

解析概論II演習問題 No.6 (訂正版)

桂田 祐史

2005年12月5日

23. 曲線 C が次のそれぞれの場合について、線積分

$$\int_C y \, dx - x \, dy$$

を求めよ。

- (1) $x = t^3 - 1, y = t^2 - t$ ($0 \leq t \leq 1$).
- (2) $(0, 0)$ から $(2, 4)$ への有向線分.
- (3) 放物線 $y = x^2$ のグラフの $(0, 0)$ から $(2, 4)$ までの部分.
- (4) 折れ線 $(0, 0) \rightarrow (-2, 0) \rightarrow (-2, 4) \rightarrow (2, 4)$.

24. 次のベクトル場はポテンシャルを持つことを示し、それを求めよ。

- (1) $f(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)^T$.
- (2) $f(x, y, z) = (2xy, x^2 - z, -y)^T$.
- (3) $f(x, y, z) = (2xy \cos z, x^2 \cos z, -x^2 y \sin z)^T$.
- (4) $f(x, y, z) = (x, y, z)^T / r^3, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(注 (4) のみ工夫が必要である。)

解答 (結果のみ) (1) $xy + yz + zx$ (2) $x^2y - yz$ (3) $x^2y \cos z$ (4) $-\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

以下、ポテンシャルや Green の定理に関係する過去問を紹介。年明けに解答を公表します。

参考1 \mathbb{R}^2 におけるベクトル場 $f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + 2xy \\ x^3 + x^2 + 2y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

- (1) f がポテンシャル持つことを示せ。(2) f のポテンシャルを (一つ) 求めよ。(3) 次の各曲線 C_i にそった線積分 $\int_{C_i} f \cdot dr$ を求めよ。 $C_1(\cos 2t, \sin 3t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). C_2 折れ線 $(0, 0) \rightarrow (-2, 0) \rightarrow (-2, 4) \rightarrow (2, 4)$.

参考2 極座標による曲線 $r = 1 + \frac{\sin \theta}{2}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) について以下の問に答えよ。
 (1) 曲線の概形を描け。(2) この曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

参考3 ベクトル場 f を

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \right)$$

で定めるとき、以下の問に答えなさい。

- (1) xy 平面における円 $x^2 + y^2 = a^2$ (a は正の定数) を正の向き (反時計回り) に一周する閉曲線を C とするとき、線積分 $\int_C f \cdot dr$ を計算せよ。
- (2) $\text{rot } f = 0$ であることを示せ。
- (3) f はポテンシャルを持つか、理由をつけて答えよ。
- (4) 円 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ を正の向きに一周する閉曲線を \tilde{C} とするとき、 $\int_{\tilde{C}} f \cdot dr$ を求めよ。

参考4 \mathbf{R}^3 のベクトル場 $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - z \\ -y \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

- (1) $\text{rot } f$ を求めよ。(2) f はポテンシャルを持つかどうか調べよ (理由を述べよ)。持つ場合はそれを求めよ。(3) 折れ線 $(1, 1, 1) \rightarrow (2, 3, 1) \rightarrow (3, 3, 1)$ を C とするとき、 $\int_C f \cdot dr$ を求めよ。

参考5 \mathbf{R}^2 から原点を除いた集合 Ω で定義されたベクトル場 $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$ に対して、以下の問に答えよ。

- (1) 原点中心半径 1 の円を反時計回りに一周する曲線を C とするとき、線積分 $\int_C f \cdot dr$ を求めよ。(2) f のポテンシャルは存在しないことを示せ。(3) 右半平面 $H = \{(x, y); x > 0, y \in \mathbf{R}\}$ に f を制限した $f|_H$ のポテンシャルを求めよ。