少なくともニュアンスは違うもので、「重解」は気持ち悪いという数学者が多いと思う。

細かいことであるが、$f(x)$ を 1 次式の積に分解する仕方は一通りである。

$f(x)$ の根 a がちょうど m 次の重根であるとは、

$$f(x) = (x-a)^m g(x), \quad g(x) \text{ は } x-a \text{ で割れない多項式}$$

となることであるが、次のような導関数を用いた判定法がある。

重根の重複度の判定

a が $f(x)$ の (ちょうど) m 重根 $\Leftrightarrow$ $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0$ かつ $f^{(m)}(a) \neq 0$.

さて、$f(x)$ が実係数多項式であるとき、$f(x)$ の実数の範囲での因数分解を考えよう。

実係数多項式に関しては次が重要である。

実係数多項式の根

虚数 $a = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ が実係数多項式 $f(x)$ の根であるとき、共役複素数 $\overline{a} = \alpha - i\beta$ も $f(x)$ の根である。さらに a と $\overline{a}$ の重複度は等しい。

($\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ より、$f(x)$ が実係数多項式であれば、任意の複素数 a に対して $\overline{f}(a) = f(\overline{a})$ となることが分かるので、a が $f(x)$ の根であれば、$\overline{a}$ も $f(x)$ の根であることが分かる。)

実係数多項式 $f(x)$ が虚根 $a = \alpha + i\beta$ を持ち、その重複度を m とするとき、$\overline{a} = \alpha - i\beta$ も重複度 m の根であるから、$f(x)$ は

$$\begin{aligned}(x-a)^m (x-\overline{a})^m &= [(x-(\alpha+i\beta))^m]\,[(x-(\alpha-i\beta))^m] = [(x-(\alpha+i\beta))\,(x-(\alpha-i\beta))]^m \\ &= \{[(x-\alpha)+i\beta]\,[(x-\alpha)-i\beta]\}^m = \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^m\end{aligned}$$

で割り切れることになる。

命題 4.3 (実係数多項式の実数の範囲での因数分解) $f(x)$ を n 次実係数多項式とする。$f(x)$ の相異なる根を $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ a_{k+1},\ \overline{a_{k+1}},\ a_{k+2},\ \overline{a_{k+2}},\ \cdots,\ a_\ell,\ \overline{a_\ell}$, ただし $a_j \in \mathbf{R}$ $(j=1,2,\cdots,k)$, $a_j \notin \mathbf{R}$ $(j=k+1,k+2,\cdots,\ell)$ とおき、a_j の重複度を m_j, $a_j=\alpha_j+i\beta_j$ $(\alpha_j,\ \beta_j \in \mathbf{R})$ と書くとき、次式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(1)\, f(x) &= a(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k} \\
&\quad \times\left[(x-\alpha_{k+1})^2+\beta_{k+1}^2\right]^{m_{k+1}}\left[(x-\alpha_{k+2})^2+\beta_{k+2}^2\right]^{m_{k+2}}\cdots\left[(x-\alpha_\ell)^2+\beta_\ell^2\right]^{m_\ell}.
\end{aligned}
$$

証明

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_k)^{m_k} \\
&\quad \times(x-(\alpha_{k+1}+i\beta_{k+1}))^{m_{k+1}}(x-(\alpha_{k+1}-i\beta_{k+1}))^{m_{k+1}} \\
&\quad \times(x-(\alpha_{k+2}+i\beta_{k+2}))^{m_{k+2}}(x-(\alpha_{k+2}-i\beta_{k+2}))^{m_{k+2}} \\
&\quad \times\cdots\times(x-(\alpha_\ell+i\beta_\ell))^{m_\ell}(x-(\alpha_\ell-i\beta_\ell))^{m_\ell}
\end{aligned}
$$

と書けることから分かる。■

記号 $\prod$ を用いれば (1) は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j}\prod_{j=k+1}^{\ell}\left[x-(\alpha_j+i\beta_j)\right]^{m_j}\left[x-(\alpha_j-i\beta_j)\right]^{m_j} \\
&= a\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j}\prod_{j=k+1}^{\ell}\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^{m_j}
\end{aligned}
$$

とコンパクトに書ける。

4.3.3 互いに素な分母を持つ分数式への分解

筆者は次が最も重要な鍵であると考えている。

互いに素な分母を持つ分数式への分解

有理式 $R(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ の分母 $f(x)$ が $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ ($f_1(x)$ と $f_2(x)$ は互いに素) と因数分解できるとき、

$$
R(x)=\frac{g(x)}{f_1(x)f_2(x)}=\frac{g_1(x)}{f_1(x)}+\frac{g_2(x)}{f_2(x)}\quad (g_1(x),\ g_2(x)\ \text{は多項式})
$$

と分解できる。$\deg g(x)<\deg f(x)$ であるとき、$\deg g_1(x)<\deg f_1(x)$ かつ $\deg g_2(x)<\deg f_2(x)$ となるように $g_1(x)$, $g_2(x)$ が取れる。(ただし多項式が 0 であるとき、その次数は $-\infty$ と考えることにする。)

この命題は多くの問題に応用され非常に重要であるが、ここでは証明を省略する (桂田 [?] を見よ)。

これから、$f(x)$ が (1) のように因数分解されるとき、

$$
f(x)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(m_j-1\ \text{次以下の多項式})}{(x-a_j)^{m_j}}+\sum_{j=k+1}^{\ell}\frac{(2m_j-1\ \text{次以下の多項式})}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right])^{m_j}}
$$

と分解されることが分かる。

4.3.4 多項式の $(x-a)$ のベキへの展開

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^m}, \quad P(x) \text{ は } m-1 \text{ 次以下の多項式}$$

に対して、分子 $P(x)$ を $(x-a)$ のベキに展開する、つまり

$$P(x) = c_1(x-a)^{m-1} + c_2(x-a)^{m-2} + \cdots + c_{m-1}(x-a) + c_m \quad (c_1, \cdots, c_m \text{ は定数}) \tag{2}$$

とできれば、

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{c_1(x-a)^{m-1} + c_2(x-a)^{m-2} + \cdots + c_{m-1}(x-a) + c_m}{(x-a)^m} \\ &= \frac{c_1}{x-a} + \frac{c_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{(x-a)^m} \end{aligned}$$

と分解できる。

$\{c_j\}_{j=1}^m$ の求め方には二通りある。

(1) (次数の低い項の係数から求める) $Q_m(x) = P(x)$ とおき、$i = m,\ m-1,\ \cdots,\ 1$ の順に $Q_i(x)$ を $x-a$ で割った商を $Q_{i-1}(x)$, 余りを c_i とおくと、$\{c_j\}_{j=1}^m$ が求まる。

(2) (次数の高い項の係数から求める) $P_1(x) = P(x)$ とおき、$i = 1, \cdots, m$ の順に $P_i(x)$ の最高次の係数を c_i とし、$P_i(x) - c_i(x-a)^{m-i}$ を $P_{i+1}(x)$ とする。

4.3.5 多項式の 2 次式の「ベキ」への展開

$$R(x) = \frac{P(x)}{p(x)^m}, \quad p(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2, \quad P(x) \text{ は } 2m-1 \text{ 次以下の多項式}$$

があるとしよう。1 次式 $(x-a)$ のベキへの展開の真似をして、$Q_m(x) = P(x)$ とおき、$i = m$, $m-1, \cdots, 1$ の順に $Q_i(x)$ を $p(x)$ で割った商を $Q_{i-1}(x)$, 余りを (1 次以下の式なので) $c_i x + d_i$ とおこう。

$$\begin{aligned} R(x) &= Q_m(x) = Q_{m-1}(x)p(x) + (c_m x + d_m), \\ Q_{m-1}(x) &= Q_{m-2}(x)p(x) + (c_{m-1}x + d_{m-2}), \\ &\vdots \\ Q_i(x) &= Q_{i-1}(x)p(x) + (c_i x + d_i), \\ &\vdots \\ Q_2(x) &= Q_1(a)p(x) + (c_2 x + d_2), \\ Q_1(x) &= c_1 x + d_1 \end{aligned}$$

となる ($Q_i(x)$ は $2i-1$ 次以下の式なので、$Q_1(x)$ までで反復は止る)。

$$P(x) = (c_1x + d_1)p(x)^{m-1} + (c_2x + d_2)p(x)^{m-2} + \cdots + (c_{m-1}x + d_{m-1})p(x) + (c_m x + d_m)$$

となるから、

$$R(x) = \frac{c_1x + d_1}{p(x)} + \frac{c_2x + d_2}{p(x)^2} + \cdots + \frac{c_m x + d_m}{p(x)^m} \tag{3}$$

4.3.6 まとめ

命題 4.4 $f(x)$ が (1) のように因数分解されるとき、$R(x)$ は次のように書ける。

$$R(x)=\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{b_{j,m}}{(x-a_j)^m}+\sum_{j=k+1}^{\ell}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{c_{j,m}x+d_{j,m}}{\left[(x-\alpha_j)^2+\beta_j^2\right]^m}\quad (b_{j,m},\ c_{j,m},\ d_{j,m}\ \text{は適当な定数}).$$

この命題の直接的・初等的な証明が杉浦 [1] に載っている。

4.4 定理 4.1 の系

色々な積分が有理関数の積分に帰着できるので、初等関数で積分可能であることが分かる。以下 $R(x)$ や $R(x,y)$ は有理式とする。

4.4.1 $R(e^x)$ の積分

$$I=\int R(e^x)\,dx$$

に対して、$u=e^x$ とおくと、$du=e^x dx$ より $dx=du/u$ だから

$$I=\int\frac{R(u)}{u}\,du.$$

これは有理関数の積分であるから、初等関数で表わせる。

4.4.2 $R(x,\sqrt{ax+b})$ の積分

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax+b}\right)\,dx$$

に対して、$u=\sqrt{ax+b}$ とおくと、$u^2=ax+b$ であるから、

$$x=\frac{u^2-b}{a},\quad dx=2udu$$

となり、

$$I=2\int R\left(\frac{u^2-b}{a},u\right)u\,du.$$

これも有理関数の積分であるから、初等関数で表わせる。

4.4.3 三角関数の有理関数

さて、

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

とおくと、倍角の公式から

$$\begin{aligned}\cos x&=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ \sin x&=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

また
$$dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)dx$$
より
$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$
(あるいは $x = 2\,\mathrm{Arctan}\,t$ の微分から求めることもできる。)

系 4.5 (三角関数の有理式の積分) $R(X,Y)$ が X, Y の有理式であるとき、
$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$
ゆえに三角関数の有理式 $R(\cos x, \sin x)$ の不定積分は有理関数の不定積分に帰着され、$t = \tan(x/2)$ の有理関数、対数関数、Arctan で表わされる。

4.4.4 2 次無理関数

系 4.6 (2 次無理関数) $R(X,Y)$ が実有理式であるとき、
$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$
は有理関数の積分に帰着できる。

証明 ax^2+bx+c を平方完成してから変数の 1 次変換を行うことで、$\sqrt{ax^2+bx+c}$ は次の 3 つのうちのいずれか一つになる。

(1) $r = \sqrt{a^2x-x^2}$. $x = a\sin\theta$ $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ とおく。$r = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = a\cos\theta$, $dx = a\cos\theta\,d\theta$ となる。

(2) $r = \sqrt{x^2-a^2}$. $x \geq a$ の場合は $x = a/\cos\theta$ $(0 \leq \theta < \pi/2)$ とおく。$r = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\tan\theta$, $dx = \dfrac{a\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$ となる。

(3) $r = \sqrt{x^2+a^2}$. $x = a\tan\theta\,(-\pi/2 < x < \pi/2)$ とおく。$r = \sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{a^2/\cos^2\theta} = a/\cos\theta$, $dx = \dfrac{a\,d\theta}{\cos^2\theta}$.

これから三角関数の有理式の不定積分に帰着できる。系 4.5 から有理関数の不定積分に帰着できる。■

4.5 具体例

例 4.7
$$I = \int \frac{dx}{x^2-1}.$$
部分分数への分解は
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

となる。

$$I = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\log|x-1| - \log|x+1|\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.\blacksquare$$

例 4.8

$$I = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx.$$

分子を分母で割って、

$$x^4 = x(x^3-3x+2) + 3x^2 - 2x$$

が得られるから、

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(x^3-3x+2)+3x^2-2x}{(x^3-3x+2)}\,dx = \int\left(x + \frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + J, \\ J &:= \int \frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}\,dx. \end{aligned}$$

分母は $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$ と因数分解されるから、

$$\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

とおける。分母を払って、

$$3x^2 - 2x = A(x-1)^2 + B(x+2) + C(x-1)(x+2).$$

$x=1$ を代入して

$$1 = 3B \quad \therefore B = \frac{1}{3}.$$

$x=-2$ を代入して

$$16 = 9A \quad \therefore A = \frac{16}{9}.$$

x^2 の係数を比較して

$$3 = A + C \quad \therefore C = 3 - A = 3 - \frac{16}{9} = \frac{11}{9}.$$

以上より

$$\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2} = \frac{16}{9(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)^2} + \frac{11}{9(x-1)}.$$

ゆえに

$$J = \frac{16}{9}\log|x+2| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{11}{9}\log|x-1|.$$

$$I = \frac{x^2}{2} + \frac{16}{9}\log|x+2| - \frac{1}{3(x-1)} + \frac{11}{9}\log|x-1|.\blacksquare$$

例 4.9 (分母に既約 2 次式がある場合)

$$I = \int \frac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^3-1}\,dx.$$

まず分子を分母で割って、

$$x^4+2x^3+3x^2+4x+5 = (x+2)(x^3-1) + 3x^2 + 5x + 7$$

が得られるから、

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{(x+2)(x^3-1)+3x^2+5x+7}{x^3-1}\,dx = \int (x+2)dx + \frac{3x^2+5x+7}{x^3-1}\,dx = \frac{x^2}{2}+2x+J,\\ J &:= \int \frac{3x^2+5x+7}{x^3-1}\,dx.\end{aligned}$$

x^3-1 の実数の範囲での因数分解は

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

であるから、

$$\frac{3x^2+5x+7}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+c}{x^2+x+1}$$

と分解できるはず。分母を払って

$$3x^2+5x+7=A(x^2+x+1)+(Bx+c)(x-1). \tag{4}$$

$x=1$ を代入して

$$15=3A \quad \therefore \quad A=5.$$

一方 (4) の両辺の x^2 の係数を比較して

$$3=A+B \quad \therefore B=3-A=3-5=-2.$$

同様に (4) の両辺の定数項を比較して

$$7=A-C \quad \therefore C=A-7=5-7=-2.$$

ゆえに

$$J=\int\left(\frac{5}{x-1}-\frac{2x+2}{x^2+x+1}\right)dx=5\log|x-1|-K,\quad K:=\int\frac{2x+2}{x^2+x+1}dx.$$

$$\begin{aligned}K &= \int\frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}\,dx+\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\ &= \log(x^2+x+1)+L,\quad L:=\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.\end{aligned}$$

さて、

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

であるから、

$$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$$

とおくと、

$$x^2+x+1=\frac{3}{4}(1+\tan^2\theta)=\frac{3}{4\cos^2\theta}.$$

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}\,d\theta,\quad \theta=\operatorname{Arctan}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}$$

となり、

$$L = \int \frac{4\cos^2\theta}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta} d\theta = \int \frac{2\sqrt{3}}{3} d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}.$$

ゆえに

$$I = \frac{x^2}{2} + 2x + 5\log|x-1| - \log(x^2+x+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{Arctan} \frac{2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}. \blacksquare$$

4.6 余談 — 実際の積分計算

以上の議論は、実は原理的なものであり、応用上現われる問題には不十分である。

例えば上の議論では、有理関数の分母に現われる多項式の根が求まったと仮定している。確かに多項式の根の存在は代数学の基本定理で保証されることであるが、その具体的な計算法は別の問題である。

2 次方程式の根の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

の根は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

のような公式が得られるのは、方程式の次数が 4 までで、5 次以上の代数方程式に対しては、有限回の四則と巾根を用いた根の公式は存在しないことが証明されている (Abel（アーベル）, Galois（ガロア）)[3]。そこで実際の因数分解は、(いくらでも高精度に出来るとは言え) 近似的にしか得られないことが多い。

もし定積分の値が近似的に知りたいだけならば、不定積分を仲介せずに直接数値積分を行うのが便利なことが多い。

さらに不定積分を計算するにしても、最近のコンピューターによる数式処理では、上に説明したような部分分数への分解を利用するのとは異なるアルゴリズムが採用されている (今のところ、分母の無平方分解を利用する **Risch の算法**が有力であるという)。

5 不定積分が「求まらない」場合

5.1 「求まらない」の意味

中学校から高等学校、さらに大学の基礎数学までに色々な関数を学んできたが、もちろんこれで「すべての関数」が表わされるわけではない。言い換えるとこれまで学んだ関数だけを使って表わすことのできない関数がある。

大ざっぱに言って[4]、これまで学んだ関数だけを使って表わすことのできる関数を**初等関数**とよぶ。

有理関数の不定積分は初等関数になることを学んだが、初等関数の不定積分で初等関数にはならないものがあるのはそれほど不自然には感じられないであろう。

[3] 代数学の Galois 理論で学ぶ。

[4] 初等関数を精密に定義するのは面倒であり、それを遂行することにそれほど意味がないと思われるので、ここでは省略する。

5.2 楕円積分

$R(x, \sqrt{ax+b})$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ が積分できることは分かったから、次は

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right) dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right) dx,$$

を考えたくなるが、実はこの形の関数の不定積分は、特殊な例外を除いて初等関数では表わされないことが証明されている。これらの積分を**楕円積分**と呼ぶ。

すべての楕円積分は、適当な変数変換で初等関数と、次の 3 つの積分

$$\begin{aligned}
F(k,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\, dt = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad (0<k<1), \\
E(k,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\, dt \quad (0<k<1) \\
\Pi(k,n,\varphi) &= \int_0^{\varphi} \frac{dt}{(1+n\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}
\end{aligned}$$

を用いて表わせる (**Legendre-Jacobi の標準形**)。それぞれ第一種不完全楕円積分、第二種不完全楕円積分、第三種不完全楕円積分と呼ぶ。これらは初等関数では表わされない。

楕円積分はその逆関数 (**楕円関数**) を考えることにより本質が明らかになることが知られている。

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{sn}\, u,$$

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(k,\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \mathrm{am}(u,k) = \mathrm{am}\, u.$$

楕円関数は変数を複素数の範囲に自然に広げることができ、二重周期を持つことが特徴である。

このあたりのことは、

$$u = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\, z \quad \Leftrightarrow \quad z = \sin u$$

であり、sin が一重周期を持つ関数であることと良い対照をなしている。

楕円関数論は 19 世紀数学の華である。C. F. Gauss (ドイツ, 1777–1855), N. H. Abel (ノルウェー, 1802–1829), C. G. J. Jacobi (ドイツ, 1804–1851) の 3 人が発見者と言われている。

例 5.1 単振子の振れの角を θ とし、その最大値を α, 全エネルギーを E とすると、

$$\frac{1}{2}m\left(\ell\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = E, \quad E = mg\ell(1-\cos\alpha).$$

これから

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi$$

とおくと、

$$t = \sqrt{\frac{\ell}{g}}F(k,\varphi).$$

特に周期 T は

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K(k), \quad K(k) := K\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

さらに

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\,\mathrm{sn}\,\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t, k\right). \blacksquare$$

5.3 積分対数, 積分正弦

応用上次の積分が良く現われる。これらも初等関数では表わすことができない。

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}, \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

5.4 正規分布の密度関数の不定積分

標準[5]正規分布 (Gauss 分布) の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

である。分布関数は

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$$

となるが、これは初等関数では表わされないことが分かっている。

コンピューターの OS の一種である UNIX の数学関数ライブラリィには、誤差関数

$$\mathrm{erf}\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

を計算する関数が含まれているが、

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\ \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

という関係があるので、ϕ の計算は簡単である。

A 双曲線関数の性質

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$
$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y},$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh y,$$

[5]平均 0, 分散 1 の正規分布を標準正規分布と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1,\\
\tanh 2x &= \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x},\\
\cosh^2 x &= \frac{\cosh 2x + 1}{2},\\
\sinh^2 x &= \frac{\cosh 2x - 1}{2},\\
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},\\
\sinh x - \sinh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},\\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},\\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},
\end{aligned}
$$

B 逆双曲線関数

$$
\begin{aligned}
\cosh^{-1} x &= \log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad (x \geq 1),\\
\sinh^{-1} x &= \log(x+\sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbf{R}),\\
\tanh^{-1} x &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1),\\
\coth^{-1} x &= \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1),
\end{aligned}
$$

例 B.1 $\sinh^{-1} x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を示せ。
(解) $y = \sinh^{-1} x$ とおくと $x = \sinh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. $Y = e^y$ とおくと $x = (Y - 1/Y)/2$ より

$$Y^2 - 2xY - 1 = 0.$$

この 2 次方程式の根は $x \pm \sqrt{x^2+1}$ であるが、$Y > 0$ に注意すると $Y = x + \sqrt{x^2+1}$. ゆえに

$$\sinh^{-1} x = y = \log Y = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).\blacksquare$$

例 B.2 $\cosh^{-1} x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(x \geq 1)$ を示せ。
(解) $\cosh\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は全単射でない。制限した $f\colon [0,\infty) \ni x \mapsto \cosh x \in [1,\infty)$ は全単射になる。この逆関数が $\cosh^{-1}$ である。

$y = \cosh^{-1} x$ とおくと $x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$. 上で述べたように $y \geq 0$ とするのが約束である。また $x \geq 1$ となることに注意する。

$Y = e^y$ とおくと、$Y \geq 1$, $x = (Y + 1/Y)/2$. 後者より

$$Y^2 - 2xY + 1 = 0.$$

この 2 次方程式は 2 実根 $Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$, $Y_2 = x - \sqrt{x^2-1}$ を持つが、実は $x > 1$ に対して $Y_1 > 1$ かつ $Y_2 < 1$ であるので (根と係数の関係から $Y_1 Y_2 = 1$ であり、明らかに $Y_1 > 1$ なので $Y_2 < 1$) Y_2 は不適で、$Y = Y_1 = x + \sqrt{x^2-1}$. ゆえに

$$\cosh^{-1} x = y = \log Y = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\blacksquare$$

問　tanh の逆関数である $\tanh^{-1}$ について以下の問に答えよ．
(1) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$ を示せ．(2) $\left(\tanh^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ を示せ．

参考文献

[1] 杉浦 光夫, 解析入門 I, II, 東京大学出版会 (1980, 198?).

[2] 戸田 盛和(もりかず), 楕円関数入門, 日本評論社 (2001).

[3] 桂田 祐史, 多項式ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kiso3/