数学解析 練習 No. 3 (2021 年 5 月 16 日, 提出の必要はない)

__年__ 組____番 氏名______________

授業動画を収録したときと変更しました。解答は裏面にあります。

練習

(1) 5 月 16 日授業での、交代級数に関する Leibniz の判定法の証明において、$\{c_n\} = \{s_{2n}\}$ が単調増加で上に有界であること、$\{b_n\} = \{s_{2n-1}\}$ が単調減少で下に有界であることを示せ。

(2) 数列 $\{s_n\}$ について、$\{c_n\} = \{s_{2n}\}$ と $\{b_n\} = \{s_{2n-1}\}$ が共通の極限 s を持てば、$\{s_n\}$ 自身が s に収束することを示せ。

(1) 以下、n を任意の自然数とする。

$$b_{n+1}-b_n = s_{2(n+1)-1}-s_{2n-1} = s_{2n+1}-s_{2n-1} = (-1)^{2n}a_{2n+1}+(-1)^{2n-1}a_{2n} = a_{2n+1}-a_{2n} \leq 0$$

であるから $b_{n+1} \leq b_n$. ゆえに $\{b_n\}$ は単調減少である。

　また

$$c_{n+1}-c_n = s_{2(n+1)}-s_{2n} = s_{2n+2}-s_{2n} = (-1)^{2n-1}a_{2n+2}+(-1)^{2n}a_{2n+1} = -a_{2n+2}+a_{2n+1} \geq 0$$

であるから $c_{n+1} \geq c_n$. ゆえに $\{c_n\}$ は単調増加である。

　また

$$c_n - b_n = s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n-1}a_{2n} = -a_{2n} \leq 0$$

であるから

$$(\heartsuit) \qquad c_n \leq b_n.$$

　$(\heartsuit)$ と $\{b_n\}$ の単調減少性から

$$c_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

であるから b_1 は $\{c_n\}$ の上界であり、$\{c_n\}$ は上に有界である。

　また、$(\heartsuit)$ と、$\{c_n\}$ の単調減少性から

$$b_n \geq c_n \geq c_{N-1} \geq \cdots \geq c_2 \geq c_1$$

であるから c_1 は $\{b_n\}$ の下界であり、$\{b_n\}$ は下に有界である。

(2) ε を任意の正の数とする。$\{s_{2n}\}$ が s に収束することから、ある自然数 N_1 が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |s - s_{2n}| < \varepsilon.$$

また $\{s_{2n-1}\}$ が s に収束することから、ある自然数 N_2 が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |s - s_{2n-1}| < \varepsilon.$$

このとき、$N := \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$ とおくと、N は自然数であり、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して $|s - s_n| < \varepsilon$ が成り立つ。実際、

- n が奇数の場合、ある自然数 p が存在して、$n = 2p - 1$. $n \geq 2N_2 - 1$ であるから、$p \geq N_2$. ゆえに
$$|s - s_n| = |s - s_{2p-1}| < \varepsilon.$$
- n が偶数の場合、ある自然数 p が存在して、$n = 2p$. $n \geq 2N_1$ であるから、$p \geq N_1$. ゆえに
$$|s - s_n| = |s - s_{2p}| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. ■