

数学解析 第7回

～ 点列の極限と多変数関数の極限・連続性 (第1回) ～

桂田 祐史

2021年5月31日

目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 点列の極限と多変数関数の極限・連続性
 - N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N
 - 点列とその極限
 - \mathbb{R}^N の部分集合の閉包
 - 多変数関数とその極限
- 3 参考文献

本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容

数列・(1変数実数値)関数の極限に引き続き、点列・多変数ベクトル値関数の極限を論じる。つまりは**多次元化がテーマ**となる。

本日の段階では1次元のときと大きな違いはなく、多分、簡単に感じる人が多いと思われる。実は…と次回に話が続く。

- 残念ながら COVID19 の感染は収まらないようなので、対面形式での期末試験実施は現実的ではなくなりました。期末試験の代わりに「期末レポート課題」を課す可能性が高いです。期末試験実施の場合は「宿題 20%, 期末試験 80%で成績評価」としてありますが、期末レポートで評価する場合は「宿題 40%, 期末レポート 60%で成績評価」とします。
- 宿題 4 は既に~~メ~~切を過ぎていますが、受け取り期限を1週間延ばします(そのため宿題 4 の解説は次回授業で行います)。
- 本日は宿題はありません。

4 点列の極限と多変数関数の極限・連続性

これまでの数列、1変数関数の話を**多次元化する**。

「1次元と同様」で済むところが多いが、同様に済まないところもある(今日の話には出て来ないが)。そこに注意が必要である。勉強するとき以下問いを持っておくと良い「成分ごとにやれば良い？」

(余談 ここまでは有限次元の話であるが、この先に無限次元の話がある。関数論やフーリエ解析では、関数列の収束が問題となる。前者では一様収束に関する議論が重要である(「複素関数・同演習」で学べる)。後者では多くの収束概念が登場する。)

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N

ベクトルと数を表す文字を一々区別しないのが普通であるが、この節では書き分けることにする。ベクトルは、太字 \mathbf{x} にしたり、矢印をつけて \vec{x} としたり(好きな方を使って良い)。

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

N 次元ベクトルの全体を \mathbb{R}^N で表す。

$$\mathbb{R}^N := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$ のとき、断りがなければ、成分は同じ文字に添字をつける:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \text{ の第 } i \text{ 成分を } a_i \text{ と表す}).$$

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 演算

和 (加法), スカラー倍, 内積, 長さ (ノルム) が定義されている。

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とするとき

$$(1a) \quad \vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_N + b_N \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_N \end{pmatrix},$$

$$(1b) \quad (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} := \vec{b}^\top \vec{a} = \sum_{j=1}^N a_j b_j,$$

$$(1c) \quad |\vec{a}| = \|\vec{a}\| := \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \left(\sum_{j=1}^N a_j^2 \right)^{1/2}.$$

ただし、ベクトルや行列の転置 (transpose) を、右上に $^\top$ を書いて表すことにする。 \vec{b}^\top は横ベクトルである: $\vec{b}^\top = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_N)$.

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 不等式

加法、スカラー乗法、内積 (スカラー積, ドット積) の性質は良く知っていると思うが、不等式について復習しておく。

$$(2a) \quad \left| (\vec{a}, \vec{b}) \right| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$(2b) \quad -|\vec{a}| |\vec{b}| \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq |\vec{a}| |\vec{b}|,$$

$$(2c) \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{ついでに } |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|),$$

$$(2d) \quad |\vec{a} - \vec{b}| \geq \left| |\vec{a}| - |\vec{b}| \right|,$$

$$(2e) \quad \max_{1 \leq j \leq N} |a_j| \leq |\vec{a}| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_j|.$$

(2a) は Schwarz の不等式である。(2b) は (2a) から導ける。

(2c) は三角不等式であり、(2a) から導かれる。(2d) は (2c) から導ける。

(2e) はノルムの定義からすぐ分かる。

いずれも、証明が読みたければ、講義ノート [1] を見よ。

4.1 N 次元ベクトルと \mathbb{R}^N 開球と閉球

$\vec{a} \in \mathbb{R}^N, r > 0$ に対して

$$B(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \right\},$$
$$\bar{B}(\vec{a}; r) := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \right\}$$

とおき、 $B(\vec{a}; r)$ を \vec{a} 中心、半径 r の開球 (open ball), $\bar{B}(\vec{a}; r)$ を \vec{a} 中心、半径 r の閉球 (closed ball) と呼ぶ。

4.2 点列とその極限

\mathbb{N} から \mathbb{R}^N への写像 $\vec{a}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ のことを \mathbb{R}^N の **点列** (sequence) と呼び、 $\vec{a}(n)$ を \vec{a}_n , 点列自身 (\vec{a} のこと) を $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。

定義 7.1 (点列の収束)

$\{\vec{a}\}_{n \in \mathbb{N}}$ を \mathbb{R}^N の点列, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ とする。 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が \vec{A} に **収束する** ($\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converges to \vec{A}) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このような \vec{A} が存在するとき、それは一意的に定まる。その \vec{A} を点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の **極限** と呼び、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n$ と表す。

極限が存在することを単に **収束する** (convergent) と言ったり、収束しないとき **発散する** (diverges) と言ったりするのは、数列のときと同様である。こういうことは以下断らないことにする。

4.2 点列とその極限 (1) 大体同じ

点列の収束・極限の性質は、数列の収束・極限とほとんど同じである。

$$(3a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n + \vec{b}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n,$$

$$(3b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n \vec{a}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n,$$

$$(3c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n, \vec{b}_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n \right),$$

$$(3d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\vec{a}_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n \right|.$$

証明も同様に出来ることが多い。次の定理を使って数列の場合に帰着出来ることもある。

4.2 点列とその極限 (2) 成分ごとに考えればOK

命題 7.2 (点列の収束は成分ごとに考えれば良い)

\mathbb{R}^N の点列 $\{\vec{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{A} \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, N\}) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j.$$

少々形式的かもしれないが、次のように書くと分かりやすいかもしれない。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,1} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,N} \end{pmatrix} \quad (\text{lim がカッコの中に入る}).$$

4.2 点列とその極限 (3) 成分ごとに考えればOK

(3a) は次のように証明できる。次の2つの $=$ で命題 7.2 を用いている。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{a}_n + \vec{b}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} + b_{N,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{1,n} + b_{1,n}) \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{N,n} + b_{N,n}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{N,n} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{N,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{N,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{1,n} \\ \vdots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_{N,n} \end{pmatrix} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{N,n} \end{pmatrix} + \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{N,n} \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n.\end{aligned}$$

4.2 点列とその極限 (4) 成分ごとに考えればOK 証明

命題 7.2 の証明の前に、一般に次の不等式が成り立つことを思い出そう。

$$\max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j|.$$

(\Rightarrow の証明) $n \rightarrow \infty$ のとき $\left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \rightarrow 0$ と仮定する。任意の j に対して

$$|a_{n,j} - A_j| \rightarrow 0.$$

すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j$.

(\Leftarrow の証明) 任意の j に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,j} = A_j$ が成り立つと仮定する。 ε を任意の正の数とするとき、ある自然数 m_1, \dots, m_N が存在して、

$$n \geq m_j \quad \Rightarrow \quad |a_{n,j} - A_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}.$$

$N' := \max\{m_1, \dots, m_N\}$ とおくと、 $N' \in \mathbb{N}$ であり、 $n \geq N'$ のとき、

$$\left| \vec{a}_n - \vec{A} \right| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} |a_{n,j} - A_j| \leq \sqrt{N} \max_{1 \leq j \leq N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} = \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{A}$.

□

4.2 点列とその極限 (5) 例

例 7.3

$\vec{a}_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ (1 + \frac{1}{n})^n \end{pmatrix}$ とするとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \begin{pmatrix} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}.$$

点列の極限は簡単 (数列の極限を知っていれば)。練習不要。

4.3 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包 定義と簡単な例

収束・極限を定義するために、 \mathbb{R}^N の部分集合の閉包を定義する。

定義 7.4 (\mathbb{R}^N の部分集合の閉包)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とするとき

$$\bar{\Omega} := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^N \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset \right\}$$

で定まる集合 $\bar{\Omega}$ を Ω の**閉包** (the closure of Ω) と呼ぶ。

- \mathbb{R} の区間 I に対して、 \bar{I} を定義したが、実はそれは I の閉包である。つまり、区間の閉包は、区間にその端点を合わせたものになる。

$$(\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b) \quad \overline{(a, b)} = \overline{[a, b]} = \overline{[a, b]} = [a, b].$$

- 直観的には、 $\bar{\Omega}$ は Ω にその縁^{ふち}(数学用語では「境界 (boundary)」) を合わせたものである。

例えば開球の閉包は閉球である: $\overline{B(\vec{a}; r)} = \bar{B}(\vec{a}; r)$.

- $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

命題 7.5 (閉包の性質)

$\Omega, \Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ とする。

- ① $\Omega \subset \bar{\Omega}$.
- ② $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ならば、 $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$.
- ③ $\bar{\Omega}$ は Ω を含む最小の閉集合である。(これから $\overline{\bar{\Omega}} = \bar{\Omega}$ が分かる。)

証明 (授業ではスキップする。)

- ① $\vec{x} \in \Omega$ とすると、任意の正の数 ε に対して、 $\vec{x} \in B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega$ であるから $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \bar{\Omega}$. ゆえに $\Omega \subset \bar{\Omega}$.
- ② $\Omega_1 \subset \Omega_2$ と仮定する。 \vec{x} は Ω_1 の任意の要素とする。任意の正の数 ε に対して、 $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから $B(\vec{x}; \varepsilon) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. ゆえに $\vec{x} \in \bar{\Omega}_2$. ゆえに $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$.
- ③ (まだ閉集合という言葉を定義していないので証明できない。この(3)はフライングである。) □

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

例えば、 $f(x, y) = x^2 - y^2$ は 2 変数の実数値関数である。 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $f(x, y) = f(\vec{x})$ と表せる。 $f: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ という写像とみなせる。

$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ は 2 変数関数で、値が 2 次元ベクトルである。これは $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$ という写像とみなせる。

より一般に、 $n, m \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$ とする。 $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ を n 変数 m 次元ベクトル値関数と呼ぶ。

特に $n > 1$ のとき **多変数関数** と呼ぶ。

特に $m > 1$ のとき **ベクトル値関数** と呼ぶ。

n 変数関数とは、 \mathbb{R}^n の部分集合を定義域とする関数である。

以下で \mathbb{R}^n という形の式が出て来た時、特に断りなく $n \in \mathbb{N}$ とする。

4.4 多変数関数とその極限 定義と基本的な性質

定義 7.6 (多変数関数の収束、極限)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \bar{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。 $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のとき $\vec{f}(\vec{x})$ が \vec{A} に**収束する**とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \Omega : |\vec{x} - \vec{a}| < \delta) \quad \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{A} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。(これを満たす \vec{A} は一意的に定まる。) この \vec{A} を $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のときの $\vec{f}(\vec{x})$ の**極限**と呼び、 $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x})$ で表す。

4.4 多変数関数とその極限

多変数関数の収束・極限の性質は、1変数実数値関数の収束・極限とほとんど同じである。

$$(4a) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}),$$

$$(4b) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\lambda(\vec{x}) \vec{f}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \lambda(\vec{x}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}),$$

$$(4c) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}), \vec{g}(\vec{x}) \right) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \right),$$

$$(4d) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left(\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) \right) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) \quad (3 \text{次元限定}),$$

$$(4e) \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \left| \vec{f}(\vec{x}) \right| = \left| \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) \right|,$$

...

証明も同様に出来ることが多い。

4.4 多変数関数とその極限

次の命題は、点列に関する命題 7.2 のベクトル値関数バージョンである。

命題 7.7 (ベクトル値関数の極限は成分ごとに考えれば良い)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a} \in \overline{\Omega}$, $\vec{A} \in \mathbb{R}^m$ とする。

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{A} \iff (\forall j \in \{1, \dots, m\}) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = A_j.$$

この定理から、ベクトル値関数の極限は、各成分である実数値関数の極限に帰着される、と言って良い。しかし、まだ $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ のところに矢印 \vec{x} が残っている。実は、

多変数関数の極限は、1変数関数の極限には帰着されない。

…… これについては次回の授業で説明する。

参考文献

- [1] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf> (2014 年～).