2020年度数学解析期末レポート課題

桂田 祐史

2020年7月31日 12:00, 2020年7月31日 11:36

問題は2ページ目以降にある。

- 締め切りは 8 月3日 18:00、Oh-o! Meiji で提出すること。
(なるべく8月2日までに解答し、疑問点があればその日のうちにメールで質問することを勧める。)
- 解答は A4 サイズのPDFで提出すること。最初のページの一番上に学年・組・番号 (学生番号ではない1〜2桁の数) ・氏名を記入すること。数式が正しく表記される限り、PDFの作成方法は問わない (手書き、TeX, ワープロソフト、何でも良い)。原則として単一のPDFで提出すること。サイズが10MBを超える場合は、複数のファイルにすることを認める。
- 締め切りまでは、訂正のための追加提出を1回まで認める。
- 講義資料、参考書など、何を参考にしても構わない。
- 問題の内容について、他人に質問・相談しないこと。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。
- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い (授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。
- 計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。その場合も、必要なことはレポートに書くこと (あくまでも計算の途中経過は書いてあって、コンピューターは計算結果の確かめに使うことにとどめなさい、ということ)。
- 疑問点があればメールで質問すること。
  - 7/31 18:00 までに届いたものは、8/1 0:00 までに回答する。
  - 8/1 18:00 までに届いたものは、8/2 0:00 までに回答する。
  - 8/2 18:00 までに届いたものは、8/3 0:00 までに回答する。
  - 8/3 10:00 までに届いたものは、8/3 13:00 までに回答する。

  主な質問とそれに対する回答は授業WWWサイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/` で公開する。
- 8/3 10:00〜12:00 に Zoom で質問を受け付ける (参加方法は授業の質問 Zoom ミーティングと同じ)。それ以降もメールにはなるべく回答するよう努めるが (12:00, 15:00 にメール・チェックする)、回答が間に合うかどうかは保証出来ない。

8 と **10** は必修問題である。それ以外の問題から 3 問を選択して、合計 5 問の解答をレポートせよ。(6 問以上は解答しないこと。) **1〜10** のどれも配点は 20 点である。小問が 2 つあるときは各 10 点、小問が 4 つあるときは各 5 点。問 3 は、小問が 3 つあり、(1) と (2) が 5 点、(3) が 10 点。

1.

(1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A の最小値が存在するとき、それは A の下限であることを示せ。

(2) 下限は存在するが、最小値は存在しない集合 A $(\subset \mathbb{R})$ の例をあげ、A の下限を求め (それが下限であることも示す)、最小値が存在しないことを示せ。

2. 以下の (1), (2) を、$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ を用いずに解答せよ。アルキメデスの公理は用いて良い。

(1) $A := \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ の下限は 0 であることを示せ。

(2) $A_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\}$ とするとき、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$ が成り立つことを示せ。

3. I は $\mathbb{R}$ の区間、$g\colon I \to \mathbb{R}$, $p \in \overline{I}$, $q \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $x \to p$ のとき $g(x)$ は q に収束しない、という条件を論理式で表せ ($\lim$ という記号を使わず ε-δ 論法で表す、という意味)。

(2) $x \to p$ のとき $g(x)$ は $-\infty$ に発散する、という条件を論理式で表せ。

(3) 「$x \to p$ のとき $g(x)$ が q に収束するならば、g は有界である」という命題の真偽を述べ、真ならば証明し、偽ならば反例をあげよ。

4. (1) I は $\mathbb{R}$ の区間、$a \in \overline{I}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$ とするとき、$\lim_{x\to a} \left(f(x) - \sqrt{3} g(x) \right) = A - \sqrt{3} B$ であること ε-δ 論法を用いて示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ \dfrac{5xy}{6x^2 + 7y^2} \end{pmatrix}$ が存在するかどうか答えよ。根拠も書くこと。(授業で説明した定理は何でも使って良い。極限が存在する場合に、その値だけを書いて「極限が存在する」と説明するのではなく、なぜその値に収束するか理由を書くこと。)

5.

(1) 2 変数の実係数多項式の定義を述べよ (実係数多項式という言葉を知らない人が、与えられた式を実係数多項式であるか、そうでないか、迷わずに答えられるような説明を書くこと)。

(2) $f(x, y)$ を x, y の実係数多項式とする。$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とみなすとき、f は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを証明せよ。

(「一般に n 変数の実係数多項式関数は $\mathbb{R}^n$ 上で連続である」という定理を授業で証明してあるが、2 変数の場合に証明を書きなさい、という意味。「連続関数の和・差・積は連続関数」という定理は用いて良い。)

6.

(1) 収束部分列の存在しない数列 $\{a_n\}$ の具体例をあげ、$\{a_n\}$ の収束部分列が存在しないことを示せ。

(2) 有界でないが、収束部分列は存在する数列は存在するか。存在するならば具体例をあげ、存在しないならば存在しないことを示せ。

7. $\mathbb{R}^n$ の部分集合で有界であるもの全体の集合を $\mathcal{B}$ とするとき、以下の (1)〜(4) に答えよ。

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$ を示せ。

(2) 集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $B_\lambda \in \mathcal{B}$ という条件を満たせば、$\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathcal{B}$ であることを示せ。

(3) $B_1 \in \mathcal{B}$, $B_2 \in \mathcal{B}$ ならば、$B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$ であることを示せ。

(4) 集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $B_\lambda \in \mathcal{B}$ という条件を満たしても、$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \in \mathcal{B}$ であるとは限らない。反例をあげよ。

念のため: $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{x \mid (\forall \lambda \in \Lambda) x \in B_\lambda\}$, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{x \mid (\exists \lambda \in \Lambda) x \in B_\lambda\}$

8. (必修問題) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問に答えよ (必ずしも番号順に解答しなくても良い)。

(1) f は $(0, 0)$ で連続であるかどうか調べよ。

(2) $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ を求めよ。

(3) f は $(0, 0)$ で全微分可能かどうか調べよ。

(4) f は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であるかどうか調べよ。

9. $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ は連続とする (直観的には平面内の連続な曲線である)。このとき φ の値域 $\varphi(I) = \{\varphi(t) \mid t \in [0,1]\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ。(ヒント: 閉集合の点列による特徴づけ)

10. (必修問題) 次の (A), (B) のいずれか一方に答えよ。

(A) xy 平面上で $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする三角形 (周を含む) を K とするとき、関数 $f(x,y) = 2x^2 + 6xy^2 - 2x$ の K 上の最大値と最小値を求めよ.

(B) xy 平面内の 2 つの曲線 $C\colon x^2 + (y-3)^2 = 1$ と $H\colon 2x^2 - y^2 = 1$ について、C 上の点と H 上の点の距離はある正の数より大きいことを示せ。