数学解析 宿題 No. 7 (2020 年 7 月 27 日出題, 7 月 30 日 (金)18:00 までに Oh-o! Meiji に PDF 形式で提出)

__年__ 組____番 氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 7 (1) (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$\boxed{}$ を満たすことをいう。 (b) $\mathbb{R}^n$ の閉集合の定義を書け。

(2) 以下の集合が $\mathbb{R}^n$ の開集合または閉集合であれば、そのことを証明せよ。7/20 の授業中の定理を用いる場合には、どの定理を用いたか記せ。

(a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 1\}$ (b) $V = \{(0,0), (3,1)\}$ (2 点からなる集合)

(c) $(0,0)$, $(3,1)$, $(1,3)$ を頂点とする三角形の内部 Δ (「内部」とは、辺を含まない、という意味)

(3) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ とおき、$f\colon K \to \mathbb{R}$ を $f(x, y) = 3x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$ で定義するとき、f の最大値と最小値が存在することを示せ (値を求める必要はない)。

問 7 解答・解説　(1), (2) は授業中に出て来たことを抜き出して書いてみよう、という問である。

(1) (a) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$\boxed{(\forall x \in A)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset A}$ を満たすことをいう。

(b) $\boxed{A \subset \mathbb{R}^n \text{ とする。} A \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の閉集合であるとは、} A^c \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合であることをいう。}}$

(2) (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = xy$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ で定めると、f は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。$\gamma = 1$ とおくと、$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \le \gamma\}$ と表せる。ゆえに定理 D によって、Ω は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(b) まず「$a \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$F = \{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。」という補題を証明する。

(補題の証明) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) := |x-a|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^2$ で定めると、f は多項式関数であるから $\mathbb{R}^n$ 全体で連続である。$\gamma = 0$ とおくと、$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\}$. ゆえに定理 D によって、$F$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。 (補題証明終)

この補題によって、$\{(0,0)\}$ と $\{(3,1)\}$ はともに $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。ゆえに定理 C によって、$V = \{(0,0)\} \cup \{(3,1)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。■

(補題を使わない別証明) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)[(x-3)^2+(y-1)^2] = 0\}$ と表せる。$(x^2+y^2)\,[(x-3)^2+(y-1)^2]$ は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 上の連続関数である。ゆえに定理 D によって、V は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。)

(c)

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - \frac{x}{3} > 0 \land y - 3x < 0 \land x + y < 4\right\}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x,y) > \gamma_1\right\}, \quad f_1(x,y) = y - \frac{x}{3}, \quad \gamma_1 = 0 \\
\Omega_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_2(x,y) < \gamma_2\right\}, \quad f_2(x,y) = y - 3x, \quad \gamma_2 = 0 \\
\Omega_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_3(x,y) < \gamma_3\right\}, \quad f_3(x,y) = x + y - 4, \quad \gamma_3 = 0
\end{aligned}$$

とおくとき

$$\Delta = \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3$$

が成り立つ。f_1, f_2, f_3 はいずれも多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。定理 B によって、$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。ゆえに定理 A によって、Δ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。 ■

(3) (K が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であること。) $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = y$, $f_3(x,y) = 1 - x - y$ とおくと、これらはいずれも 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに

$$K_i = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f_i(x,y) \ge 0\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。$K = K_1 \cap K_2 \cap K_3$ であるから、K は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(K が有界集合であること。) $(x,y) \in K$ とする。

- $x \ge 0$, $y \ge 0$ であるから $x + y \ge 0$. ゆえに $0 \le x + y \le 1$.
- $x \ge 0$, $y \ge 0$ であるから $xy \ge 0$. ゆえに $-2xy \le 0$.

ゆえに $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \le (x+y)^2 \le 1^2 = 1$. すなわち $|(x,y)| \le 1$. ゆえに K は有界である。

$f(x,y)$ は多項式であるから、$\mathbb{R}^2$ を定義域とすれば $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は K で連続である。K は有界閉集合であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K における最大値、最小値が存在する。 ■