数学解析 練習 No. 3　(2020 年 6 月 8 日, 提出の必要はない)

__年__ 組____番　氏名______________

授業動画を収録したときと変更しました。解答は裏面にあります。

練習

(1) 6 月 8 日授業での、交代級数に関する Leibniz の判定法の証明において、$\{s_{2n}\}$ が単調増加で上に有界であること、$\{s_{2n-1}\}$ が単調減少で下に有界であることを示せ。

(2) 数列 $\{s_n\}$ について、$\{s_{2n}\}$ と $\{s_{2n-1}\}$ が共通の極限 s を持てば、$\{s_n\}$ 自身が s に収束することを示せ。

(1) 以下、n を任意の自然数とする。

$$s_{2(n+1)-1} - s_{2n-1} = s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n} a_{2n+1} + (-1)^{2n-1} a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$$

であるから $s_{2(n+1)-1} \leq s_{2n-1}$. ゆえに $\{s_{2n-1}\}$ は単調減少である。

また

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n-1} a_{2n+2} + (-1)^{2n} a_{2n+1} = -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0$$

であるから $s_{2(n+1)} \geq s_{2n}$. ゆえに $\{s_{2n}\}$ は単調増加である。

また

$$s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n-1} a_{2n} = -a_{2n} \leq 0$$

であるから

$$s_{2n} \leq s_{2n-1}. \tag{$\heartsuit$}$$

($\heartsuit$) と、$\{s_{2n}\}$ の単調増加性から

$$s_{2n-1} \geq s_{2n} \geq s_{2(n-1)} \geq \cdots \geq s_2$$

であるから s_2 は $\{s_{2n-1}\}$ の下界であり、$\{s_{2n-1}\}$ は下に有界である。

また、($\heartsuit$) と、$\{s_{2n-1}\}$ の単調減少性から

$$s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

であるから s_1 は $\{s_{2n}\}$ の上界であり、$\{s_{2n}\}$ は上に有界である。

(2) ε を任意の正の数とする。$\{s_{2n}\}$ が s に収束することから、ある自然数 N_1 が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |s - s_{2n}| < \varepsilon.$$

また $\{s_{2n-1}\}$ が s に収束することから、ある自然数 N_2 が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |s - s_{2n-1}| < \varepsilon.$$

このとき、$N := \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$ とおくと、N は自然数であり、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して $|s - s_n| < \varepsilon$ が成り立つ。実際、

- n が奇数の場合、ある自然数 p が存在して、$n = 2p - 1$. $n \geq 2N_2 - 1$ であるから、$p \geq N_2$. ゆえに
$$|s - s_n| = |s - s_{2p-1}| < \varepsilon.$$
- n が偶数の場合、ある自然数 p が存在して、$n = 2p$. $n \geq 2N_1$ であるから、$p \geq N_1$. ゆえに
$$|s - s_n| = |s - s_{2p}| < \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. ■