

__年__組__番 氏名_____ (解答は裏面も使用可, A4レポート用紙に書いても可)

問1

(1) 次の論理式を日本語で (\forall , \exists という記号は使わずに) 表わせ。

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) \quad x + y = y.$$

(最後の等式は無理に日本語にしなくても良い。 \forall と \exists が読めることを確認する問題なので。)

(2) 次の命題 (i), (ii) それぞれを、(a) 論理式で書き直し、(b) 真ならば証明し、偽ならば否定命題を (論理式で) 書いてそれを証明せよ。

(i) 任意の有理数 x に対して、ある有理数 y が存在して、 $x + y = 0$ が成り立つ。

(ii) ある整数 a が存在して、任意の整数 b に対して、 $a \leq b$ が成り立つ。

問1 解説

(1) 日本語では色々な表現がありうるが、勧められるのは

「ある実数 x が存在して、すべての実数 y に対して $x + y = y$.」

または

「ある実数 x が存在して、任意の実数 y に対して $x + y = y$.」

(2) (i) (a) $(\forall x \in \mathbb{Q}) (\exists y \in \mathbb{Q}) x + y = 0$.

(b) 真である。証明: x を (任意の) 有理数とする。 $y := -x$ とおくと、 y は有理数であり、 $x + y = x + (-x) = 0$. ゆえに $x + y = 0$.

(ii) (a) $(\exists a \in \mathbb{Z}) (\forall b \in \mathbb{Z}) a \leq b$.

(b) 偽である。否定命題は $(\forall a \in \mathbb{Z}) (\exists b \in \mathbb{Z}) a > b$.

否定命題の証明: a を (任意の) 整数とする。 $b := a + 1$ とおくと、 b は整数であり、 $a > b$ が成り立つ。 ■

(解説)

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ がすぐに間違えずに思い出せるようにする。書き方にも注意 (手書きの場合はどこか二重線がお勧め)。
- お勧めの読み方
 - 「 $\forall x P(x)$ 」は「すべての x に対して (について) $P(x)$ が成り立つ。」または「任意の x に対して (について) $P(x)$ が成り立つ。」
 - 「 $\exists x P(x)$ 」は「ある x が存在して $P(x)$ が成り立つ。」
- 証明について

「数理リテラシー 論理 (4)」

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/literacy-2021/L04_0512_handout.pdf

§2.5 のスライド pp. 11–14