**数学解析 練習 No. 1**　(2020 年 5 月 13 日, 提出の必要はない。裏面に答えがある。)

__年__ 組____番　氏名______________

**問 1A**　$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$ とする。$U$ が $A$ の上界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。$A$ が上に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(3) $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$ とする。$S$ が $A$ の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

(4) $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ とする。$M$ が $A$ の最大値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

**問 1B**　Weierstrass の上限公理を書け。

**問 1C**　$\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ とする。$L$ が $A$ の下界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。$A$ が下に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$

(3) $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ とする。$I$ が $A$ の下限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

(4) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ とする。$m$ が $A$ の最小値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{cases}$

**問 1D**　(Weierstrass の上限公理を認めて) 「$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ とする。$A$ は下に有界ならば、$A$ の下限が存在する。」を証明せよ。

以下の解答例で、(i), (ii) の順番は問わない。

**問 1A** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}$ とする。$U$ が $A$ の上界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x \in A)\ x \leq U$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。$A$ が上に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \leq U$
(「$A$ の上界が存在する」でも良い。)

(3) $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$ とする。$S$ が $A$ の上限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \leq S \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x \end{cases}$

((ii) は「$S$ を少しでも小さくすると、$A$ の上界ではなくなる」)

(4) $A \subset \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ とする。$M$ が $A$ の最大値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \leq M \\ \text{(ii)} & M \in A \end{cases}$

**問 1B** $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ とする。$A$ が上に有界ならば、$A$ の上限が存在する。

**問 1C** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ の右側を埋めよ。

(1) $A \subset \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ とする。$L$ が $A$ の下界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall x \in A)\ x \geq L$

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。$A$ が下に有界 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists L \in \mathbb{R})\ (\forall x \in A)\ x \geq L$
(「$A$ の下界が存在する」でも良い)

(3) $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$ とする。$I$ が $A$ の下限 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \geq I \\ \text{(ii)} & (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ I + \varepsilon > x \end{cases}$

((ii) は「$I$ を少しでも大きくすると、$A$ の下界ではなくなる」)

(4) $A \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$ とする。$m$ が $A$ の最小値 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & (\forall x \in A)\ x \geq m \\ \text{(ii)} & m \in A \end{cases}$

**問 1D** 略 (講義ノートには書いてあります。)