数学解析 定義＆定理確認

桂田 祐史

2014年7月14日, 2020年4月13日

p. 4 から解答があります。
定義 (全部) や定理 (大事なもの) を書けるようにしておいて下さい。自分で定義を書いて、解答を見てチェックして下さい。
例えば「数列の収束の定義を述べよ」という問に対して、

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ |a_n - a| < \varepsilon$$

とだけ書くのではなく、最低でも「$\{a_n\}$ が a に収束するとは」を書くべきで、完全にするためには「$\{a_n\}$ を数列、$a \in \mathbb{R}$ とする。」のような前振りも必要です。

良く使う記号

1. 次の記号の意味を説明せよ。
(1) $\mathbb{N}$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{Q}$ (4) $\mathbb{R}$ (5) $\mathbb{C}$

2. 次の (1)〜(9) は $\mathbb{R}$ の区間である。それらを [,], (,) を用いずに表せ。(10) は記号の使い方がおかしいが、その理由を記せ。
(1) $[1,2]$ (2) $(1,2)$ (3) $[1,2)$ (4) $(1,2]$ (5) $(1,\infty)$ (6) $[1,\infty)$ (7) $(-\infty,2]$ (8) $(-\infty,2)$ (9) $(-\infty,\infty)$ (10) $[1,\infty]$

良く出て来る用語 □□の定義の述べ方。「○○は△△とする。○○が□□であるとは、〜〜が成り立つことをいう。」「○○は△△とする。〜〜が成り立つとき、かつそのときに限り、○○は□□であるという。」のような言い回しを身につけること。

3. 次の用語の定義を述べよ。
(1) ($\mathbb{R}$ の部分集合が) 上に有界 (2) ($\mathbb{R}$ の部分集合が) 下に有界 (3) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 上界 (4) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 下界 (5) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 上限 (6) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 下限 (7) ($\mathbb{R}$ の部分集合が) 有界 (8) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 最大値 (9) ($\mathbb{R}$ の部分集合の) 最小値

4. 次の用語の定義を述べよ。
(1) (数列が) 収束する (2) (数列が) 上に有界 (3) (数列が) 有界 (4) (数列が) 単調増加 (5) (数列が) 狭義単調増加 (6) (数列が) 無限大に発散する (7) (数列の) 部分列 (8) $A \subset \mathbb{R}$ とするとき、A 内の数列

5. 次の用語の定義を述べよ。
(1) ($\mathbb{R}^n$ の点列が) 収束する (2) ($\mathbb{R}^n$ の点列が) 有界 (3) ($\mathbb{R}^n$ の点列の) 部分列 (4) $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、A 内の点列

6.　次の用語・記号の定義を述べよ。
(1) (関数が変数をある値に近付けるときに) 収束する　(2) (関数が) 連続　(3) (変数 x についての) 多項式　(4) $\mathbb{R}[x]$　(5) (変数 x についての) 有理式　(6) (関数が変数をある値に近付けるときに) 無限大に発散する　(7) (関数が変数を ∞ に近付けるときに) 収束する　(8) (関数が変数を ∞ に近付けるときに) 無限大に発散する

(多変数ベクトル値関数についても、ほぼ同様なので、もう繰り返さない。)

7.　次の用語の定義を述べよ。
(1) ($\mathbb{R}^n$ の部分集合が) $\mathbb{R}^n$ の開集合　(2) ($\mathbb{R}^n$ の部分集合が) $\mathbb{R}^n$ の閉集合　(3) ($\mathbb{R}^n$ の部分集合の) 閉包　(記号だけ覚えている人のため: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対する $\overline{\Omega}$ を Ω の閉包という。)

大事な定理

8.　次の公理、定理を書け (言うまでもないことだが、いずれも命題である)。

(1) Weierstrass の上限公理

(2) 上に有界な単調増加数列の収束

(3) アルキメデスの原理 (公理)

(4) (Cantor の) 区間縮小法

(5) Bolzano-Weierstrass の定理

(6) Weierstrass の最大値定理

(7) Rolle の定理

(8) 平均値の定理

以上の 8 つの命題のうち、この講義で証明していないものはどれか。またこれらの命題の相互関係を述べよ (授業では芋づる式に証明したが、どういう順番でつながっているか)。

9.　(1) $\mathbb{R}^n$ の開集合について、「位相の公理」と呼ばれる定理を書け。(2) $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるためには、f に何を仮定すれば良いか (答はただ一つに限らないが、授業で紹介した定理ではどうなっているか)。

10.　次の定理を書け。
(1) 逆関数定理　(2) 陰関数定理　(3) Lagrange の未定乗数法

∞.　問 **3〜10** について、それぞれ例をあげよ。

「定義を書け」という問題でよくある答案へのツッコミ

例えば「$\mathbb{R}^n$ の開集合の定義を書け」という問題に対して、次のような 1 行答案がある。

$$(\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$$

これは実は突っ込みどころ満載で、バツにはしないかもしれないが、とても満点はあげられない。

- 登場人物である Ω の紹介がない。「$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。」などの前フリが必要である。
- 何が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるのか書く必要がある。つまり「Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合」というフレーズか、それと同等のものが必要である。**主語を書きなさい** と言っておく。

定義を書くためには、「○が□であるとは、△が成り立つことをいう」のような、普段はあまり使わない独特の言い回しが必要になる。それを使うのが嫌なのか、例えば次のように書く答案がある。

「Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合<u>ならば、</u>$(\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$」

「Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合<u>とするとき、</u>$(\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega.$」

どちらも 100% 正しい主張であるが、定義にはなっていない。記号化すると

$$\Omega \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の開集合} \Rightarrow ((\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega$$

となるだろうが、一方向 $\Rightarrow$ であるのが非常にまずい。定義するときは、**両方向** $\Leftrightarrow$ である。(つまり、この条件を満たす以外に、$\mathbb{R}^n$ の開集合というものはない、ということを明言する必要がある。)

そこで次のような表現を使う場合がある。

> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。$(\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つとき、かつそのときに限り、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるという。

こう書いてもらうと満点に出来るが、最近はこの「◯◯が成り立つとき、かつ<u>そのときに限り</u>〜」という表現を使う人が (数学書の中でも) 減ったような気がする。何となくいかめしい？

この講義で採用している表現を使うと、

> $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$(\forall x \in \Omega)\ (\exists \varepsilon > 0)\ B(x;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つことをいう。

となる。

解答

1. (1) $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合　(2) $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合　(3) $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合　(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合　(5) $\mathbb{C}$ は複素数全体の集合

2. (1) $[1,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x\le 2\}$　(2) $(1,2)=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<2\}$　(3) $[1,2)=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x<2\}$　(4) $(1,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x\le 2\}$　(5) $(1,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x\}$　(6) $[1,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x\}$　(7) $(-\infty,2]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 2\}$　(8) $(-\infty,2)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$　(9) $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$　(10) 実数と ∞ は等しくならないから。

3.

(1) $A\subset\mathbb{R}$ とする。A が上に有界であるとは、$(\exists U\in\mathbb{R})\ (\forall x\in A)\ x\le U$ が成り立つことをいう。

(2) $A\subset\mathbb{R}$ とする。A が下に有界であるとは、$(\exists L\in\mathbb{R})\ (\forall x\in A)\ L\le x$ が成り立つことをいう。

(3) $A\subset\mathbb{R}, U\in\mathbb{R}$ とする。U が A の上界であるとは、$(\forall x\in A)\ x\le U$ が成り立つことをいう。

(4) $A\subset\mathbb{R}, L\in\mathbb{R}$ とする。L が A の下界であるとは、$(\forall x\in A)\ L\le x$ が成り立つことをいう。

(5) $A\subset\mathbb{R}, S\in\mathbb{R}$ とする。S が A の上限であるとは、次の 2 条件が成り立つことをいう。
(a) S は A の上界　(b) $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x\in A)\ S-\varepsilon<x$

(別解「A の上界全体の集合の最小値を A の上限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(6) $A\subset\mathbb{R}, I\in\mathbb{R}$ とする。I が A の下限であるとは、次の 2 条件が成り立つことをいう。
(a) I は A の下界　(b) $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x\in A)\ x<I+\varepsilon$

(別解「A の下界全体の集合の最大値を A の下限という。」もあるが、証明に使うときは上の書き方が便利。)

(7) $A\subset\mathbb{R}$ とする。A が有界であるとは、$(\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall x\in A)\ |x|\le R$ が成り立つことをいう。

(8) $A\subset\mathbb{R}, M\in\mathbb{R}$ とする。M が A の最大値であるとは、$M\in A$ かつ $(\forall x\in A)\ x\le M$ が成り立つことをいう。

(9) $A\subset\mathbb{R}, m\in\mathbb{R}$ とする。m が A の最小値であるとは、$m\in A$ かつ $(\forall x\in A)\ m\le x$ が成り立つことをいう。

4. 当たり前であるが、(1) が重要 (この講義の理解には必要不可欠)。

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $a\in\mathbb{R}$ とする。$\{a_n\}$ が a に収束するとは、$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon n\ge N)\ |a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ と表す。

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界とは、$(\exists U\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\le U$ が成り立つことをいう。

(注: 言い換えると集合 $\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ が $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合である、ということである。)

(3) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界とは、$(\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\le R$ が成り立つことをいう。

(4) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加であるとは、$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\le a_{n+1}$ が成り立つことをいう。

(5) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が狭義単調増加であるとは、$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n<a_{n+1}$ が成り立つことをいう。

(6) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が ∞ に発散するとは、$(\forall U\in\mathbb{R})\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)$ $a_n\geq U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ と表す。

(7) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列であるとは、数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ で、$(\forall k\in\mathbb{N})\ n_k\in\mathbb{N}\wedge n_{k+1}>n_k$ を満たすものが存在して、$(\forall k\in\mathbb{N})\ b_k=a_{n_k}$ が成り立つことをいう。

(8) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が数列、$A\subset\mathbb{R}$ とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 内の数列であるとは、$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\in A$ が成り立つことをいう。

5. 数列とほとんど同じである (それを見せるために、あえて書いた)。

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列, $a\in\mathbb{R}^n$ とする。$\{a_n\}$ が a に収束するとは、$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in\mathbb{N})\ (\forall n\in\mathbb{N}\colon$ $n\geq N)\ |a_n-a|<\varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ と表す。

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^n$ の点列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界とは、$(\exists R\in\mathbb{R})\ (\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n|\leq R$ が成り立つことをいう。

(3) **4.** の (7) の中の「数列」を「点列」で置き換えれば良い。

(4) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点列、$A\subset\mathbb{R}^n$ とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が A 内の点列であるとは、$(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n\in A$ が成り立つことをいう。

6. (1), (2) は非常に重要で、この講義の理解には必要不可欠。典型的な連続関数として、多項式関数、有理関数 (ただし分母が 0 でない、定義域の範囲で) は重要なので、きちんと認識できるため、(3), (4) はマスターしないとマズい。

(1) $\Omega\subset\mathbb{R}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\Omega}$, $A\in\mathbb{R}$ とする。$x\to a$ のとき $f(x)$ が A に収束するとは、$(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)\ (\forall x\in\Omega\colon\ |x-a|<\delta)\ |f(x)-A|<\varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x\to a}f(x)=A$ と表す。

(2) $\Omega\subset\mathbb{R}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\Omega$ とする。f が a で連続であるとは、$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つことをいう。

(3) ある自然数 n と $n+1$ 個の実数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ を用いて、$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ と表せる x の式を x の (実係数) 多項式と呼ぶ。

(4) x の実係数多項式全体の集合を $\mathbb{R}[x]$ と表す。言い換えると、

$$\mathbb{R}[x]=\left\{p(x)\ \middle|\ (\exists n\in\mathbb{N})(\exists(a_0,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1})\ p(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^{n-j}\right\}.$$

(5) $r(x)$ が x についての実係数有理式であるとは、実係数多項式 $p(x)$, $q(x)$ が存在して $r(x)=\frac{q(x)}{p(x)}$ が成り立つことをいう。

(高校流で説明すると、分母分子が整式である分数式のこと。)

(6) $\Omega\subset\mathbb{R}$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $a\in\overline{\Omega}$ とする。$x\to a$ のとき $f(x)$ が ∞ に発散するとは、$(\forall U\in\mathbb{R})\ (\exists\delta>0)$ $(\forall x\in\Omega\colon\ |x-a|<\delta)\ f(x)>U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ と表す。

(7) $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。$x \to \infty$ のとき $f(x)$ が A に収束するとは、$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists U \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in \Omega\colon\ x > U)$ $|f(x) - A| < \varepsilon$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ と表す。

(8) $\Omega \subset \mathbb{R}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ とする。$x \to \infty$ のとき $f(x)$ が ∞ に収束するとは、$(\forall U \in \mathbb{R})$ $(\exists U' \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in \Omega\colon\ x > U')$ $f(x) > U$ が成り立つことをいう。このことを $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ と表す。

7.

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとは、$(\forall x \in A)$ $(\exists \varepsilon > 0)$ $B(x;\varepsilon) \subset A$ が成り立つことをいう。ただし $B(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとは、A の補集合が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。ただし A の補集合とは、$A^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin A\}$ のことをさす。

(3) $A \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、$\overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\}$ を A の閉包と呼ぶ。ただし $B(x;\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < \varepsilon\}$.

8.

(1) $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界かつ、空集合でないならば、A の上限が存在する。

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が上に有界かつ単調増加な数列であるならば、ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ が成り立つ。

(3) $(\forall a > 0)$ $(\forall b > 0)$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $na > b$.

(4) $I_n = [a_n, b_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ が減少する $\mathbb{R}$ の閉区間 $(a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n,\ I_{n+1} \subset I_n)$ ならば $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. 特に $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば、$(\exists c \in \mathbb{R})$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{c\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$.

(5) $\{a_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の点列で、有界ならば、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち各項が自然数である狭義単調増加な数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と、$a \in \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ が成り立つ。

(6) K は $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合で、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f は K で最大値を持つ (f の値域 $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ の最大値が存在する)。すなわち $(\exists a \in K)$ $(\forall x \in K)$ $f(a) \geq f(x)$.

(7) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、$f(a) = f(b)$, f は (a,b) で微分可能ならば、$(\exists c \in (a,b))$ $f'(c) = 0$.

(8) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、f は (a,b) で微分可能ならば、$(\exists c \in (a,b))$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

9. (1) (a) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(b) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が、$(\forall \lambda \in \Lambda)$ U_λ は $\mathbb{R}^n$ の開集合、を満たすならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。 (c) U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1 \cap U_2$ も $\mathbb{R}^n$ の開集合である。(2) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続であること。

この **9** の閉集合版も重要である。(1) では、「開集合」を「閉集合」に、$\bigcup$ を $\bigcap$ に、$\cap$ を $\cup$ に変える。(2) では、「開集合」を「閉集合」に、$<$ を $\leq$ に、$>$ を $\geq$ に、$\neq$ を $=$ に変える。

10. 講義ノートの付録 D 節に「陰関数定理を覚える」という説明を書いてある (pp. 126 辺り)。

(1) (**逆関数定理**) Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級、$a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ ならば、($\exists U$: a を含む開集合) ($\exists V$: $b = f(a)$ を含む開集合) $\widetilde{f} = f|_U\colon U \to V$ を $\widetilde{f}(x) = f(x)$ $(x \in U)$ で定めると $\widetilde{f}$ は全単射で、逆関数 $\widetilde{f}^{-1}\colon V \to U$ も C^1 級である。

(2) (**陰関数定理**) Ω は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の開集合、$F\colon \Omega \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}^n$ は C^1 級、$(a,b) \in \Omega$, $F(a,b) = 0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ が成り立つとする。このとき、a を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合 U, b を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V, C^1 級の関数 $\varphi\colon U \to V$ で、以下の (i)–(iv) を満たすものが存在する。

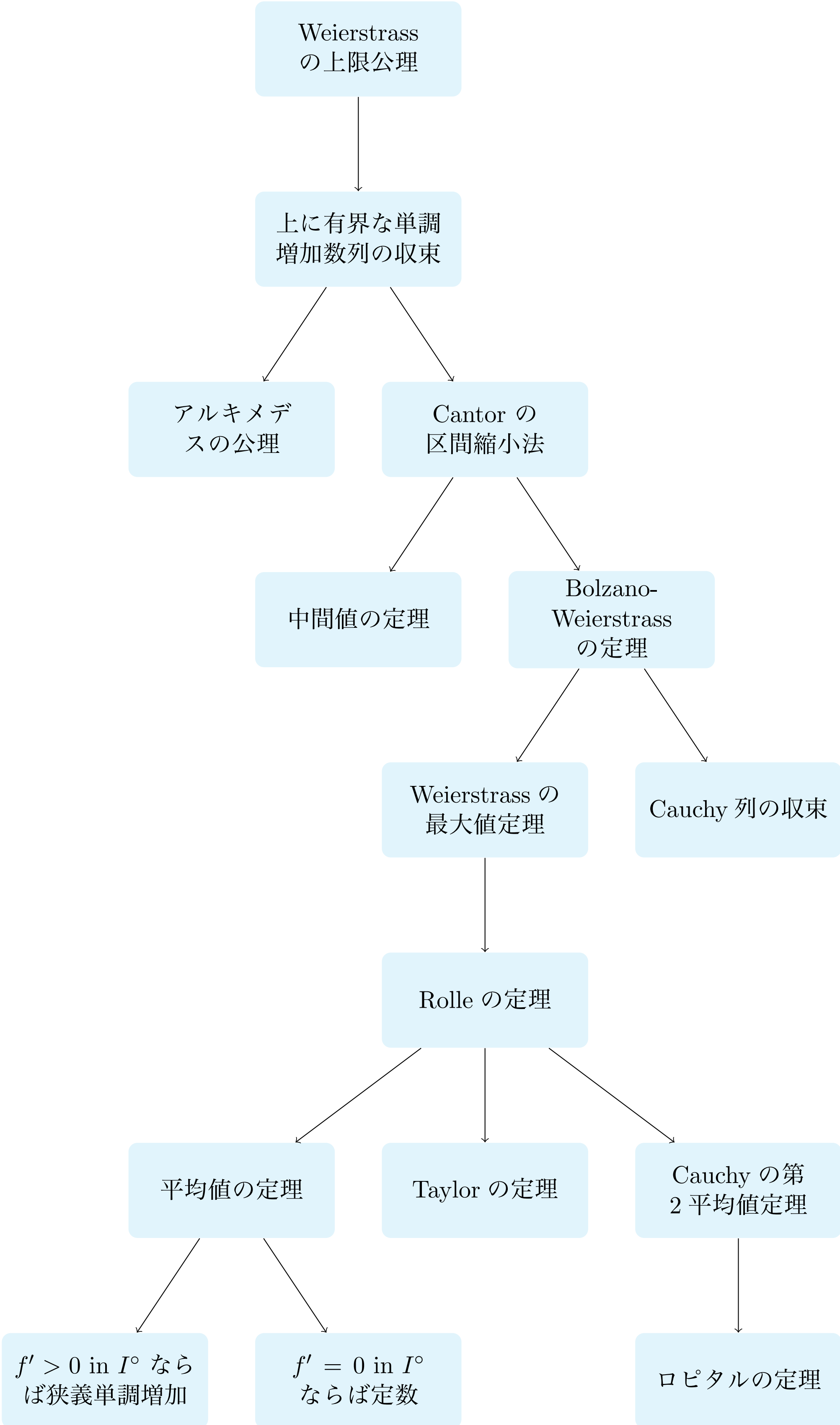
(i) $U \times V \subset \Omega$.

(ii) $\forall (x,y) \in U \times V$ について、$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$.

(iii) $\varphi(a) = b$.

(iv) $\forall x \in U$ について、$\varphi'(x) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$.

(実は (iii) は仮定 $F(a,b) = 0$ と (ii) から出るし、(iv) も後から合成関数の微分をするだけで出せるので、絶対に必要なのは (i) と (ii) だけである。)



最初の Weierstrass の上限公理のみ証明していない (それもあって「公理」と呼んでいる。)。
(2019/8/3 加筆) 2016 年度以降は、アルキメデスの公理を Weierstrass の上限公理から直接導くように

変更した。