2004 年度解析概論 II, 解析概論演習 II 試験問題　問題用紙

担当　桂田 祐史

2005 年 1 月 24 日

教科書・ノート等持込不可

解答用紙のみ提出すること

1〜5 に解答せよ (A と B があるものはどちらか一方を選んで解答せよ)。

1A. 次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^n$ の閉方体 (有界閉区間) 上の有界な関数の積分の定義を述べよ (ただし、閉方体の分割、上限和、下限和の定義や記号は既知として使って良い)。(2) $A=[0,2]$, $f(x)=(x-1)^2$ $(x\in A)$ とする。正の偶数 N に対して A の分割 Δ を $\Delta=\{2j/N; j=0,1,\cdots,N\}$ で定義する。このとき、 f の Δ に関する上限和、下限和を具体的に計算せよ。(3) 上で述べた積分の定義に基づき $\displaystyle\int_{[0,2]}(x-1)^2\,dx$ を求めよ。

1B. 次の各問に答えよ。

(1) $\mathbf{R}^n$ の Jordan 可測集合、Jordan 測度の定義を述べよ (閉方体上の積分の定義は既知としてよい)。(2) Jordan 可測でない集合の例をあげ、定義に基づき、Jordan 可測でないことを証明せよ。

2. 積分 $I=\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_x^\pi \frac{y\sin x}{x}\,dx\right)dy$ について以下の問に答えよ。

(1) 積分順序を交換せよ。 (2) I の値を求めよ。

3. $\Omega=\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2\le 1\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ (α は正の定数) とするとき、$\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ を求めよ。

4. $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた集合 Ω で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{f}(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)^T$ に対して、以下の問に答えよ。(1) 原点中心半径 1 の円を反時計回りに一周する曲線を C とするとき、線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ。(2) $\boldsymbol{f}$ のポテンシャルは存在しないことを示せ。(3) 右半平面 $H=\{(x,y); x>0\}$ に $\boldsymbol{f}$ を制限した $\boldsymbol{f}|_H$ のポテンシャルを求めよ。

5. $U=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $D=(0,\pi)\times(0,2\pi)$, $\boldsymbol{\varphi}\colon U\ni\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}R\sin\theta\cos\phi\\ R\sin\theta\sin\phi\\ R\cos\theta\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$, $S:=\boldsymbol{\varphi}(D)$ とおく (ただし R は正定数とする)。(1) S は講義で説明した意味で正則パラメーター曲面であることを示せ。(2) $\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\phi}$ を計算せよ。(3) S の曲面積が $4\pi R^2$ であることを示せ。