数学解析

月曜 1 限, at 413 教室

桂田 祐史 (かつらだ まさし)
katurada@meiji.ac.jp, 910 号室
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/

2014 年 4 月 14 日, 2020 年 7 月 11 日

シラバスは http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/2020syllabus.pdf
この PDF 文書はしおりつきです。

目 次

はじめに

この文書は、明治大学現象数理学科 2 年春学期の講義科目「数学解析」のための講義ノートである。

「数学解析」の内容は、微分積分学に現れる極限について、定義と基本的な性質を解説するというものである (より詳しいことはシラバスを読んで下さい)。ここに書かれていること自体が重要ということもあるが、この講義を通じて極限を扱う議論に慣れてもらって、さらに進んだこと (例えばトポロジー、関数解析) の学習に役立つように[1]、というねらいがある。

講義ノートを書いた目的は大まかに二つ、(1) 私自身の授業の準備のためと、(2) 履修している学生の学習の補助資料とするためである。

限られた時間で講義しているため、内容をある程度スキップする羽目になるのは仕方がないが、その際に「詳しいことは講義ノートに書いてあるので参考にしてください」と言う (言い訳する) ことにしている。

いわゆる行間はあまり空けないようにして書いた (書いている)。数学のテキストには、テキストごとに「程よい行間の幅」があると考えているが、この科目を履修している学生には、極限について初めて触れる人が多いことを考慮して、行間の幅は小さいのが適当と判断した[2]。

記号

1 年春学期の「数理リテラシー」の記号を用いる (桂田の講義ノートの PDF は http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/literacy/ にある)。

1 年秋学期の「数学の方法」の履修も前提とする。言葉遣い、記号に多少の食い違いがあるかもしれないが、おそらくすぐに慣れると思われる (もし納得いかなければ遠慮なく質問して下さい)。

論理の記号

論理についての参考書としては、新井 [1] を推奨する。

- 「ならば」が「数理リテラシー」では $\Rightarrow$ で、「数学の方法」では $\to$ となっている。
- 命題や条件を式で表したものを (桂田の) 「数理リテラシー」では「論理式」と呼んだが、「数学の方法」では「形式言語」と呼んでいた。
- $\forall x\ P(x)$ は、「$\left\{\begin{array}{l}\text{任意の}\\\text{すべての}\end{array}\right\}$ x に $\left\{\begin{array}{l}\text{対して}\\\text{ついて}\end{array}\right\}$ $P(x)$ (が成り立つ、である)。」と読む。
- $\exists x\ P(x)$ は、「ある x が存在して $P(x)$ (が成り立つ)。」と読む。

[1]数学解析で学ぶ事実そのものも (トポロジーや関数解析で基本的なので) 重要であるが、勉強の仕方を体得することがそれと同じくらい重要である。

[2]自分で行間が空いていることを察知して、それを自力で埋めることで力が身につくという考え方があり、自分自身の学生時代を振り返って、100% 賛同はするけれど、一方で、行間の埋め方を自分で発見することはかなり難しく、何かの機会に目にすることで初めて疑問が解消したという経験が珍しくなかった。よほど優秀か (私はこれに該当しない)、あるいは粘り強いか (私は自分が解決出来ていないことを覚えていることが多く、この点は合格かもしれない)、どちらか満たされていないと、内容が正しく理解出来ないことになる。というわけで、行間が大きく空いているテキストは、大勢の人が履修する低学年向きの科目としては好ましくないと考えている。

- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))$ を $(\forall x : P(x))\ Q(x)$ とも書く。例えば「$P(x)$ を満たすような任意の x に対して $Q(x)$ が成り立つ」のように読む。色々な省略記法が使われる。
  - $P(x)$ が $x \in A$ という条件である場合、$(\forall x \in A)\ Q(x)$ とも書く。「A の任意の要素 x に対して $Q(x)$」と読む。$x \in \mathbb{R}$ の場合は「任意の実数 x に対して $Q(x)$」と読む。
  - $P(x)$ が $x > 0$ という条件である場合、$(\forall x > 0)\ Q(x)$ とも書く。「任意の正の数 x に対して $Q(x)$」と読む。
- $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ を $(\exists x : P(x))\ Q(x)$ と書く。例えば「$P(x)$ を満たすような x が存在して $Q(x)$ が成り立つ」のように読む。色々な省略記法が使われる。
  - $P(x)$ が $x \in A$ という条件である場合、$(\exists x \in A)\ Q(x)$ とも書く。「A のある要素 x が存在して $Q(x)$」と読む。$x \in \mathbb{R}$ の場合は「ある実数 x が存在して $Q(x)$」と読む。
  - $P(x)$ が $x > 0$ という条件である場合、$(\exists x > 0)\ Q(x)$ とも書く。「ある正の数 x が存在して $Q(x)$」と読む。
- $\exists$ の後に s.t. (such that) をつけるテキストも多いが、つけないことにする (日本語の講義ノートなので…)。例えば「$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n\varepsilon > 1$」でなく「$(\exists n \in \mathbb{N})\ n\varepsilon > 1$」と書く。
- 自然数 (1 以上の整数) 全体の集合を $\mathbb{N}$ と表す。
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ のように $\forall$ が連続するときは、$(\forall x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。
- 同様に $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$ のように $\exists$ が連続するときは、$(\exists x, y \in \mathbb{R})$ のように略して書く。

集合の記号

$\emptyset = \varnothing =$ 空集合,
$A \cup B = A$ と B の合併集合 $= \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$,
$A \cap B = A$ と B の共通部分 $= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$,
$A \setminus B = A$ から B を引いた差集合 $= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$,
$A^c = A$ の補集合 $= X \setminus A$　(ただし X を全体集合とする),
$A \times B = A$ と B の直積集合 $= \{z \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)\ z = (x, y)\} = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$,
$2^A = A$ のベキ集合 $= \{C \mid C \subset A\}$,
$A^B = \{f \mid f\colon B \to A\}$.

$\mathbb{N} =$ 自然数全体の集合, $\mathbb{Z} =$ 整数全体の集合, $\mathbb{Q} =$ 有理数全体の集合, $\mathbb{R} =$ 実数全体の集合, $\mathbb{C} =$ 複素数全体の集合.

以下 a と b は実数で、$a < b$ を満たすとする。

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}, \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}, \\
(-\infty, \infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

この講義で導入する記号として

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

$a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < r\}$$

とおき、a を中心とする半径 r の開球と呼ぶ。

注意 0.1 $\mathbb{R}^2$ の点は、普通 (a, b) $(a, b \in \mathbb{R})$ と書かれるが、これは開区間 $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ と混同される恐れもある。(a, b) が $\mathbb{R}^2$ の点を表しているのか、$\mathbb{R}$ の区間を表しているかは、前後を読めば分かる (文脈で判断できる) はずではあるが、そもそも読者にそのような負担を強いることは反省の必要がありそうである。実はフランスでは、区間を次の記号で表すことでこの問題を解決している:

$$
\begin{aligned}
]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}, \\
[a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \\
]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}, \\
]a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
[a, \infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}.
\end{aligned}
$$

なかなか良い、と思うけれど、講義で採用する勇気がない。■

max, min

最大値を max, 最小値を min という記号で表す。

$$\max\{a, b\} := \begin{cases} a & (a \ge b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}). \end{cases}$$

例えば

$$\max\{1, 2\} = 2, \quad \max\{2, 2\} = 2.$$

2 個以上の実数に対しても同様に用いる。

$$\max\{1, 2, 3\} = 3.$$

$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対しても、$\max A$ という記号を用いる。

$$\max\left\{x^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 2\right\} = 4.$$

論理の記号を使うと、$A \subset R$, $M \in \mathbb{R}$ に対して

$$M = \max A \quad \Leftrightarrow \quad ((\forall x \in A) x \le M) \land M \in A.$$

集合についてのある命題

任意の集合 A, B に対して、

$$A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B^c.$$

(対偶) 任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B \ne \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \not\subset B^c.$$

絶対値の常識

$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|a| := \begin{cases} a & (a \ge 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

とおき、これを a の絶対値 (the absolute value of a) と呼ぶのであった。

このこと自体は中学校以来知っていると思うが、解析学では絶対値の不等式評価が多用され、その種の議論にはほとんどの人がまだ慣れていないかもしれない。

(i) $(\forall a \in \mathbb{R})$ $|a| \ge 0$, 等号は $a = 0$ のとき、そのときに限り成立する。

(ii) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ $|ab| = |a|\,|b|$.

(iii) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ $|a + b| \le |a| + |b|$.

(iv) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ $|a - b| \ge \big||a| - |b|\big|$.

(v) $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$.

((iii), (iv) の $a + b$, $a - b$ は本当はどちらでも良いのだけど…つまり、$|a - b| \le |a| + |b|$, $|a + b| \ge ||a| - |b||$ が成り立つ。)

(iv) の証明: $|a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b|$ より $|a - b| \ge |a| - b$. a と b を入れ替えて $|a - b| = |b - a| \ge |b| - |a|$. ゆえに $|a - b| \ge ||a| - |b||$. ■

これらのベクトル版も成り立つが、それは後で証明する。

「お説教」

心構え

まだ、勉強始めていないうちにお説教はおかしいけれど、毎年一定数の人がこうなるので、今が４月だとすると「へー、そうなんだ」くらいに受け取って下さい。
一番大事なことは

人の話をちゃんと聞く

文章をちゃんと読む

ことである。
大事なことは、何度も書いたものを見せるし、何度も話すし、それが大事であると言う (過保護であると思うけれど…本当は何度も出て来たら「これは大事なんだ」と気がつくべきである)。ちゃんと聞いていれば、ちゃんと読んでいれば身につくはずだ。
「ちゃんと」について説明する (過保護であると思うけれど)。聞いたり、読んだりして、納得することが必要だけれど、中には分からないこともあるだろう (当然である)。そういうときは、分かるように努力すること。その場で出来なければ、印をつけておいて、後で解明するように努力する。

論理を読み取り、書けるようになること

宿題や期末試験の答案を見ていると、正解らしきものから、数式だけ抽出して、ランダムに配列し直した (結果、むちゃくちゃである) としか感じられないものが少なくない。
もともと式しか読んでいないのかもしれないが、それはまずい。計算問題が主体の場合、それでも何とかなったのかもしれないけれど、この科目はあいにく計算問題がほとんどない。

どのように勉強するのか

新しい言葉、記号は、最初はとにかく定義を頭に入れるように努力する。
とにかく頭に入れないと考えることすら出来ないので、頭に入れる。
声に出して読んだり、書いたりします。ぼーっと見ているだけでは効果は薄く、何らかの形でアウトプットします。
そのままではすぐに忘れてしまう可能性が高いけれど、何とか頭に入っているうちに、その言葉や記号を使う議論を読んで、理解するように努めます。それを何度かやっていると、定義が頭に定着します (そうなることを期待しましょう)。
次にその言葉、記号が現れたとき、覚えていればおめでとう。忘れていたら、もう一度やり直し。
覚え方については、個々人の特性によって向き不向きがあるはずで、自分に合ったやり方を工夫するように (単語帳ならぬ定義帳を作ったり、何かアプリを利用したり…私は大学１年生のとき、数学の本を読んでいて、既に出て来た言葉の定義や定理が思い出せなかったときは、定義や定理を筆写しました。そのせいで、その頃勉強した本は書き込みで一杯です。)。
やり方を間違えなければ、重要な言葉、記号は何十回 (ものによっては百回以上) 出て来て、繰り返し練習することになります。
その結果、覚えてしまう、というのが理想です。
言葉や記号の定義が頭に入っていないと、授業内容は意味不明なものになるはずです。
「期末試験だ、さあ覚えよう」はちょっと遅いです。

0　イントロダクション

0.1　解析学を学ぼう

この講義「数学解析」は解析学への入門がテーマである。

解析学とは、「極限を扱う数学」、「極限の論法を用いる数学」であると言われている (数学者の間で細部まで意見が一致しているわけではないが[3]、まあまあ受け入れられているようである)。

解析学とは極限の数学である

この講義では**初等段階の微分積分に現れる極限について取り扱う**。

日本の大学での微分積分学での極限の扱いは、ほとんど次の二つに大別される。

(a) 極限の性質を証明抜きで軽く説明 (紹介？) してすませる (大抵の工学系の学科、数学科以外の多くの理学系の学科)。

(b) 極限をきちんと定義し、その性質を定理の形に述べて証明する (数学系の学科の標準)。

(脱線になるが、高等学校の数学は (a) の立場である。)

現象数理学科では、この二つのどちらとも異なる第三の道を採った。極限に関する事実の詳しい説明 (大まかに言って「証明」) はとりあえず後回しにして、微積分の主要な結果を一通り学んでしまう (1 年次の「微積分 I」,「微積分 II」—　これで「計算はできる」ようになる, なお 2 年次の「電磁気とベクトル解析」も微積分に含まれると考えること)。それから極限に関する事項をまとめて学ぶ、というものである。

選択科目の「数学の方法」で、数列の極限の基本的な部分が詳しく述べられているが、この講義ではもう少し微積分寄りの (実践的な) 説明を行なう。

0.2　なぜ解析学？

なぜ解析学が必要なのか。一言で説明すると、数学の中には、極限を用いることで表現できる、とらえられる (逆もほぼ正しくて、極限を使わずにとらえることがむつかしい) ものがたくさんある、ということである。

微分係数の定義: f の a における微分係数とは

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

連続性の定義: f が a で連続であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

積分の定義: (ここは大雑把に書く)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

[3]中には解析学が何であるか長年意識したことがなくて、思い立って調べてみたら、色々な本にほぼ共通したことが書いてあって驚いた、という解析の大先生もいました (笑)。

中間値の定理: $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で, $f(a)<0$, $f(b)>0$ ならば、$\exists c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=0$. (証明には色々な方法があるが、例えば区間縮小法を用いるとき、c はある数列の極限として得られる。)

Weierstrass の最大値定理[4]: $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば、f は $[a,b]$ で最大値を取る。すなわち $\exists c\in[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$ $f(c)\ge f(x)$.
(この c はある数列の極限として得られる。)

平均値の定理: $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で、(a,b) で f が微分可能ならば、$\exists c\in(a,b)$ s.t. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
(普通の微分積分のテキストでは、Rolle の定理を用いて証明され、Rolle の定理は Weierstrass の最大値定理を使って証明される。要するに、この c もある数列の極限として得られる。)

当然、平均値の定理の一般化である Taylor の定理も然り、ということになる。

Taylor 展開 (冪級数 — 微積分にも現れるが「複素関数」で中心的な話題):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.\quad (級数の和は \sum_{n=0}^{\infty}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} と定義されるので極限である)$$

例えば

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n.$$

e^x は超越関数と呼ばれるものの一種で、有限回の四則演算だけでは表現出来ないが、極限を用いることで表現出来ているわけである (部分和の計算には四則演算で十分である)。他の例としては、

$$\pi=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=4\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)$$

がある。π は無理数 (特に超越数と呼ばれるもの) であるが、有理数列の極限として表せる。

Fourier 級数展開 (「数学とメディア」、「信号処理とフーリエ変換」で学ぶ): $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ が周期 2π の周期関数で、ある程度の滑らかさを持つならば

$$a_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n:=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

とおくとき、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad (x\in\mathbb{R}).$$

陰関数定理は、$F(x,y)=0$ という方程式から、$y=\varphi(x)$ となる関数 φ の存在を主張する定理で、幾何や解析の分野で重要な応用がたくさんある。その証明の主要部分は方程式の解の存在証明で (つまり y について解く)、(もうここまで来れば、分かってもらえそうだけど) その解は極限として得られる。

代数学の基本定理「複素係数の n 次多項式 $a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ は複素数の範囲に少なくとも一つの根を持つ」は、名前に「代数学」とついているが、その証明は解析学を使って証明するのが普通である (Weierstrass の最大値定理を用いれば証明は難しくない)。

余談になるが、常微分方程式の初期値問題の解の存在の証明は、ある関数列を作り、その極限が存在し (ここが難しい)、それが問題の解になることを示す (ここは割と簡単)、というストーリーである。

[4]実は、ほとんどのテキストで、この定理には名前がついていない。しかし、名無しのゴンベーだと話がしづらい (名前や記号をつけると、その後の話がスムーズに進むということが多い) ので、この講義では少し強引でも名前をつけることにする。

0.3　勉強の仕方について

極限が重要なのであるが、それをどうやって計算するかという計算方法の話をするのでなくて、どういう場合に極限の存在が保証されるか、というところに話の重点がある。計算問題を解くというやり方では勉強できない。証明を読んで理解できるようになること、簡単な定理は自分で証明できるようになることが目標である。

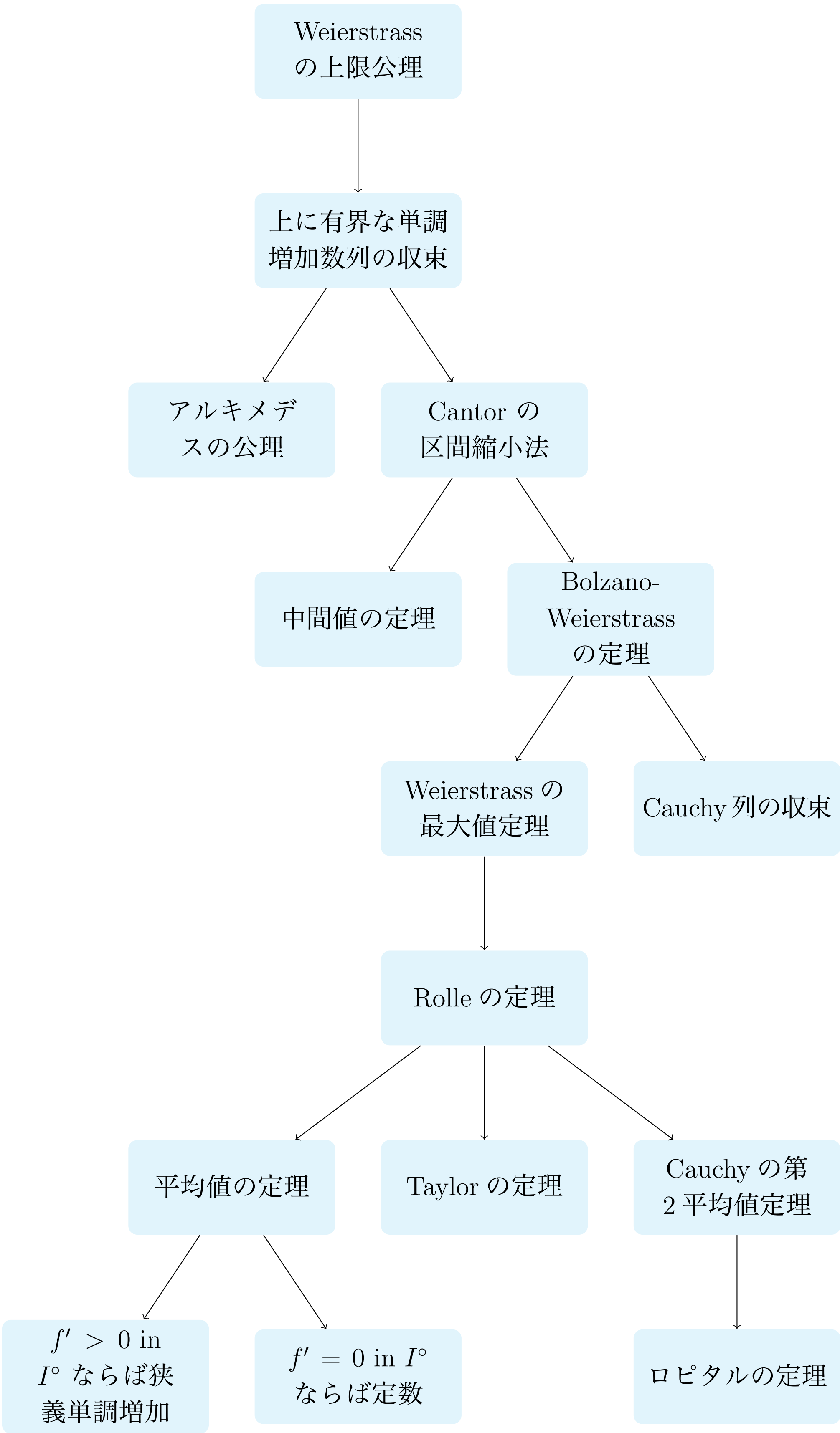
授業の復習をすること。具体的には、ノートを読んで理解できるか確認する、新しく出て来た用語の定義を覚える。

微分積分段階での極限については、杉浦 [2] が定番のテキストとして勧められる (しばしば辞書的と言われている)。それよりかみ砕いた説明を探している人には、田島 [3] を見ることを勧める。発展の歴史が知りたい場合は中根 [4] を勧めておく。いずれも定評のある力作である。

(2016 年追加) この講義も 3 年目になり、これまで知らなかった本も目にする機会を持てた。黒田 [5] は、教育的配慮が行き届いた微積分のテキストであるが、極限の扱いについていくつか参考になる点があった。

赤 [6] には実数の連続性について、徹底的とも言える議論が載っている。こう書くと、難しそうに感じて敬遠する人が出そうだが、実際に読んだ人は「説明がていねいで、とても分かりやすい」という感想をもらしたりする。(短く切り上げようとして中途半端な説明をするよりも、手間を惜しまずに、じっくり説明する方が、結果的には分かり易くなる、ということなのかもしれない。)

[6] の参考文献紹介を見て思い出したが、古くからある高木 [7](最近入手可能になった), 彌永 [8], [9] も重要なテキストである。



この講義では、最初の Weierstrass の上限公理は証明しない (それもあって「公理」と呼ぶ)。

図 1: この講義前半の主要な定理の間の関係

1　実数の性質の復習, 有界集合, 上限と下限

「数学の方法」を受講してマスターした人にとっては、この節に書いてあることは復習かもしれないが、記号 (特に論理式) に慣れる意味もあるので、我慢して学んで下さい。

1.1　実数の性質の簡単なまとめ

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の持つ性質については、中学高校以来何となく知っているであろうし、「数学の方法」でも取り扱われたはずである。

加法と乗法が自由に出来て (体である)、それが大小関係と両立している (順序体である) だけでなく、実数の連続性 (次項で説明する) と呼ばれる性質も持つ。すなわち、次の 1〜3 を満たす。

1. $K=\mathbb{R}$ は通常の加法、乗法により**体** (**可換体**, field) をなす (加法について可換群、零元を除いて乗法について可換群をなし、分配法則を満たす)。

   (1) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)+c=a+(b+c)$

   (2) $(\exists 0_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a+0_K=0_K+a=a$

   (3) $(\forall a\in K)\ (\exists a'\in K)\quad a+a'=a'+a=0_K$

   (4) $(\forall a,b\in K)\quad a+b=b+a$

   (5) $(\forall a,b,c\in K)\quad (ab)c=a(bc)$

   (6) $(\exists 1_K\in K)\ (\forall a\in K)\quad a1_K=1_Ka=a$

   (7) $(\forall a\in K\setminus\{0_K\})\ (\exists a''\in K)\quad aa''=a''a=1_K$

   (8) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a+b)c=ac+bc,\ a(b+c)=ab+ac$

   (9) $(\forall a,b\in K)\quad ab=ba$

   ($\mathbb{R}$ では加法の単位元 0_K は通常の 0 であり、乗法の単位元 1_K は通常の 1 である。)

2. $K=\mathbb{R}$ は通常の順序 $\le$ により**順序体**をなす (体であり、全順序集合であり、順序関係が体の加法・乗法と両立する)。

   (1) $(\forall a,b\in K)\quad (a\le b\lor b\le a)$　(任意の 2 元は比較可能)

   (2) $(\forall a,b\in K)\quad (a\le b\land b\le a\Rightarrow a=b)$

   (3) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a\le b\land b\le c\Rightarrow a\le c)$

   (4) $(\forall a,b,c\in K)\quad (a\le b\Rightarrow a+c\le b+c)$

   (5) $(\forall a,b\in K)\quad (0\le a\land 0\le b\Rightarrow 0\le ab)$

3. 「**実数の連続性**」と呼ばれる性質を持つ。これは次項で説明する。

(ここに書いたような説明の仕方に慣れていない人が多いと想像する。現時点ではピンと来なくても気にする必要はない。例えば「代数」を受講すると群について学ぶが、そのとき、こういうやり方に慣れることが出来ると期待できる。)

1.2 実数の連続性

(注意: 「連続性」というと「関数の連続性」が良く出て来るが、「実数の連続性」はそれとは異なる概念である。)

実数の連続性を、感覚的に説明 (?) すると、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ にすき間がないこと (だから適当な条件の下で数列や関数の極限の存在が保証される)、となるだろうか。

実数の連続性の数学的な表現の仕方には色々あるが、代表的なものを 3 つあげておく。

(a) **Dedekind**(デデキント) **の公理** (内容の説明は省略 — 聞いたことのある人のために名前だけ出す)

(b) **Weierstrass**(ワイエルシュトラス) **の上限公理** (後述)

(c) **Archimedes**(アルキメデス) **の公理** (後述) と**完備性** (後で詳述するが、完備性とは「任意の Cauchy(コーシー) 列は収束する」こと)

(この辺の議論は細かくなるので、参考書に任せることにする。高木「解析概論」[10] が古典的な教科書で有名であるが、もう少し現代的な杉浦「解析入門」[2] [5]を推奨しておく。テキストによっては、これ以外の同値な条件 (例えば (d)「上に有界な単調増加数列は極限を持つ」など) をたくさんあげて、それらの同値性を証明しているものがあるが、耳学問[6]としてはこの 3 つくらいで良いであろう。)

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ も順序体であるが、“有理数の連続性” は成立しない (これについては後述する)。$\mathbb{Q}$ で解析学を展開するのは不可能に近い。

解析の議論を展開していく場合、(c) や (d) が取扱いやすいようにも感じるが (解析学者は数列が好きだから)、数列の極限は後で定義するので、ここでは (b) を採用する ((a) は歴史的には、最初に登場して有名で (デデキント [11])、好きな数学者も多いようだが⋯)。

前置きが長くなったけれど、(b) を書いておこう。

> **定理 1.1 (Weierstrass の上限公理)** $\mathbb{R}$ の部分集合 A が空集合ではなく、かつ上に有界ならば、A は上限(じょうげん)を持つ。
> ($A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A は上に有界とすると、A の上限が存在する。)

この定理を理解するには、「上に有界」、「上限」という語の定義を知っている必要がある。順番が逆になるが、それは次項で解説する。

この命題は、$\mathbb{R}$ をきちんと定義すれば[7]証明することが出来る (すなわちこの命題は真であり、定理である) が、それを実行するのは手間がかかり、またそれをやっても初学者には分かりにくいので、この講義では、この命題が正しいことを認めて議論することにする。(これはこの講義に限ったことでもない。とりあえず正しいと認めて議論するという理由で、この命題を「公理」と呼ぶことにする。)

---

[5] この本は、微分積分学に関する定番の「辞書」なので、この本に親しんでおくと、後々他の場面で便利だろう、というのが勧める理由の一つにある。余計なことかも知れないが、辞書なので通読には適さないかもしれない (世の中には辞書を読むのが趣味という人もいるくらいで、向き不向きの問題かもしれないが)。学生に通読を勧めるのは数学者の自己満足だ、という数学者からのツッコミが入ることが多い。

[6] この辺りをきちんと学ぶのはかなりの時間がかかるので、特に興味のない人には、(今それを実行することは) 勧めない。

[7] ぴんと来ないかもしれないが、この講義では、実数を定義していない。定義していないものに関する命題を証明するのは (本当は) 不可能である。似たようなことは、極限についても言えて、高等学校の数学では極限を紹介するが、極限を定義していない。そのため極限に関する定理は、説明は出来るが、証明は高等学校では (原理的に) 出来ない。認めた定理を土台にして、そこから先だけ証明することは可能である。

1.3 上界, 上に有界, 上限, sup

最大値という概念を一般化した[8]上限という概念を導入する。

定義 1.2 (上界) $A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の**上界**(じょうかい) (an upper bound of A) であるとは、

$$(\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。

定義 1.3 (上に有界) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が**上に有界**(うえにゆうかい) (bounded from above) であるとは、A の上界が (少なくとも 1 つ) 存在すること、すなわち、

$$(\exists U \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in A) \quad x \leq U$$

が成り立つことをいう。

イメージとしては、A が上に有界とは、A のメンバー (要素) すべてが越えられない壁が (上の方に) ある、ということである。その壁のことを A の上界と呼ぶが、それは一意的に定まるものではない。U が A の上界であるとき、$U' := U + 1$ とおくと、U' も A の上界であるから。

(はっきり決まっているわけでないから、「壁」という言い方は不適当かもしれない…)

問 1. $A = [1, 2)$ とするとき、A は上に有界であることを示せ。

問 2. $A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。U が A の上界でないという条件を (否定の記号 $\neg$ を使わず) 論理式で表せ。

問 3. $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が上に有界ではないという条件を (否定の記号 $\neg$ を使わず) 論理式で表せ。

問 4. $A = \mathbb{R}$ とするとき、A は上に有界でないことを示せ。

これらの問の解答は、付録 A 節 (p. 123) にある。

(某年度の授業では、黒板に鉛直方向に伸びる数直線を描いて、色チョークで A をお絵描きして、別の色チョークでバッテンして、これも上界、あれも上界、…とやった。上界のうちでなるべく小さいものを探すことに意味がありそう…と言っておいて、以下に続く。数直線は普通は水平に描くけれど、上と下なのだから鉛直に描こう、と思っていて良く忘れます。)

A が空集合でなくて、上に有界であるとき、A の上界は無限個存在するけれど、A の上界全体には最小値が存在する。それを A の上限と呼ぶ[9]。すなわち、上限とは次のように定義される。

[8]後で証明するように、もし最大値が存在すればそれは上限である。一方、最大値が存在しないときにも上限が存在することがあるので (例えば $A = [1, 2)$ は最大値を持たないが、上限は 2)、そういう意味で「一般化」と言っている。

[9]そのため、古い本には、上限の別名として**最小上界** (the least upper bound) と書いてあるものがある。

定義 1.4 ($\mathbb{R}$ の部分集合の上限, 上限=上界の最小値) $A \subset \mathbb{R}$, $S \in \mathbb{R}$ とする。S が A の**上限**(じょうげん) (the supremum of A) であるとは、以下の (i) と (ii) が成り立つことをいう。

(i) S は A の上界である。すなわち

$$(\forall x \in A) \quad x \le S.$$

(ii) S より小さい数は A の上界ではない。すなわち

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) \quad x > S - \varepsilon.$$

(ii) が少し分かりづらいだろうから補足: S より少しでも小さい数はもう上界でない、ということは、S が上界のうちの最小値である、ということである (例え話: その点を取れば合格であり、それより低い点では合格しないという点は合格最低点である)。

繰り返しになるが、念のため書いておく (ようやく出て来る言葉の定義を説明し終わったので)。

再掲: 定理 1.1(Weierstrass の上限公理)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$, A は上に有界とするとき、A の上限が存在する。
(上に有界かつ空でない $\mathbb{R}$ の任意の部分集合は上限を持つ。)

問 5. ($\mathbb{R}$ の部分集合に関する) 次の用語の定義を書け。
(1) 上界　(2) 上に有界　(3) 上限

当たり前のことであるが念のため書いておく: 上限は上界である。

問 6. 上限は上界であることを示せ。

(注: このあたりで「問」にしていることを、授業では解説することが多い。この講義ノートで問にしてあるのは「少し考えてもらいたい」からである。解答は用意してあるので (問 A の場合は、p. 124 付近)、適宜読んで下さい。)

$A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$ とする。定理 1.1 から、A が上に有界であれば A の上限が存在するが、逆に A の上限が存在するならば (上限は上界であるから、上界が存在することになって)、A は上に有界である。

結局、$\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A について、

$$A \text{ が上に有界である} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ の上限が存在する} \tag{1}$$

が成り立つ。

読んだばかりのことを自分でアウトプットできるか、自発的にチェックするとよい。

問 7. $A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$ とするとき

$$A \text{ が上に有界である} \Leftrightarrow A \text{ の上限が存在する}$$

が成り立つことを示せ。

$A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$ とするとき、A の上界が存在するならば、それは無数にあることを上で注意したが、A の上限は存在するならば、一つしかない。

命題 1.5 (上限の一意性) $\mathbb{R}$ の部分集合の上限は一意である (もし存在するならば、1 つしかない)。

問 8. 命題 1.5 を示せ。

この命題により、「A の上限は S である」という言い方が出来るようになる[10]。

命題 1.6 (最大値は上限である) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が最大値を持てば、それは A の上限である。

証明 **最大値** とは何か、定義を復習する (こういう形では習っていないかもしれない)。$S \in \mathbb{R}$ が A の最大値であるとは、次の 2 条件が成り立つことをいう[11]。

(a) $(\forall x \in A) \quad x \le S.$

(b) $S \in A.$

上限の定義の (i) は (a) により満たされる。上限の定義の (ii) について: $\forall \varepsilon > 0$ に対して $S > S - \varepsilon$ (正の数を引けば小さくなる), また (b) より $S \in A$ であるから、(ii) が成立する ($x = S$ とすれば良い)。 ■

ゆえに A の最大値が存在する場合、それは A の上限であり、A は上に有界である (とても簡単)。

例 1.7 $X := \{1, 2, 3\}$ とする。(当然 $X \subset \mathbb{R}$ である。以下こういうことを書くのは省略するが、頭の中ではチェックすべきである。) 3 は X の最大値である (理由を説明できますか?)。ゆえに (命題 1.6 によって) 3 は X の上限である。ゆえに X は上に有界である。 ■

例 1.8 $Y := \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ とする。Y は最大値 1 を持つ。実際 $1 \in Y$ であり、また

$$(\forall x \in Y) \quad x \le 1$$

である (実際 $x \in Y$ ならば $(\exists n \in \mathbb{N})\ x = \dfrac{1}{n}$. $n \ge 1$ であるから、$x = \dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{1} = 1$)。一般に最大値は上限であるから、$Y$ の上限は 1. ゆえに Y は上に有界である。 ■

一方で、最大値が存在しない場合も上限は存在することがある。上限はそういう場合に役立つ概念である。

最大値は上限であるが、逆は必ずしも真でない

例 1.9 (最大値は存在しないが上限は存在する) $A = (-\infty, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$ とするとき、2 は A の上限である。実際

(i) 任意の $x \in A$ に対して、$x < 2$ であるから、$x \le 2$.

(ii) 任意の正の数 ε に対して、$x := 2 + \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$2 < x < 2 + \varepsilon$ であるから、$x \in A$ かつ $x < 2 + \varepsilon$.

[10] 一般に上界はたくさんあるので、「U は A の上界である」と言えても、「A の上界は U である」とは言えないことに注意しよう。これに対して、上限は一つしかないので、「S は A の上限である」、「A の上限は S である」は両方とも OK.

[11] 言葉で説明すると「S は、A のどの要素よりも大きいか等しいという性質を持つ、A の要素である」。念のため: 「どの要素」の中に S 自身も含まれるので「等しい」を入れる必要がある。

ゆえに 2 は A の上限である。■

問 9. $A := [1,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 2\}$ とするとき、2 は A の上限であることを示せ。

状況を図示して、上限のイメージ (たくさんある上界の最小値) をつかむことを勧める。

余談 1.10 (用語を定義する理由) 「上に有界」、「上限」という用語を定義することによって、Weierstrass の上限公理が簡潔に書けていることを理解しよう。それらの言葉を使わずに論理式だけで書くとどうなるか、試してみると良い。

$$(\forall A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset \wedge ((\exists U \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ x \le U))(\exists S \in \mathbb{R}) \cdots$$

書くのが難しい訳ではないが、読みにくく、理解するには時間がかかるであろう。プログラミングで言うと、まとまった処理は独立した関数にする、というのに近い。■

余談 1.11 (空集合の場合) (細かい話ではあるので、最初はスルーしても良い) $A = \emptyset$ とするとき、任意の実数は A の上界である (なぜでしょう？問にしておくかな。)。特に A の上界が存在することから、A は上に有界である。A の上界全体の集合は $\mathbb{R}$ であり、これは最小値を持たない (底が抜けている)。ゆえに A の上限は存在しない。つまり「空集合は上に有界であるが、空集合の上限は存在しない。」■

問 10. 任意の実数は空集合の上界であることを示せ。

極限を表すために lim という記号があったように、上限に対しても sup という記号がある。

定義 1.12 ($\mathbb{R}$ の空でない部分集合の sup) $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、

$$\sup A := \begin{cases} A \text{ の上限} & (A \text{ が上に有界のとき、つまり } A \text{ の上限が存在するとき}) \\ \infty & (A \text{ が上に有界でないとき、つまり } A \text{ の上限が存在しないとき}) \end{cases}$$

とおく。

問 11. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、$\sup A$ の定義を書け。

A の上限は $\sup A$ と書けるが、$\sup A$ は A の上限とは限らないことに注意しよう。この辺の事情は lim と似ている (数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散する場合、$\{a_n\}$ の極限は存在しないが、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$)。

問 12. $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体であるが、「有理数の連続性」は成り立たない。つまり $\mathbb{Q}$ の範囲内だけで上限を定義するとき[12]、

上に有界かつ空でない $\mathbb{Q}$ の任意の部分集合は ($\mathbb{Q}$ の範囲で) 上限を持つ

は成立しない。反例をあげよ。

[12] $A \subset \mathbb{Q}$, $S \in \mathbb{Q}$ とするとき、S が A の上限であるとは、(i) $(\forall x \in A)\ x \le S$, (ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in A)\ S - \varepsilon < x$ が成り立つことと定義すると、という意味である。$S \in \mathbb{Q}$ としていることに注意。

1.4 下界, 下に有界, 下限, inf

前項の「上界」、「上に有界」、「上限」と同様に、「下界」、「下に有界」、「下限」という言葉と、inf という記号が定義される。

定義 1.13 (下界, 下に有界) (1) $A \subset \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}$ とする。L が A の**下界** (a lower bound of A) であるとは、

$$(\forall x \in A) \quad L \leq x$$

が成り立つことをいう。

(2) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が**下に有界** (bounded from below) であるとは、A の下界が (少なくとも 1 つ) 存在すること、すなわち、

$$(\exists L \in \mathbb{R}) \quad (\forall x \in A) \quad L \leq x$$

が成り立つことをいう。

(3) $I \in \mathbb{R}$ が $A \subset \mathbb{R}$ の下限であるとは、次の (i), (ii) が成り立つことをいう。

(i) I は A の下界である。すなわち $(\forall x \in A)$ $I \leq x$.

(ii) I より大きい数は A の下界ではない。すなわち $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists x \in A)$ $I + \varepsilon > x$.

また $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とするとき、$\inf A$ という記号を

$$\inf A := \begin{cases} A \text{ の下限} & (A \text{ が下に有界であるとき}) \\ -\infty & (A \text{ が下に有界でないとき}) \end{cases}$$

で定義する。

問 13. $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ として、$-A := \{x \mid (\exists y \in A)\ x = -y\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) $S \in \mathbb{R}$ が A の上限であるという条件を論理式で表せ。

(2) $I \in \mathbb{R}$ が $-A$ の下限であるという条件を論理式で表せ。

(3) $S \in \mathbb{R}$ が A の上限であるならば、$-S$ は $-A$ の下限であることを示せ。

問 14. Weierstrass の上限公理を仮定して、$\mathbb{R}$ の空でない下に有界な部分集合は下限を持つことを示せ。(これから「上」についてだけ公理を仮定すれば十分であることが分かる。)

1.5 アルキメデスの公理

極限に関する議論をするためにめに、**アルキメデスの公理**[13] (the axiom of Archimedes, the Archimedean principle, the Archimedean property) と呼ばれる実数の性質、

$$(\forall a > 0)(\forall b > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad na > b \tag{2}$$

[13]「アルキメデスの原理」と呼ぶ流儀もあるが、そうすると「アルキメデスの浮力の原理」と紛らわしいので、この講義では「アルキメデスの公理」で通す。(それにしても、一人の人が色々なことをするものですね…)

が必要になる (たとえ a が小さく、b が大きくても、十分たくさん a を集めれば b より大きくなる— ある人は諺(ことわざ)をもじって「塵(ちり)も積もれば山となる」と言いました)。

アルキメデスの公理は明らかのように思えるかもしれないが、$\mathbb{R}$ が可換体、順序体ということだけからは証明できない。Weierstrass の上限公理を仮定してあれば証明できる。

定理 1.14 (アルキメデスの公理)

$$(\forall a>0)(\forall b>0)(\exists n\in\mathbb{N})\quad na>b. \tag{3}$$

証明 背理法を用いる。(3) が成り立たないとすると、ある $a>0$, $b>0$ が存在して、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad na\le b \tag{$\sharp$}$$

が成り立つ。$A:=\{na\mid n\in\mathbb{N}\}$ とおくと、$A\subset\mathbb{R}$, $A\ne\emptyset$ が成り立つ。また ($\sharp$) から、A は上に有界である (b が A の上界になっている)。ゆえに Weierstrass の上限公理より、A の上限 S が存在する。

$\varepsilon:=a/2$ とおくと、$\varepsilon>0$ であるから、上限の定義より、ある $x\in A$ が存在して、

$$S-\varepsilon<x\le S.$$

A の定義から、$x=n_0a$ を満たす $n_0\in\mathbb{N}$ が存在する。このとき、$y:=(n_0+1)a$ とおくと、$y\in A$ であり、

$$y=(n_0+1)\,a=n_0a+a=x+2\varepsilon>S+\varepsilon>S.$$

ゆえに $y\in A$, $y>S$ であるが、これは S が A の上限であることに矛盾する。ゆえに (3) が成り立つ。■

注意 1.15 (小数表示があれば…) 不等式 $na>b$ は $n>\dfrac{b}{a}$ と同値である。例えば $a=0.0123456$, $b=98765.4$ とするとき、$b/a=8000048.60031\cdots$ であるから、$n=8000049$ とすれば $na>b$ が成り立つ。このように、b/a の小数表示を求めることが出来れば、$na>b$ を満たす n が見つかる。

この考え方で証明が書けると思うかもしれない。「b/a の整数部分を m とすると、$m\le\dfrac{b}{a}<m+1$ であるから、$n:=m+1$ とすれば $na>b$ が成り立つ。」— しかし、任意の実数が小数表示できることも証明が必要な事実で、それをしようとすると、結局はアルキメデスの公理と同等のことを使う必要が生じるのである (任意の実数が小数表示できるという定理は重要なので、そのうち、この講義ノートの付録に収めたいと思っているが、急ぐ人は杉浦 [2] を見ると良い)。

アルキメデスの公理は当たり前のように思えるかもしれないが、証明は必要で、集合論を基礎にして実数を定義するという立場では、例えば上述のように実数の連続性から証明したりする (Weierstrass の上限公理を根拠にして、定理 1.14 が証明されたことを思い出そう)。■

アルキメデスの公理は

$$(\forall U>0)(\exists n\in\mathbb{N})\ n>U \tag{4}$$

と書いても同じ (同値) で、こう書く方が分かりやすいのでは？という気もする。

問 15. (アルキメデスの公理を使って) (4) を証明せよ。

例 1.16 $Z := \left\{ -\dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} = \{-1, -1/2, -1/3, \cdots\}$ とする。0 は Z の上限である。実際、

(i) $\forall x \in Z$ は $x \le 0$ を満たす。

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して、$(\exists n \in \mathbb{N})\ n\varepsilon > 1$ ($a = \varepsilon$, $b = 1$ として アルキメデスの公理を用いる)。このとき $\varepsilon > \dfrac{1}{n}$ であるから $-\dfrac{1}{n} > 0 - \varepsilon$. これは $(\exists x \in Z)\ x > 0 - \varepsilon$ が成り立つことを示している ($x = -\dfrac{1}{n}$ とすれば良い)。

以上より、0 は Z の上限である。(0 が Z の最小の上界である、というのがしっくり感じられるだろうか？) ■

問 16. 上の例で Z の最大値が存在しないことを証明せよ。

例 1.17 ($\mathbb{N}$ は上に有界ではない) $W := \mathbb{N}$ とする。W は上に有界でない。実際

$$(\forall U \in \mathbb{R})(\exists x \in W) \quad x > U$$

が成り立つ ($a = 1$, $b = |U|$ としてアルキメデスの公理を使うと、$n \cdot 1 > |U|$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ が存在する。これから $n > |U| \ge U$. ゆえに $x := n$ とすればよい)。ゆえに U は上に有界でない。■

記号を使う練習: 上の 4 つの例の集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, $Z = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, $W = \mathbb{N}$ について

$$\sup X = \max X = 3, \quad \sup Y = \max Y = 1, \quad \sup Z = 0, \quad \sup W = \infty.$$

(Z の最大値 $\max Z$ は存在しない。W の上限は存在しない。)

問 17. 期末試験で「アルキメデスの公理を書け」という問題を出したとき、しばしば次のような命題が答案に現れる。これら命題の真偽を調べよ (真ならば証明し、偽ならは反例をあげよ)。

(1) $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ (2) $(\forall a \in \mathbb{R})\ (\forall b \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{R})\ na > b$
(3) $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)\ (\exists n \in \mathbb{R})\ na > b$
(間違いをネタにするのは悪趣味かもしれないが、この手の間違いは是非とも撲滅したいので。)

余談 1.18 (定理 1.14 の証明を知った経緯) アルキメデスの公理の扱いが曖昧な本が少なくない[14]。さすがに定番の杉浦 [2] では、きちんと証明してあって、2016 年度までの講義ではそのやり方 (数列 $\{na\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を使う) を踏襲していたのだが、黒田 [5] を見て、事前準備のほとんど必要ない証明 (定理 1.14 の証明) があることを知った。高木 [7] にも書いてある ([10] にも書いておけば良かったのにと思う)。■

[14] 比較的有名な本での扱いが不適当で、それに「感染して」しまった本が多いせいだろうか？このこと (アルキメデスの公理の扱いが不十分な本があること) 自体も有名で、筆者が学生の頃の講義で教わった覚えがあるが、ではそれでどうするべきか問題である。

1.6　有界

単に「有界」という概念もある (多次元空間 $\mathbb{R}^n$ に順序はないので、有界性が重要になる)。

定義 1.19 ($\mathbb{R}$ の有界な部分集合) $A \subset \mathbb{R}$ とする。A が**有界** (bounded) であるとは、

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \le R$$

が成り立つことをいう。

実は、有界の概念は多次元空間 ($\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$) でも用いる (「上に有界」,「下に有界」は順序関係を用いているので、多次元空間へは拡張できない)。

突然であるが、2 分間だけ不等式の復習をする。

(a) $A, B \in \mathbb{R}$ について、$|A| \le B \Leftrightarrow -B \le A \le B$.

(b) $x, y \in \mathbb{R}$ について、$|x+y| \le |x| + |y|$ 　(**三角不等式**あるいは**凸不等式**と呼ばれる).

問 18. 上の (a), (b) を証明せよ。

$A \subset \mathbb{R}$ が有界であるためには、A が上に有界かつ下に有界であることが必要十分である。実際、A が有界ならば

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad |x| \le R$$

が成り立つので、$L := -R$, $U := R$ とおくと

$$(\forall x \in A) \quad L \le x \le U$$

であり、A は上に有界かつ下に有界である。逆に A が上に有界かつ下に有界ならば

$$(\exists U, L \in \mathbb{R})(\forall x \in A) \quad L \le x \le U$$

が成り立つので、$R := \max\{|L|, |U|\}$ とおくと、

$$x \le U \le |U| \le R,$$

一方、$-L \le |-L| = |L| \le R$ であるから、$-R \le L$

$$x \ge L \ge -R.$$

ゆえに $|x| \le R$ が成り立つので、A は有界である。

1.7　演習

問 19. 上の 4 つの例の集合 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Z = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $W = \mathbb{N}$ について、$\inf X$, $\inf Y$, $\inf Z$, $\inf W$ を求めよ。

問 20. 以下の $\mathbb{R}$ の部分集合は、(a) 上に有界だが下に有界ではない, (b) 下に有界だが上に有界ではない, (c) 上に有界かつ下に有界 (こういうとき単に有界という), (d) 上に有界でなく下にも有界でない, のいずれに該当するか、判定せよ。

$E := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, $F := \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $G := \{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $H := \{-n\,[1 + (-1)^n] \mid n \in \mathbb{N}\}$

問 21. 次にあげる $\mathbb{R}$ の部分集合 A_j $(j = 1, 2, \dots, 10)$ に対して、$\sup A_j$, $\inf A_j$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
&A_1 := (0, 1], \quad A_2 := \mathbb{N}, \quad A_3 := \mathbb{R}, \quad A_4 := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_5 := \left\{ n^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
&A_6 := \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad A_7 := \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 < 2 \right\}, \quad A_8 := \left\{ \sin \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \\
&A_9 := (0, 1) \cup (2, 3), \quad A_{10} := \left\{ \tan^{-1} x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.
\end{aligned}$$

(ただし $\tan^{-1}$ は主値を表すとする。)

2 数列の極限 — ε-N 論法

数列の極限を定義し、簡単な性質を述べる。定理 2.18 が後々重要である。

この節のほとんどの内容は、「数学の方法」で学んだはずであるので、既習済みとして扱い、気持ち駆け足で講義する。

昔から、極限の概念を理解するのは難しいと言われている。(もしも) 初めての場合は簡単には分からないのが普通と考えることを勧める。ゆっくりした説明が欲しい人は、例えば田島 [3] が勧められる。

2.1 数列の定義

自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ のことを**数列** (sequence) または**実数列**という[15]。n の像 $a(n)$ のことを通常は a_n と書き、数列自体を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と表す。a_n のことを数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**第** n **項**と呼ぶ。

括弧 { } は集合を表すためにも使われるので、間違わないように注意する必要がある。数列は、むしろベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ と似ているところがあるので、丸括弧 ( ) を用いた方が誤解が生じにくいかもしれない ($\{1, 2\} = \{2, 1\}$, $\{1, 1\} = \{1\}$ であるが、$(1, 2) \neq (2, 1)$, $(1, 1) \neq (1)$ とか)。実際に、数列を $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ という記号で表しているテキストが結構ある (例えば杉浦 [2], 高橋 [12])。

この講義は、記号の選択について保守的で、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ という書き方で通す。

余談 2.1 きちんと定義しておけば、どういう用語、記号を使っても良い、というのは正しいが、基本的なことを教える授業では、なるべく多くの人が使っているやり方に従うべきと考えている。もっとも「なるべく多くの人が使っている」というのは絶対的な基準にはなりえない。(学校数学だと、文部科学省の教科書検定に通った教科書に従う、という基準があるけれど、今やっているのは学校数学ではない。) 分野による、という観点もあって、「郷に入りては郷に従え」という諺が思い出されるところ。たまに「その記号 (やその読み方) は普通でな

[15] 複素数列というものも考え、それを単に数列と呼ぶこともある。このあたりの用語はいい加減と言えなくもない。こういうことがあるので、単に文字列として検索するだけで用語の定義を調べるのは、間違える危険性がある。

いから止めた方がいい」と学生に言うこともあるけれど、けっこう気分を害する人が多いのは悩ましい。自分が最初に習ったものが絶対とは考えないようにしましょう (とソフトに言ってみる)。 ■

2.2 収束、極限、発散

定義 2.2 (数列の収束) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列、$a \in \mathbb{R}$ とする。$n \to \infty$ のとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a に**収束する** ($\{a_n\}$ converges to a) とは、

$$(\heartsuit) \qquad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことをいい、

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と表す。

条件 $\heartsuit$ は、

$$(\spadesuit) \qquad (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

とも書ける。一般に $(\forall x)$ $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ を $(\forall x\colon P(x))$ $Q(x)$ と書くのであった。

命題 2.3 (収束列の極限の一意性) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が数列、$a, a' \in \mathbb{R}$ であり、

$$a_n \to a \quad (n \to \infty) \quad \wedge \quad a_n \to a' \quad (n \to \infty)$$

が成り立つならば、$a = a'$.

証明 $\forall\varepsilon > 0$ に対して、$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. 仮定から

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon/2,$$

$$(\exists N' \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N') \quad |a_n - a'| < \varepsilon/2.$$

ゆえに $n := \max\{N, N'\}$ とすれば

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

次の問により $a = a'$. ■

問 22. $A \in \mathbb{R}$ が

$$(\spadesuit) \qquad (\forall\varepsilon > 0) \quad |A| < \varepsilon$$

を満たすならば $A = 0$ である (絶対値が任意の正数よりも小さい数は 0 である) ことを証明せよ (ヒント: 背理法)。

定義 2.4 (数列の極限) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列, $a \in \mathbb{R}$ とする。a が $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限** (the limit of $\{a_n\}$) であるとは、$n \to \infty$ のとき、$\{a_n\}$ が a に収束することをいう。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ という記号で表す。

一意性が示せたので、“the limit” という表現も正当化されるし、「$\{a_n\}$ の極限は a である」という言い方が出来る (極限 2 つ以上あるとしたら、その言い方はおかしい[16])。極限の一意性を示さないうちに $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と書くのは厳密にはおかしい。

数列 $\{a_n\}$ が a に収束することを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

あるいは

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と表す。

定義 2.5 (収束列) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。

$$(\exists a \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

が成り立つとき、「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**収束列**である」、「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**収束する**」、「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の**極限が存在する**」、「$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**極限を持つ**」という。数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束しないとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**発散する**という。

問 23. 数列 $\{a_n\}$ が a に収束しないという条件を論理式で表せ (条件 (♡) の否定を書け)。また $\{a_n\}$ が収束しないことを論理式で表せ。

例 2.6 (定数数列の極限) 一つの実数 c に対して、$a_n = c$ $(n \in \mathbb{N})$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

実際、$\forall\varepsilon > 0$ に対して、$N := 1$ とおくと、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \varepsilon$$

であるから、$\lim_{n\to\infty} a_n = c$. ■

さすがに定数数列は簡単すぎるので、そうでない例をあげようとすると、高校数学でもおなじみの $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を取り上げたくなる。

例 2.7 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

(証明) アルキメデスの公理より、任意の正の数 ε に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$N\varepsilon > 1.$$

N をこのような数とするとき、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ を示している。■

[16] 日本では、配偶者は存在しても 1 人ということになっているので、「B は A の配偶者」、「A の配偶者は B」という表現は同じ意味になる (普通はね)。これに対して友人は 1 人とは限らないので、「B は A の友人」という表現は出来ても、「A の友人は B」は (友人が 1 人に決まるような暗黙の条件がない限り) おかしな表現である。

問 24. (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ を証明せよ。(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ を証明せよ。(解答は p. 127)

(結局、任意の正数 α に対して、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$ が成り立つ。)

問 25. $0<a<1$ とするとき $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ を証明せよ。(ヒント: $b:=\dfrac{1}{a}$ とおくと、$b>1$ であるから、$h:=b-1$ とおくと $h>0$. 二項定理より $b^n=(1+h)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k=1+nh+\cdots$ であるから、$n\geq 1$ であれば $b^n\geq nh$.)

問 26. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a\in\mathbb{R}$ に対して、$\lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つならば、任意の自然数 k に対して、$\{a_{n+k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ も a に収束することを示せ。

問 27. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a\in\mathbb{R}$ に対して、$\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つことを示せ。

問 28. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と、$a\in\mathbb{R}$ について、(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ |a_n-a|\leq b_n$, (ii) $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ を満たすならば、$\lim_{n\to\infty}a_n=a$ が成り立つことを示せ。

2.3 極限の基本的な性質

命題 2.8 (収束列の和・差・積・商) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列であるとき、次の (1) ～ (4) が成り立つ。

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n$.
特に任意の $c\in\mathbb{R}$ に対して、$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=ca$.

(4) $(\forall n\in\mathbb{N})\ b_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$ ならば、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}$.

この命題は極限の計算をするときに基本的である。例えば高校の数学 III に現れる

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2\frac{1}{n}+3\frac{1}{n^2}}{3+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1+2\cdot 0+3\cdot 0}{3+2\cdot 0+0}=\frac{1}{3}$$

のような計算はこの命題を何回も利用している。

問 29. 命題 2.8 と、例 2.6, 例 2.7 を用いて、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+3}{3n^2+2n+1}=\dfrac{1}{3}$ を示せ。

余談 2.9 (ある日の Q&A) 「命題 2.8 の (4) で、条件 $(\forall n\in\mathbb{N})\ b_n\neq 0$ は不要ではないですか？」という質問があった。$b_n\neq 0$ としたのは、$\dfrac{a_n}{b_n}$ がナンセンスにならないためであるが、$\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$ であれば、十分大きい任意の自然数 n に対して $b_n\neq 0$ が成り立つ。そこで、十分大きい任意の自然数 n に対して a_n が定義されている (言い換えると有限個の例外値 n に対し

て a_n が定義されていない) 場合にも、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を定義するように約束しておけば、$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ はナンセンスでなくなり、「$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束列で、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ であれば、$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ が成り立つ」という命題が真になる。そのように書いてある本も多い。命題 2.8 をそうしなかったのは、単純に説明の時間の節約のためである。■

問 30. 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a \in \mathbb{R}$ に収束し、$a \neq 0$ であれば、十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \neq 0$ が成り立つことを示せ。

上の命題の証明に取りかかる前に準備をしておく。

定義 2.10 (上に有界、下に有界、有界 (数列の場合)) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。

(i) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**上に有界**とは、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界なこと、言い換えると

$$(\exists U \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq U$$

が成り立つことをいう。

(ii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**下に有界**とは、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が下に有界なこと、言い換えると

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \geq L$$

が成り立つことをいう。

(iii) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**有界**とは、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界なこと、言い換えると

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq R$$

が成り立つことをいう。

注意 2.11 上に有界、下に有界、有界というのは、最初、$\mathbb{R}$ の部分集合に対して定義されたが、数列に対しても定義する。一言でまとめると、数列 $\{a_n\}$ を写像 $a\colon \mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \to \mathbb{R}$ とみなしたときの、値域 $a(\mathbb{N}) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $\mathbb{R}$ の部分集合であるが、それが上に有界、下に有界、(単に) 有界であるとき、それぞれ $\{a_n\}$ が上に有界、下に有界、有界であるという、ということである。後で、連続変数の関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ に対して、有界という言葉を定義するが、それも値域 $f(\Omega)$ $(\subset \mathbb{R})$ が有界という意味である。■

命題 2.12 (収束列は有界である) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列ならば、$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有界である。すなわち、$(\exists R \in \mathbb{R})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|a_n| \leq R$.

命題 2.12 の証明 $\{a_n\}$ の極限を a とおく。収束の定義から ($\varepsilon = 1$ として用いて)、

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < 1.$$

このとき

$$R := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$$

とおくと、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq R$ が成り立つ。実際、$n < N$ のとき $|a_n| \leq R$ であり、$n \geq N$ のとき

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq R. \blacksquare$$

命題 2.8 の証明　$a := \lim_{n\to\infty} a_n$, $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおく。

(1) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. 仮定より、

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1) \quad |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

かつ

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2) \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ を示している。

(2) これは (1) と同様に証明できるので省略する。

(3) $\{a_n\}$ は収束列であるから、命題 2.12 より、ある実数 R が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq R.$$

ε を任意の正数とする。$a_n \to a$ $(n \to \infty)$ であるから (収束の定義の条件の ε として $\dfrac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}$ を取って)、$(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1)$

$$(\sharp) \qquad |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)}.$$

$b_n \to b$ $(n \to \infty)$ であるから (収束の定義の条件の ε として $\dfrac{\varepsilon}{2(1 + R)}$ を取って)、$(\exists N_2 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2)$

$$(\flat) \qquad |b_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + R)}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$(\sharp)$, $(\flat)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n|\,|b_n - b| + |a_n - a|\,|b| \qquad \leq R \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + R)} + \frac{\varepsilon}{2(1 + |b|)} \cdot |b| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(4) (省略 — 次の問 31) $\blacksquare$

(念のため: $R \geq 0$, $|b| \geq 0$ であるが、0 の場合は分母にするにはマズイので、1 を加えている。一般に「$x \geq 0$ ならば $\dfrac{x}{1 + x} < 1$」が成り立つことを用いた。その証明は、$1 + x > 0$, $x < 1 + x$ であるから、$\dfrac{x}{1 + x} < \dfrac{1 + x}{1 + x} = 1$.)

問 31. 命題 2.8 の (4) を証明せよ (解答は p. 129 にある)。

問 32. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$ であることを証明せよ。(ヒント: 一般に $\left||a|-|b|\right| \le |a-b|$ という不等式が成り立つ。その不等式を証明して用いよ。)

次は極限と順序の関係を調べてみよう。

命題 2.13 (数列の極限と順序) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列で、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n \le b_n \tag{$\star$}$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

注意 2.14 ($\star$) の代わりに

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n < b_n \tag{$\star'$}$$

を仮定したとき、当然 ($\star$) も成り立つので

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$

は証明できるが、

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つとは限らない。実際

$$a_n = 1-\frac{1}{n},\quad b_n = 1+\frac{1}{n}\quad (n\in\mathbb{N})$$

とするとき ($\star'$) は成り立つが、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 = \lim_{n\to\infty} b_n.\blacksquare$$

証明 $A := \lim_{n\to\infty} a_n$, $B := \lim_{n\to\infty} b_n$ とおくとき、$A \le B$ を証明する。背理法を用いる。$A > B$ と仮定すると、$\varepsilon := \dfrac{A-B}{2}$ とおくとき、$\varepsilon > 0$. $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ であるから、

$$(\exists N_1\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}: n\ge N_1)\quad |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$(\exists N_2\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}: n\ge N_2)\quad |b_n - B| < \varepsilon.$$

(ここで数直線上で位置関係を図示すること。図を描くときは、分かりやすいように $\varepsilon := \dfrac{A-B}{3}$ くらいが良いかな。)
$n := \max\{N_1, N_2\}$ とおくとき、

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon,\quad -\varepsilon < b_n - B < \varepsilon$$

であるから、

$$B-\varepsilon < b_n < B+\varepsilon,\quad A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon.$$

特に

$$a_n > A-\varepsilon,\quad -b_n > -B-\varepsilon.$$

ゆえに

$$a_n - b_n > A - B - 2\varepsilon = A - B - (A-B) = 0.$$

すなわち $a_n > b_n$. これは仮定と矛盾する。ゆえに $A \le B$ が成り立つ。■

余談 2.15 (少し違った道筋での証明) 任意の正数 ε に対して、$(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_1)$ $|a_n - A| < \varepsilon$ かつ $(\exists N_2 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_2)$ $|b_n - B| < \varepsilon$. $n := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、

$$|A - a_n| < \varepsilon, \quad |B - b_n| < \varepsilon.$$

絶対値を外して

$$-\varepsilon < A - a_n < \varepsilon, \quad -\varepsilon < B - b_n < \varepsilon.$$

これから

$$A < a_n + \varepsilon, \quad b_n - \varepsilon < B.$$

$a_n \leq b_n$ であるから

$$A < a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon < B + 2\varepsilon.$$

これが任意の正数 ε について成り立つので $A \leq B$. (次の問を見よ。) ■

問 33. 実数 A, B が任意の正数 ε に対して $A < B + \varepsilon$ を満たすならば、$A \leq B$ であることを示せ。(解答は p. 130)

系 2.16 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列で、$U \in \mathbb{R}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq U$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq U.$$

証明 $b_n := U$ $(n \in \mathbb{N})$ とおくとき (定数数列！)、$\lim_{n\to\infty} b_n = U$, $a_n \leq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = U. ■$$

問 34. (**はさみ撃ちの原理**, the squeeze theorem) 「3 つの数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について、$a_n \leq b_n \leq c_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立ち、ある実数 A について $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$ であるならば、$\lim_{n\to\infty} b_n = A$ が成り立つ」を示せ (これは命題 2.13 の系というわけではない。ε-N 論法を用いて証明できる。数直線上に状況を示せば簡単である。)。

問 35. $a_n := \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ で定まる数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の極限を求めよ (解答は p. 130)。

問 36. r が $0 \leq r < 1$ を満たすとする。(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ であることを示せ。 (2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$ であることを示せ。

(独白: ある程度一般的な状況下での Newton 法の収束を問題にしたい。)

2.4 上に有界な単調増加数列の収束

極限が存在することを結論する命題に重要なものがある。この項では「上に有界な単調増加数列は収束する」という基本的な定理を紹介する。

定義 2.17 (単調増加) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**単調増加** (monotone increasing) であるとは、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le a_{n+1}$$

が成り立つことをいう。[ここまでが定義で、以下は記号の習慣] このことを

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots$$

や、もっとずぼらに

$$a_1 \le a_2 \le \cdots$$

と書いて済ませる人も多い。

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加ならば

$$(\forall n_1 \in \mathbb{N})(\forall n_2 \in \mathbb{N}) \quad [n_1 \le n_2 \Rightarrow a_{n_1} \le a_{n_2}]$$

が成り立つことは明らかであろう。

定理 2.18 (上に有界な単調増加数列は収束する) 上に有界で単調増加な数列は収束列である。すなわち数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

(1) $(\exists U \in \mathbb{R})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le U$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le a_{n+1}$

を満たすならば

$$(\exists a \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

実は a は $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限である。

証明 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であるから、上限 S が存在する。

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le S.$

(ii) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N}) \quad S - \varepsilon < a_N.$

このとき $n \ge N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$S - \varepsilon < a_N \le a_n \le S$$

であるから $-\varepsilon \le a_n - S \le 0$. ゆえに

$$|a_n - S| \le \varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = S$ を示している。ゆえに $a := S$ とすれば良い。■

「単調増加」と同様に「**単調減少**」(monotone decreasing) も定義される。

また単調増加数列と単調減少数列を**単調数列**と総称することもある。

系 2.19 下に有界で単調減少な数列は収束列である。

証明 定理 2.18 と同様に証明することも出来るし、$\{-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考えて定理 2.18 に帰着させても良い。■

イントロダクションで述べたように、解析学は極限を扱う数学であり、色々なものを極限として定義して議論を行う。

学校数学でおなじみの $\sqrt{a}$, e, π なども、極限として定義するのが普通である。

例 2.20 (素朴に $\sqrt{3}$ を求める) 正の数 a に対して、$x^2=a$ を満たす正の数 x が存在する。その x を $\sqrt{a}$ と定義するのであった。存在することの証明はどうするか？

$a^2=3$ を満たす $a\in\mathbb{Q}$ は存在しない。

$1.7^2<3<1.8^2$ である。$a_1:=1.7.$

$1.73^2<3<1.74^2$ である。$a_2:=1.73.$

$1.732^2<3<1.733^2$ である。$a_3:=1.732.$

$1.7320^2<3<1.7321^2$ である。$a_4:=1.7320.$

以下順にすべての $n\in\mathbb{N}$ に対して a_n が定義出来る。この $\{a_n\}$ は単調増加数列で、上に有界である (例えば 1.8 は上界である)。定理 2.18 により、$\{a_n\}$ は収束することが分かる。その極限 x は、実は $x^2=3$, $x>0$ を満たす。それが $\sqrt{3}$ である。■

問 37. 例 2.20 で極限 x が $x^2=3$ を満たすことを示せ (解答は p. 131)。

問 38. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ が存在すること ($\displaystyle a_n:=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ で定めた $\{a_n\}$ が収束すること) を示せ。

(自然対数の底 e を $\displaystyle e:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ で定義することがあるが、そもそも収束しないとナンセンスなので、収束の証明は必要なことである。ヒント: $n\geq 2$ のとき $\dfrac{1}{n!}\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つことから、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq 3$ が示せる。)

問 39. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が存在することを示せ。

(ヒント: これも $a_n:=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ で定めた数列 $\{a_n\}$ が上に有界かつ単調増加となる。ずっと以前、理工学部入試で誘導つきで出題したことがある。そのときの誘導は、2 項定理で $\displaystyle a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^{n-k}}$ と展開したときの第 k 項を $B_k^{(n)}$ とおくと、$B_0^{(n)}=B_1^{(n)}=1$, $k\geq 2$ のとき

$$B_k^{(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^{n-k}}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

であるから、

$$B_k^{(n)}\leq B_k^{(n+1)}\quad(0\leq k\leq n),\quad B_k^{(n)}\leq\frac{1}{k!}.$$

以下略。)

問 40. $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{2}{a_n}\right)$ $(n\in\mathbb{N})$ で定めた $\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列であることを示し、その極限を求めよ。

(問題の背景: これは $f(x)=x^2-2$ について、**Newton 法**の反復 (方程式 $f(x)=0$ の a_n での 1 次近似 $f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n)=0$ を解いたものを a_{n+1} とした)

$$a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

で作った数列である。古典的な**開平法**[17]よりもはるかに少ない手間で平方根の数値が計算出来る。)

[17] 私が中学生のときは、教科書で開平法が説明されていて、練習問題を解かされたりした (今は高校の数学 I の教科書に載っているようだ)。あまり上手な方法とは言えないので、学ぶ価値はあまりないと思う。

問 41. $a > b > 0$ を満たす a, b に対して、

$$\begin{cases} a_1 = a, \quad b_1 = b, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

で数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定めたとき、以下の問に答えよ。

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は下に有界な単調減少数列、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は上に有界な単調減少数列であることを示せ。

(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は共通の極限に収束することを示せ (解答は p. 132)。

(この共通の極限のことを、a と b の**算術幾何平均** (the **arithmetic-geometric mean**, AGM) と呼ぶ。収束は非常に速い。円周率とも関係があり、円周率を多数桁計算するときにしばしば利用された[18]。)

問 42. 数列 $\{a_n\}$ が単調減少数列であり、$n \to \infty$ のとき 0 に収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は収束する (すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ が存在する)。— 交代級数に対する **Leibniz の判定法** (Leibniz criterion for alternating series).

問 43. 上で e を数列の極限として定義できるという話をしたが、円周率 π を数列の極限として定義してみよ。

ここの問題にあげたのは、定理 2.18 の良く知られた応用例であるが、後で説明する区間縮小法 (§5.1 の定理 5.1) が定理 2.18 の最も典型的かつ重要な応用例かも知れない。

2.5 数列の無限大への発散

アルキメデスの公理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ が得られることを既に示してある (例 2.7)。さらに数学 III でおなじみの

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

の証明も得られる。

ところで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とは何か、その定義をこの講義ではまだしていなかった。

[18]色々な本に載っている有名な話である。http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/syori2-2007/jouhousyori2-2007-04/node22.html

定義 2.21 (数列の無限大への発散) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$n\to\infty$ のとき、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が ∞ **に発散する** とは、

$$(\forall U\in\mathbb{R})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad a_n>U$$

が成り立つことをいう。このことを

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

と表す。

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $-\infty$ **に発散する**とは、

$$(\forall L\in\mathbb{R})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad a_n<L$$

が成り立つことをいう。このことを

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$$

と表す。

せめて 1 行覚えるならば

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\quad\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}\quad(\forall U\in\mathbb{R})(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\ge N)\quad a_n>U.$$

念のために注意: ∞, $-\infty$ は実数ではないので、数列が実数に収束するという定義 (定義 2.2) の範囲外のわけである。

問 44. $\lim_{n\to\infty}n=\infty$ を証明せよ。

問 45. 「単調増加数列は収束するか、∞ に発散する」を証明せよ。

数列の極限については、まだまだ述べるべきことがあるが、関数の極限について、これまでにやったことと同様にして扱える事項があるので、先にそちらを見てみることにしよう。そこで節を改める。

3 関数の極限 — ε-δ 論法と連続関数の基本的な性質

3.1 関数の極限の定義と簡単な性質

前節は数列 (自然数の値を取る変数の関数) の極限を扱ったが、ここでは実変数の関数 f に関する極限 $\lim_{x\to a}f(x)$ を扱いたい。簡単のため、f は $\mathbb{R}$ の区間 I で定義された関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ で、$a\in\overline{I}$ とする。ここで $\overline{I}$ は、区間にその "端の点" を加えたものである。つまり

- $I=(\alpha,\beta),(\alpha,\beta],[\alpha,\beta),[\alpha,\beta]$ (ここで $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$ とする) の場合は $\overline{I}=[\alpha,\beta]$
- $I=(\alpha,\infty),[\alpha,\infty)$ (ここで $\alpha\in\mathbb{R}$) の場合は $\overline{I}=[\alpha,\infty)$
- $I=(-\infty,\beta),(-\infty,\beta]$ (ここで $\beta\in\mathbb{R}$) の場合は $\overline{I}=(-\infty,\beta]$
- $I=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ の場合は $\overline{I}=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ (端の点はないので変わらない)

$a \in I$ でなく、$a \in \overline{I}$ とする理由は、

$$\lim_{x\to 0} x\log x = 0$$

のような例を扱うためである。$x \mapsto x\log x$ の定義域は $I = (0,\infty)$ であり、0 はその定義域に属さないことに注意しよう。

微積分のテキストでは、関数 f を定義するときに、定義域を明示せずに、$f(x)$ の式だけを与えるだけで済ませることが多い。その場合、$f(x)$ という式が意味を持つような、なるべく大きな ($\mathbb{R}$ の) 部分集合を定義域 I に選ぶ、という暗黙の了解がある (その辺りは、ある意味で古めかしい[19])。

例 3.1 (i) $f(x) = \sqrt{x}$ の定義域は $I = [0,\infty)$

(ii) $f(x) = \log x$ の定義域は $I = (0,\infty)$

(iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ の定義域は $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iv) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ の定義域は $I = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

(細かい注意) 後の二つでは I が区間になっていないことに注意しよう (有限個の区間の合併になっているので、そんなに困るわけではない)。本当は 1 次元でも、以下の注意 3.6 に書くような (定義域を区間とは限らない) 一般的な定義を採用する方が望ましいわけである。■

問 46. $f(x) = \tan x$ の定義域を書け。

余談 3.2 (定義域は区間で十分？) 微積分の多くのテキストでの習慣を踏襲して、以下、関数の定義域は $\mathbb{R}$ の区間とするのだが、例えば有理関数などでは、$\mathbb{R}$ から有限個の点を除いた集合が定義域にするのが自然であり、それは $\mathbb{R}$ の区間ではないことに注意が必要である。多変数関数の場合にそうするように、I は $\mathbb{R}$ の空でない部分集合で、$\overline{I}$ は I の閉包とするべきかもしれない (閉包については後述する)。■

定義 3.3 (実関数の極限) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A \in \mathbb{R}$ とする。$x \to a$ のとき $f(x)$ が A **に収束する** (このことを $f(x) \to A$ $(x \to a)$ と表す) とは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。(実はこれを満たすような A は 1 つしかない。) A のことを $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限**と呼び、$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ で表す。

また $x \to a$ のとき $f(x)$ が極限を持つ (あるいは「$f(x)$ が収束する」) とは、ある $A \in \mathbb{R}$ が存在して、$x \to a$ のとき $f(x)$ が A に収束することをいう。

せめて 1 行覚えるならば

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

[19] 暗黙の了解のようなものは無くした方が良いと思うが、まだまだ色々残っていて、しばらくはそういうのに付き合う必要がある。気づいたことは、なるべく文章化してしまう方針であるが…

命題 3.4 極限は一意である (極限は存在する場合、1個だけであり、2個以上は存在しない)。

証明 (数列の場合と同様なので省略する。) ■

注意 3.5 (極限の定義の二つの流儀) $x \to a$ のとき $f(x)$ が A に収束することを

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I : 0 < |x-a| < \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義するテキストが多い (例えば「権威ある」高木 [10], この場合は $a \in \overline{I}$ でなくて、a が I の集積点である場合に極限を定義する)。

上の定義は、杉浦 [2] (これも定番本と言える) で採用されているものである。

[10] の流儀で、$0 < |x-a|$ とする理由は、微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

を想定している (分母が 0 になると困るので、$x \neq a$ としたい、$0 <|x-a|$ とすると良い) と筆者は想像しているが、関数の定義域をつねに意識する現代の数学においては、$x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ の定義域は a を含んでいないので、結局は $0 < |x-a|$ が成り立つ。したがって、微分係数を定義するために、極限の定義に $0 < |x-a|$ を含めることは必要不可欠ではない。言い換えると、[2] の流儀でも、微分係数の定義式を変える必要はない。

次に連続性の条件を考えてみよう。連続性の定義は、どのテキストでも実質的な違いはまったくない。[2] の流儀に従うと、f が a で連続であるということは、極限 $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在することと同値である。もっとも、極限が存在する場合に、それが $f(a)$ であることはすぐに分かるので、$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ とも同値である。つまり極限の定義として、[10], [2] どちらの流儀を採用しても、f が a で連続であることは $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つことと同値である。

微分の定義と連続性の条件という二つの重要なもので、二つの流儀に食い違いが生じないので、実質的には大きな差がないと考えて良い。もちろん食い違いが生じる場合もなくはない。例えば

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

で定義された関数 f について、

- [10] の流儀では、$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.
- [2] の流儀では、$\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない。
  ($x = 0$ を除外したければ、 $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}$ のように明示的に書く必要がある： $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1$.)

となる。この例の f は「人工的」であり、大事なことは $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ということで、これはどちらの流儀を採用しても同じである。

私は、複数の流儀が使われている場合は、原則として、なるべく多くの人が採用している流儀を選ぶ (多数派に合流する)、という方針で講義内容を決めているが、この点については (例外的に) 少数派の流儀を採用していることになる。

私が、[2] の流儀を採用する理由を一応述べておく。

- f が a で連続という条件では、$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I\colon |x-a| < \delta)\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ と $0 < |x-a|$ という条件は抜いて書かれることが多い。揃えられるのならば、揃えた方が簡単で良い。

- 合成関数の極限に関する命題 (この文書では、命題 3.16) を記述するのに、[2] の流儀が便利であるように思われる。「連続関数の合成関数が連続」という命題はほとんどのテキストで出て来るが、案外と合成関数の極限に関する命題を述べることをサボっているテキストが多い[20]。これはうがちすぎかもしれないが、[10] の流儀を採用すると、話が面倒になるからではないか？と考えている。(それで杉浦 [2] を読み返してみたら、p. 59 注意 3 というのを見つけた。お暇な人は読んでみることをお勧めする。) ■

(以下の注は一度ボツにしたのだけど⋯)

注意 3.6 (多変数ベクトル値関数の極限) 実は $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}^m$ の場合 (つまり f が多変数ベクトル値関数ということ) に、ほとんど同様に極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ が定義できる。

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\Omega: |x-a|<\delta) \quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

ただし $\overline{\Omega}$ は次式で定義される Ω の**閉包** (the closure of Ω) である[21]:

$$\overline{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\varepsilon>0)\, B(x;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

ここで $B(x;\varepsilon)$ は、 x を中心とする半径 ε の**開球**である:

$$B(x;\varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < \varepsilon\}.$$

なお、$|\cdot|$ はベクトルの長さを表す。つまり $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

一度に一般的な議論をすると、ごちゃごちゃしていて分かりづらく感じる人が多いと思われるのでそうしないが、このようにすると一般化できることは知っておいてもらいたい。後でここに戻ってくる時間はないかもしれない。 ■

例 3.7 (簡単な、でも実は重要な例 — 後で使う) (1) f が定数関数のとき、つまり

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in I) \quad f(x) = c$$

が成り立つときは、任意の $a \in \overline{I}$ に対して、$\lim_{x\to a} f(x) = c$. (証明は数列の場合と同様で、そのときは $N = 1$ としたけれど、こちらも $\delta = 1$ で良い。)

(2) f が恒等写像のとき、つまり

$$(\forall x \in I) \quad f(x) = x$$

が成り立つときは、任意の $a \in \overline{I}$ に対して、$\lim_{x\to a} f(x) = a$. 実際、任意の正数 ε に対して、$\delta := \boxed{}$ とおくと、$\delta > 0$ で、かつ $|x-a| < \delta$ なる任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - a| = |x - a| < \boxed{}\ \varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{x\to a} f(x) = a$.

(授業では、これを証明するときはどう考えれば良いか、実演する。証明の書き出しはこう。末尾はこう。穴を埋めていって、最後にはめるパズルのピースが $\delta = \boxed{}$ ⋯) ■

[20]実は、合成関数の極限に関する命題を書こうとして、思いがけず苦戦したので、自分としては珍しく、色々なテキストをめくってみたが、参考に出来るものが見つからなかった。

[21]授業では、イメージ図を描くこと。

問 47. 上の例の $\boxed{}$ を埋めよ。

問 48. 絶対値は連続、すなわち $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ。

3.2 関数の連続性の定義と簡単な性質

極限を使って関数の連続性や微分可能性が定義できる。そのやり方は高校でも学んだ。ここでは連続性の定義だけ復習する。

定義 3.8 (実関数の連続性) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ とする。

(1) $a \in I$ とする。f が a で**連続** (continuous at a) であるとは、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成り立つことをいう。この条件を ε-δ 論法を用いて表すと、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\delta > 0)(\forall x \in I : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

となる。

(2) f が I で連続 (continuous on I) であるとは、$\forall a \in I$ に対して、f が a で連続であることをいう。

せめて 1 行覚えるならば

f が a で連続 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$

問 49. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x$ で定める。(1) f が 0 で連続であることを示せ。(2) f が $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ。

問 50. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めるとき、f が $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ。

問 50 を極限の定義に基づいてきちんと解答するのは (簡単な関数であるにもかかわらず) 結構大変である。次の命題を証明しておくと、こういう問題が統一的に処理できて便利である。

命題 3.9 (関数の和・差・積・商の極限) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $A, B \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = A$, $\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = B$ とするとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B.$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = A - B.$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = AB.$

(4) $B \neq 0$ ならば、a に十分近い任意の $x \in I$ に対して $g(x) \neq 0$ で、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$

考察　この命題は基本的で、多くのテキストに証明が載っているが、自分で証明するときは、どう考えるものか、(4) を題材に説明してみよう。

証明すべきことを、論理式で書くと、

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in I:|x-a|<\delta)\quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|<\varepsilon$$

である。まず $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|$ に注目する。分数を通分して、「どこかで見たこと」を思い出して

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}&=\frac{f(x)B-Ag(x)}{g(x)B}=\frac{f(x)B-AB+AB-Ag(x)}{g(x)B}\\&=\frac{(f(x)-A)B}{g(x)B}+\frac{A(B-g(x))}{g(x)B}=\frac{f(x)-A}{g(x)}+\frac{A(B-g(x))}{g(x)B}.\end{aligned}$$

三角不等式を使って

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|\le\left|\frac{f(x)-A}{g(x)}\right|+\left|\frac{A(B-g(x))}{g(x)B}\right|=\frac{|f(x)-A|}{|g(x)|}+\frac{|A|}{|B|}\cdot\frac{|g(x)-B|}{|g(x)|}.$$

仮定からすぐに、$|f(x)-A|$, $|g(x)-B|$ が小さくなることは示せるが、$\dfrac{1}{|g(x)|}$ を上から抑えるのが問題である (定数因子 $\dfrac{|A|}{|B|}$ は大した問題にならない)。これは $|g(x)|$ を下から評価する ($|g(x)|\ge L$ となる L を見い出せ、という意味) ことと同じである。

$g(x)$ は B に「近づく」ので、$B+$ 誤差 の形に表したものが、$g(x)=B+(g(x)-B)$ である。これと一般に成り立つ不等式 $|a+b|\ge|b|-|a|$ を組み合わせると、

$$|g(x)|=|g(x)-B+B|\ge|B|-|g(x)-B|\,.$$

こうするとゴールが見えて来る。

証明　ここでは (4) のみ証明する。((1), (2) は数列の場合とほぼ同様に証明できるので省略する。(3) の証明は、以下の (4) の証明を参考に自力でやってみよう。)

$B\neq0$ とする。

第 1 段 (準備: $1/g(x)$ の評価) $\varepsilon:=\dfrac{|B|}{2}$ とおくと、$\varepsilon>0$ である。仮定 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ より

$$(\exists\delta_1>0)(\forall x\in I:|x-a|<\delta_1)\quad |g(x)-B|<\frac{|B|}{2}.$$

このとき[22]

$$|g(x)|=|(g(x)-B)+B|\ge|B|-|g(x)-B|>|B|-\frac{|B|}{2}=\frac{|B|}{2}>0.$$

ゆえに、$(\forall x\in I:|x-a|<\delta_1)$

$$(\sharp)\qquad g(x)\neq0\quad\text{かつ}\quad\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}.$$

(細かい注意: $\dfrac{1}{g(x)}$ の定義域は、$I':=\{x\in I\mid g(x)\neq0\}$ である。I' は区間とは限らないが、a の近くで $g(x)\neq0$ であることから、$a\in\overline{I'}$ である。)

[22] $|A+B|\le|A|+|B|$ という不等式を紹介済みだが、一般に $|A\pm B|\ge|A|-|B|$ が成り立つ。実際 $|A|=|(A\pm B)\mp B|\le|A\pm B|+|B|$ であるから、$|A\pm B|\ge|A|-|B|$.

第 2 段 ε を任意の正数とする。$\lim_{x\to a} f(x) = A$ より $(\exists \delta_2 > 0)$ $(\forall x \in I : |x-a| < \delta_2)$

$$(\flat) \qquad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{2}{|B|}}.$$

$\lim_{x\to a} g(x) = B$ より $(\exists \delta_3 > 0)$ $(\forall x \in I : |x-a| < \delta_3)$

$$(\natural) \qquad |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{2|A|+1}{|B|^2}}.$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、$(\sharp)$, $(\flat)$, $(\natural)$ が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{f(x)B - Ag(x)}{g(x)B}\right| = \left|\frac{f(x)B - AB + AB - Ag(x)}{g(x)B}\right| \\
&\le \frac{|f(x) - A|}{|g(x)|} + \frac{|A|}{|B|} \cdot \frac{|g(x) - B|}{|g(x)|} \\
&\le \frac{2}{|B|} |f(x) - A| + \frac{2|A|}{|B|^2} |g(x) - B| \\
&< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{2}{|B|}} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\dfrac{2|A|+1}{|B|^2}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2|A|}{2|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. ■

問 51. 命題 3.9 の (3) を証明せよ。　(p. 135)

命題 3.9 が証明されれば、以下の二つの系は容易に得られる。

系 3.10 (連続関数の和・差・積・商) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, f と g は a で連続とするとき、次が成り立つ。

(1) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ は a で連続である。

(2) $g(a) \neq 0$ ならば $\dfrac{f}{g}$ は a で連続である。

系 3.11 (連続関数の和・差・積・商) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$, f と g は I で連続とするとき、次が成り立つ。

(1) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ は I で連続である。

(2) $\dfrac{f}{g}$ は $I' := \{x \in I \mid g(x) \neq 0\}$ で連続である。

3.3 “多項式関数”、有理関数は連続である

基本的な関数である “多項式関数”, 有理関数の連続性を証明しよう。

f が “**多項式関数**” とは、ある**実係数多項式** $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ (ここで $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ とする) が存在して、$f(x) = P(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ となることをいう。

(要するに、**多項式** (polynomial) と言うのは、高等学校の数学の**整式**のことである。大学の数学のテキストでは、**単項式**であっても多項式という。)

一方、x での値が、x の**有理式** (rational expression) で表される関数が有理関数である。すなわち、f が**有理関数**とは、ある**実係数有理式** $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ (ここで $P(x)$ と $Q(x)$ は実係数多項式で、$P(x)$ は 0 ではない[23]) が存在して、$f(x) = R(x)$ $(x \in \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\})$ となることをいう。

問 52. (1) $\frac{1}{2} + \pi x + ex^2$, $1 + 2x^{-2}$ のうち、x の実係数多項式であるものはどちらか。

(2) $\dfrac{\sqrt{2} + e^3x}{1 + x + x^{99}}$, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1 + x^{\sqrt{2}}}{x^3}$ のうち x の実係数有理式であるものはどれか。

余談 3.12 (a) 整式・有理式という言葉は、整数・有理数という言葉とうまく対応している (つまり高等学校の数学用語の方がきれい) と筆者は思うが、多項式・有理式というのが普通の言葉遣いとなっている。

(b) 高等学校では、式と関数の区別があまり明確でなかったが、大学の数学ではかなり厳格に区別をする場合が多い。そうすると、多項式、有理式は関数ではない。そこで有理式と区別して有理関数という言葉があるが、どうも多項式に対応する「多項関数」のような言葉はないようである。そこでこの講義では「多項式関数」という言葉を定義して用いるが、一般に使われている言葉ではない。一方で有理関数という言葉は定着している。■

定理 3.13 (多項式関数、有理関数は連続) (1) 多項式関数は $\mathbb{R}$ で連続である。

(2) 有理関数は定義域 ($\mathbb{R}$ から分母の多項式 $P(x)$ が 0 となる x を除いた集合) で連続である。

証明

(1) 多項式関数 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ は、定数関数 $f_j(x) = a_j$ $(j = 0, 1, \cdots, n)$ と恒等写像 $g(x) = x$ から和・差・積を有限回取ることで得られる。上の例で見たように、f_j と g は $\mathbb{R}$ で連続である。ゆえに多項式関数は $\mathbb{R}$ で連続である。

(2) 有理関数 f は、多項式関数 Q, P $(P \neq 0)$ を用いて $f = \dfrac{Q}{P}$ と表せる。P と Q は $\mathbb{R}$ で連続であるから、f は定義域 $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$ で連続である (これは $\mathbb{R}$ から有限個の点を除いたものである)。■

少し脱線 (微分可能性)　この命題の証明の論法は良く出て来るのできちんと理解することを望む。例えば、(1) 多項式関数は $\mathbb{R}$ で C^∞ 級である、(2) 有理関数は定義域で C^∞ 級である、の証明が同じ論法で証明できる。

この講義では、関数の微分係数、微分可能性の定義をまだ書いていないが、それは高等学校の数学の教科書に書いてあるのと同じである。高等学校の教科書には、微分可能ならば連続で

[23]「$P(x)$ は 0 ではない」というのは、$P(x)$ の x に何を代入しても 0 にはならないという意味ではなく、定数多項式の 0 とは等しくはない、という意味である。

あること、さらには

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x),$$
$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

の証明が書いてあるが、それは大学の数学的にも問題ない[24]。

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ という関数の連続性はどう示すか？$P(x) = x$, $Q(x) = \sin x$ とおいたとき、P は多項式関数であるが、Q はそうではない。しかし Q が連続であることを何らかの方法で示せば、f が連続であることが分かる。

$h(x) = e^{-x^2}$ という関数の連続性はどう示すか？$f(x) = -x^2$, $g(x) = e^x$ とおいたとき、$h = g \circ f$ となっている。g の連続性は何らかの方法で示すとして、合成関数の議論が必要になる。

3.4 合成関数の極限と連続性

定義 3.14 (合成関数) $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$ が成り立つとき、

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in I)$$

により定まる $g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ を、f と g の**合成関数** (the composite function of f and g) と呼ぶ。

注意 3.15 (細かい注意) ここでは簡単のため、$f(I) \subset J$ という条件を課したが、$f(I) \subset J$ でない場合にも、

$$I' := \{x \in I \mid f(x) \in J\} \quad (I' = f^{-1}(J) \cap I \text{ とも書ける})$$

とおき、

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (x \in I')$$

により定まる $g \circ f\colon I' \to \mathbb{R}$ を f と g の合成関数と定義することもある (この辺の事情は合成関数に限ったことではなくて、関数の和・差・積・商を考える場合も同様である)。その場合、$a \in \overline{I}$ であっても、一般には $a \in \overline{I'}$ であるとは限らないので、その条件のチェックが必要になる。■

命題 3.16 (合成関数の極限) I と J は $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$, $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} g(y) = c$ ならば、

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c.$$

証明　任意の正数 ε に対して、$\lim_{y \to b} g(y) = c$ より、$(\exists \delta_1 > 0)$ $(\forall y \in J : |y - b| < \delta_1)$

$$|g(y) - c| < \varepsilon.$$

[24] 細かい注意をしておくと、極限に関する命題が必要になることがあるが、この講義で既に示したことなので、すべて正当化される。

一方 $\lim_{x\to a} f(x) = b$ より、$(\exists\delta>0)$ $(\forall x\in I: |x-a|<\delta)$

$$|f(x)-b|<\delta_1.$$

このような x に対して $f(x)\in J$, $|f(x)-b|<\delta_1$ であるから、

$$|g(f(x))-c|<\varepsilon.$$

すなわち

$$(\forall x\in I: |x-a|<\delta)\quad |(g\circ f)(x)-c|<\varepsilon.$$

ゆえに $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=c$. ■

系 3.17 連続関数の合成関数は連続関数である。

問 53. 系 3.17 を証明せよ。(難しくはないが、実際に書いてみると練習になると思う。)

$\cos x$, $\sin x$, e^x, $\log x$ (ただし $x>0$), $\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$, $\arctan x$, $\arcsin x$ $(x\in[-1,1])$, $\arccos x$ $(x\in[-1,1])$ の連続性や微分可能性 (ただし $\sqrt{x}$ は $x>0$ でのみ、$\arccos x$ と $\arcsin x$ は $-1<x<1$ でのみ、微分可能) を証明すれば (そのためには、それら関数をきちんと定義する必要があるが、それはこの講義ではしないことにする[25])、それらを和・差・積・商・合成などのやり方で組み合わせた関数の連続性や微分可能性も示せる。

余談 3.18 (三角関数の定義を考えてみようか) 例えば、三角関数 sin は、学校数学では三角比から導入するが、それをきちんとした定義にするには、弧度法による角度や、それと相性の良い円周率の定義が必要になるであろう。曲線の弧長は (通常は) 積分かそれと同等な議論を使って定義するのだが、だとすると sin の定義をするために、(その前に) 積分論を展開する必要があるのか？思いの外大ごとになってしまって、結構悩ましい。とにかく、そうして sin の連続性の証明が出来たとして、微分をするには、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ が必要になりそうだが、その証明はどうすれば良いだろう。良くテキストに載っている、面積の大小を使った議論をするのか？すると面積も定義しておく必要があるだろうか？— こうして、学校数学流の導入を定義に格上げするには、かなりの手間がかかることが分かる。そうするのはあまり実際的ではなく、素朴に議論して得られた性質 (例えば三角関数[26]ならば、Taylor 展開) から定義をするのが普通である。

Taylor 展開で sin を定義した場合に、実際どうすれば良いかは、例えば Ahlfors [13] に書いてある (円周率の定義も書いてある)。 ■

4 点列の極限と多変数ベクトル値関数の極限と連続性

(授業では次元が上がったことに関する注意を述べるくらいか。多変数関数の極限の演習はする必要があるかも。)

誤解なく区別することが大事だと思われるので、普段は面倒なので私はそうしていないが、この節では、ベクトルを太字で表すことにする。例えば a と書く代わりに $\boldsymbol{a}$ (授業の板書では、上に矢印 $\vec{}$ をつけて $\vec{a}$ と書いた)。

[25] これらの関数を定義する方法は、何通りかある。1 つの (極度に割り切った) 方法として、冪級数展開を使って定義し直す、というものがある。収束冪級数の微分可能性や連続性については、現象数理学科では「複素関数」で一般論を学べる。

[26] 指数・対数関数ならば、$\log x=\int_1^x\frac{dt}{t}$ を log の定義式にして、その逆関数として e^x を定義するのが割と簡単である。もちろん指数関数 e^x を Taylor 展開で定義して、その逆関数として $\log x$ を定義することも出来る。

4.1 イントロ

数列の極限は点列の極限に拡張され、1 変数実数値関数の極限は多変数ベクトル値関数の極限に自然に拡張される (それを用いて多変数ベクトル値関数の連続性も定義される)。ただし、実数 a の絶対値 $|a|$ の代わりに、その自然な拡張であるベクトルの**長さ** (**ノルム**ともいう)

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{に対して} \quad |\boldsymbol{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

を用いる。

紙幅の節約のため、以下では、$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ のことを、$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ と表す (右上に小さく ^{T} は行列・ベクトルの転置 (transpose) を表す記号である)。

問 54. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \le |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| \ge \big||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|\big|$ を示せ。(ヒント: 最初の不等式は有名なので、少し探せばすぐに証明が見つかるはず。二つ目の不等式は最初の不等式から、$|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| \ge |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|$ と $|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| \ge |\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}|$ を導けば良い。)

問 55. $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$ とするとき

$$\max_{i=1,\ldots,n} |a_i| \le |\boldsymbol{a}| \le n \max_{i=1,\ldots,n} |a_i|$$

が成り立つことを確認せよ。(ヒント: 式の意味が分かりにくければ、$n=2$ のとき $\boldsymbol{a} = (x,y)^T$ として書いてみる。$\max\{|x|, |y|\} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\max\{|x|, |y|\}$)

多くの性質は自然に一般化される。少し細かく説明すると (いきなりこれらの注意を読んでも分かりにくいと思われる。一通り学んだ後に戻ってきて再読すると良いだろう)、

- ベクトルの積は、スカラー倍、内積、(3 次元の場合の) ベクトル積と 3 種類あるが、どの場合も標語的には「積の極限は極限の積」で済む。ベクトルの商は、スカラーの逆数をかけるくらいしかないが、とにかく「商の極限は極限の商」は成立する。

- 点列の極限は、成分である数列の極限を並べたベクトルに等しく、性質も (後で述べる Cauchy 列の収束や Bolzano-Weierstrass の定理まで含めて)、数列の極限とほとんど違いがない。

- ベクトル値関数の極限は、成分である実数値関数の極限を並べたベクトルに等しく、その性質も実数値関数の極限とほとんど違いがない。

- 変数が実数からベクトルになること (1 変数が多変数になること) に関しては、注意すべき点がある (これについては以下で例をあげて説明する)。

イントロのエピローグ　「要するに、高次元になっても 1 次元とあまり変わらないわけですね？」「そうですね。まあ無限次元ではまた違うわけですけど…」

4.2 準備: $\mathbb{R}^m$ の部分集合の閉包

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 Ω に対して、

$$\overline{\Omega} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(\boldsymbol{x}; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

とおき、$\overline{\Omega}$ を Ω の**閉包**(へいほう) (the closure of Ω) と呼ぶ。(ここで $B(\boldsymbol{x}; \varepsilon)$ は、$\boldsymbol{x}$ を中心とする、半径 ε の開球である: $B(\boldsymbol{x}; \varepsilon) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| < \varepsilon\}$.)

直観的には Ω に Ω の「縁(ふち)」を付け足したものである。Ω が $\mathbb{R}$ の区間 I である場合、Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ は既に述べてある $\overline{I}$ に一致する (逆に言うと、それを見越して $\overline{I}$ という記号を用いた)。

(余談になるが、集合 A の補集合を表す記号として (高校流の) $\overline{A}$ を使わないのは、上付きバーを閉包を表す記号に用いたいからである。)

問 56. (1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、$\Omega \subset \overline{\Omega}$ を示せ。(2) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、$\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$ を示せ。

問 57. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $\Omega = (\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$ とするとき、Ω の閉包は $[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ であることを示せ。

4.3 点列とその極限

(実) 数列とは、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像のことであったが、$\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $\boldsymbol{a}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$ のことを ($\mathbb{R}^m$ の) **点列**と呼び、$\boldsymbol{a}$ による n の像 $\boldsymbol{a}(n)$ のことを $\boldsymbol{a}_n$ と書き、$\boldsymbol{a}$ のことを $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と表す。

既に書いたように、このような点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ の極限の定義は、**形式的には数列の場合とほとんど変わらない** (絶対値をベクトルの長さに置き換えるだけ)。

$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^m$ の点列で、$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^m$ とするとき、$n \to \infty$ のとき $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が $\boldsymbol{A}$ に収束するとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)\ |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。これが成り立つとき、$\boldsymbol{A}$ は一意的に定まる。$\boldsymbol{A}$ を $\{\boldsymbol{a}_n\}$ の極限と呼び、$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{a}_n$ と表す。

問 58. $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^m$ の点列、$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は数列、$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^m$, $(\forall n \in \mathbb{N})\ |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{A}| \leq b_n$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ ならば $\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}$ であることを示せ。(問 28 と同じである。)

$\boldsymbol{A}$ も (n を与えたときの) $\boldsymbol{a}_n$ も $\mathbb{R}^m$ の要素であるから、

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_{n,1} \\ a_{n,2} \\ \vdots \\ a_{n,m} \end{pmatrix}$$

のように成分表示できる。このとき

$$(\sharp) \qquad \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall i : 1 \leq i \leq m) \quad \lim_{n \to \infty} a_{n,i} = A_i$$

が成り立つ。言い換えると、

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}a_{n,1}\\a_{n,2}\\\vdots\\a_{n,m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{n\to\infty}a_{n,1}\\\lim_{n\to\infty}a_{n,2}\\\vdots\\\lim_{n\to\infty}a_{n,m}\end{pmatrix}.$$

(高校数学流の「計算ルールを覚えよう」というノリで言うと、lim は括弧の中に入れて良い、ということになるけれど、どういう場合に極限が存在するか、きちんと答えられるようになって欲しいので、(♯) を理解してもらいたい。)

例 4.1 $\boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{n}\\n\sin\dfrac{1}{n}\end{pmatrix}$ とするとき、

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix}\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\\\lim_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\blacksquare$$

要するに

m 次元の点列が 1 個あるというのは、数列が m 個あるのと同じこと

であり

点列の極限は、成分で出来る数列の極限を並べたベクトルに等しい。

点列の極限の計算演習は行わない (数列の極限が計算できるならば、それで OK のはずだから)。

問 59. (♯) を証明せよ。(ヒント: 問 55 の不等式から

$$\max_{i=1,\dots,m}|a_{n,i}-A_i|\le|\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{A}|\le m\max_{i=1,\dots,m}|a_{n,i}-A_i|$$

が成り立つ。後は ε-N 論法を用いる。)

収束する点列の有界性や、

$$\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a}_n+\boldsymbol{b}_n)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n+\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{b}_n,\quad\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{b}_n)=\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{a}_n-\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{b}_n$$

などは数列の場合とまったく同様にして証明できる (あるいは数列の場合の定理に帰着させることが出来る)。積や商については後述する。

4.4 多変数ベクトル値関数とその極限

最初に先回りして例をあげる。$f(x,y)=x+2y$ は 2 変数の実数値関数である。$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y\\3x+4y\end{pmatrix}$ は 2 変数の 2 次元ベクトル値関数である。n 変数関数とは、変数が n 次元ベクトルである関数のこと、と考えられる。

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ のとき、$\boldsymbol{f}$ を n **変数の** m **次元ベクトル値関数**と呼ぶ。

$\boldsymbol{x}\in\Omega$ は ($\mathbb{R}^n$ の要素であるから)

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

のような n 次元ベクトルであるので、関数値 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{f}(x_1,\dots,x_n)$ のようにも書かれる。関数値 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ は ($\mathbb{R}^m$ の要素であるから) m 次元ベクトルであるから

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\dots,x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1,\dots,x_n)\end{pmatrix}$$

のようにも書かれる。

既に書いたように、このような関数 $\boldsymbol{f}$ の極限の定義は、**形式的には 1 変数実数値関数の場合とほとんど変わらない**。

$\boldsymbol{a}\in\overline{\Omega}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^m$ とするとき、$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ のとき $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a}$ に収束するとは

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\boldsymbol{x}\in\Omega:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta)\,|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$$

が成り立つことをいう。

極限の一意性、極限を $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ と書くこと、関数の和・差の極限が関数の極限の和・差となること、合成関数の極限などはこれまでと同様である。

命題 4.2 (合成関数の極限) $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ と $\Omega'\subset\mathbb{R}^m$, $f\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$, $g\colon\Omega'\to\mathbb{R}^\ell$, $f(\Omega)\subset\Omega'$, $\boldsymbol{a}\in\overline{\Omega}$, $\boldsymbol{b}\in\overline{\Omega'}$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^\ell$, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$, $\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}}g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{c}$ ならば、

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}(g\circ f)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}.$$

証明　1 変数実数値関数のときの証明を焼き直すだけでよいので、省略する。■

ベクトル値関数の積と商については若干の注意が必要であるので、後述する。

点列の場合 (p. 45 の (♯)) と同様に、$\boldsymbol{A}=(A_1,\dots,A_m)^T$ とおくとき

(5) $$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\quad\Leftrightarrow\quad(\forall i\in\mathbb{N}:1\le i\le m)\quad\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f_i(\boldsymbol{x})=A_i$$

が成り立つ。言い換えると、

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}f_m(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}.$$

このことから、関数値が実数からベクトルになることに起因する難しさはほとんどない、と言える。一方、変数が実数からベクトルになることについて注意すべき点はあるので後述する (4.7 項)。

4.5　(ほんの少しだけ注意) $\mathbb{R}^m$ における積と長さ (大きさ), 商

4.5.1　積と長さ

$\mathbb{R}^m$ のベクトルについては、実数 k とベクトル $\boldsymbol{u}$ の積 (スカラー倍) $k\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m$、二つのベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の内積 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}$、($m=3$ に限られるが) ベクトル積 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ などの「積」がある。これらの積について、「積の極限は極限の積」が成り立つ。

点列については、極限 $\lim_{n\to\infty} k_n$, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n$, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n$ が存在するとき、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (k_n \boldsymbol{a}_n) &= \lim_{n\to\infty} k_n \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n, \\
\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_n) &= \left(\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n, \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n\right), \\
\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{a}_n \times \boldsymbol{b}_n) &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n \times \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{b}_n.
\end{aligned}$$

関数については、極限 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} k(\boldsymbol{x})$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ が存在するとき、

$$\begin{aligned}
\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (k(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} k(\boldsymbol{x}) \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \\
\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) &= \left(\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right), \\
\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) &= \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \times \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

問 60. (気が向いたら) 一つ二つ証明してみよう。

$\mathbb{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ $|\boldsymbol{a}|$ は、内積を用いて $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ と書けるので、上の内積に関する定理の系として「長さの極限は極限の長さ」

$$\lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{a}_n| = \left|\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n\right|, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| = \left|\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right|$$

が得られる (細かいことだが $\sqrt{\quad}$ の連続性も用いる)。

4.5.2 商

$m > 1$ のとき、$\mathbb{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ を「割る」演算は、0 でない実数 k の逆数をかけて $\dfrac{1}{k}\boldsymbol{a}$ とするくらいしかない (ベクトルでは割れないので、$m > 1$ のとき $\mathbb{R}^m$ には割り算はない、と言っても構わないような気がする)。

商に関しては、きちんと書くと以下のように結構ごちゃごちゃした感じになるが、本質的に面倒なわけではない。

数列 $\{k_n\}$ が $k_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} k_n = k$, $k \neq 0$ を満たすならば、すでに見たように $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{k_n} = \dfrac{1}{k}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{k_n}\boldsymbol{a}_n\right) = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} k_n} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n.$$

関数 $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \overline{\Omega}$ が、$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} k(l\boldsymbol{x}) = k$, $k \neq 0$ を満たすならば、すでに見たように

$$(\exists\delta > 0)(\forall \boldsymbol{x} \in \Omega : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta)\ k(\boldsymbol{x}) \neq 0, \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \frac{1}{k(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{k}$$

であるから、

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \left(\frac{1}{k(\boldsymbol{x})}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) = \frac{1}{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} k(\boldsymbol{x})} \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).$$

4.6 多変数の連続関数

ここは授業では、かなりはしょって (「同様」の嵐で) 説明しました。

4.6.1　多変数の連続関数

多変数ベクトル値関数の連続性の定義は、1 変数実数値関数の場合と同様である。

定義 4.3 (多変数ベクトル値関数の連続性) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

(1) $\boldsymbol{a} \in \Omega$ で $\boldsymbol{f}$ が連続とは、$\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ が成り立つことをいう。

(2) Ω で $\boldsymbol{f}$ が連続とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ で $\boldsymbol{f}$ が連続であることをいう。

$\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ とするとき、

- $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で連続であるためには f_i $(i = 1, \dots, m)$ が $\boldsymbol{a}$ で連続であることが必要十分。
- $\boldsymbol{f}$ が Ω で連続であるためには f_i $(i = 1, \dots, m)$ が Ω で連続であることが必要十分。

連続関数の和、差、積 (スカラー倍、内積、ベクトル積)、商 (実数値関数の逆数の積) が連続であること、連続関数の合成関数が連続になることなども同様である。

多項式関数、有理関数が連続であることも同様であるが、これは一応説明しておこう。

一般に n 変数の多項式, n 変数の有理式というものと、それが定める多項式関数、有理関数を導入できるが、以下では式を簡潔に書くため、$n = 2$ の場合に限って説明する。

4.6.2　多変数の多項式

$P(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6$ のように、変数 x, y と実数の定数から掛け算、足し算だけで作られる式、つまり一般に

$$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_{ij} x^i y^j \quad (\text{ここで } N \in \mathbb{N},\, a_{ij} \in \mathbb{R})$$

の形に書ける式を変数 x と y の (実係数) **多項式**と呼ぶ。これから自然に関数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = P(x, y)$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ が定義できるが、f のことを多項式 $P(x, y)$ が定める**多項式関数**と呼ぶ。以下誤解のない限り、f と P はどちらか一つの文字で表す (f のことを P と書くとか)。

2 個の変数 x, y の実係数多項式全体を $\mathbb{R}[x, y]$ と表す:

$$\mathbb{R}[x, y] := \left\{ \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_{ij} x^i y^j \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, a_{ij} \in \mathbb{R}\ (0 \le i \le N,\ 0 \le j \le N) \right\}.$$

$\mathbb{R}[x, y]$ には自然に環の構造が入り、$\mathbb{R}[x, y]$ は**多項式環**と呼ばれる。

4.6.3　多変数の有理式

$R(x, y) = \dfrac{x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6}{7x + 8y + 9}$ のように、分母と分子が 2 変数 x と y の (実係数) 多項式であるような式を、つまり一般に

$$R(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (P(x, y), Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y])$$

の形に書ける式を 2 変数 x と y の (実係数) **有理式**と呼ぶ。

2 変数 x, y の実係数有理式全体を $\mathbb{R}(x, y)$ と表す:

$$\mathbb{R}(x, y) = \left\{ \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \;\middle|\; P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y], Q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y], P(x, y) \neq 0 \right\}.$$

$\mathbb{R}(x, y)$ には自然に体の構造が入り、$\mathbb{R}(x, y)$ は有理関数体と呼ばれる。

4.6.4　多項式関数と有理関数

f が n 変数の ($\mathbb{R}^n$ 上の) **多項式関数**であるとは、ある $P(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]$ が存在して、

$$f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f(x_1,\ldots,x_n)=P(x_1,\ldots,x_n)\quad (x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n)$$

であることをいう (つまり多項式関数とは、多項式の定める関数である)。

f が n 変数の**有理関数**であるとは、ある $Q(x_1,\ldots,x_n),P(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ が存在して、

$$\Omega:=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid P(x_1,\ldots,x_n)\neq 0\}$$

とおいたとき、

$$f\colon\Omega\to\mathbb{R},\quad f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{Q(x_1,\ldots,x_n)}{P(x_1,\ldots,x_n)}\quad ((x_1,\ldots,x_n)^T\in\Omega)$$

であることをいう (つまり有理関数とは、有理式の定める関数である。ただし定義域は分母の多項式が 0 にならない点全体の集合とする。)。

多項式関数も有理関数も定義域全体で連続である。特に多項式関数の定義域は $\mathbb{R}^n$ 全体で、$\mathbb{R}^n$ 全体で連続である。このことは以下の命題から分かる。

命題 4.4 $n\in\mathbb{N}$ とする。

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の定数関数は $\mathbb{R}^n$ で連続である。

(2) $i\in\mathbb{N}, 1\le i\le n$ とするとき、

$$\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i\quad ((x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n)$$

で定義される第 i 座標関数 $\varphi_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は、$\mathbb{R}^n$ で連続である。

(Cf. 1 変数のときは、(2) に相当するのは、恒等写像 $\varphi(x)=x$ の連続性であった。)

証明

(1) f を定数関数とする。すなわち $(\exists c\in\mathbb{R})$ $(\forall \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$ $f(\boldsymbol{x})=c$ と仮定する。任意の $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$, 任意の $\varepsilon>0$ に対して、$\delta:=1$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して、

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|=|c-c|=|0|=0<\varepsilon.$$

ゆえに f は $\boldsymbol{a}$ で連続である。$\boldsymbol{a}$ は任意であったから f は $\mathbb{R}^n$ で連続である。

(2) $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ とする。任意の正数 ε に対して、$\delta:=\varepsilon$ とおくと、$\delta>0$ で、$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$|\varphi_i(\boldsymbol{x})-\varphi_i(\boldsymbol{a})|=|x_i-a_i|\le|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta=\varepsilon.$$

ゆえに φ_i は $\boldsymbol{a}$ で連続である。$\boldsymbol{a}$ は任意であったから φ_i は $\mathbb{R}^n$ で連続である。■

授業では、上の (2) を、$n=2$ の場合に $\boldsymbol{x}=(x,y)^T$, $\boldsymbol{a}=(a,b)^T$ として説明をざっと書いた。

$$\varphi_1(\boldsymbol{x})=x,\quad \varphi_2(\boldsymbol{x})=y,\quad \varphi_1(\boldsymbol{a})=a,\quad \varphi_2(\boldsymbol{a})=b$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1(\boldsymbol{x})-\varphi_1(\boldsymbol{a})| &= |x-a| \le |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|\,,\\
|\varphi_2(\boldsymbol{x})-\varphi_2(\boldsymbol{a})| &= |y-b| \le |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|
\end{aligned}
$$

となり、$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$ のとき $\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x})$ がそれぞれ $\varphi_1(\boldsymbol{a}), \varphi_2(\boldsymbol{a})$ に収束する、と板書半分、口半分で説明した。

微積分で扱う多くの関数は、定義域全体で連続である。そのことを経済的に証明する方法を学ぼう。

連続関数を組み立てたものは連続である

連続関数を "組み立てたもの" は連続関数 (実は微分可能な関数を組み立てたものは微分可能な関数、のように他での「応用」がある考え方)

- $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $g\colon\Omega\to\mathbb{R}$ がともに連続ならば、$f+g$, $f-g$, fg はいずれも Ω から $\mathbb{R}$ への連続関数。$g\neq 0$ (on Ω) ならば f/g も Ω から $\mathbb{R}$ への連続関数。
- 連続関数の和、差、内積、ノルム、実数値連続関数倍、実数値連続関数による商 $\vec f+\vec g$, $\vec f-\vec g$, $\left(\vec f,\vec g\right)$, $\left|\vec f\right|$, $k\vec f$, $\dfrac{1}{k}\vec f$ (ただし $k\neq 0$) も連続である。
- $\vec f=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$ について、f が連続 $\iff$ すべての $i\in\{1,\dots,m\}$ について f_i が連続。
- 連続関数の合成関数 $\vec g\circ\vec f$ は連続関数。
- n 変数実係数多項式は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数を定める: $f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ ならば、$\mathbb{R}^n\ni(x_1,\dots,x_n)\mapsto f(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}$ は連続である。
簡潔のため、多項式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ が定める関数を f と書くことを約束し、多項式の定める関数を「多項式関数」と呼ぶことにする。
- 高校生以来知っている (切れていないグラフが思い浮かべられる) 指数関数 $e^x=\exp x$, a^x (ただし $a>0, a\neq 1$)、対数関数 $\log x$ $(x>0)$、三角関数 $\cos x, \sin x$、$\sqrt{x}$ $(x\ge 0)$, 冪乗関数 $x\mapsto x^\alpha$ (ただし $\alpha\in\mathbb{R}$, 定義域は $x>0$), n 乗根 $\sqrt[n]{x}$ ($x\in\mathbb{R}$ または $x\in[0,\infty)$) 絶対値 $|x|$ は、それらの定義域上で連続である。
- 大学に入ってから教わった逆三角函数 $\tan^{-1}x=\arctan x$, $\sin^{-1}x=\arcsin x$ $(x\in[-1,1])$, $\cos^{-1}x=\arccos x$ $(x\in[-1,1])$ もそれらの定義域上で連続である。

これらの関数の多くは C^∞ 級であることが分かり、証明も同様である (ただし $\sqrt{x}$ が C^∞ 級であるのは、$x>0$ の範囲で、$x=0$ を含めると成り立たなくなる、などの注意は必要である)。

例 4.5 $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6$ は 2 変数の多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ 上の関数として連続である。

$\varphi(x,y)=\sin(x^2+2xy+3y^2+4x+5y+6)$ は、$g(z)=\sin z$ とすると、$\varphi=g\circ f$. f も g も連続関数であるから、合成関数 φ は連続である。■

問 61. 次の各関数が $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ (理由を述べよ)。
(1) $f(x,y)=x^2+\sqrt{2}xy+(\log 3)y^2+\frac{\pi}{4}x+e^5y+6$ (2) $g(x,y)=\exp(3x+2y+1)$

(3) $h(x,y)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+y^2+1}$ (4) $\varphi(x,y)=\log\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)$ (5) $F(x,y)=\begin{pmatrix}x^3-3xy^2\\3x^2y-y^3\end{pmatrix}$

例 4.6

$$\boldsymbol{f}(x,y):=\begin{pmatrix}x+2y\\ \dfrac{3x+4}{5x^2+6y^2+7}\\ \log(8e^x+9)\end{pmatrix}$$

で $\boldsymbol{f}\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ を定めると、$\boldsymbol{f}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続であることを示せ。
(証明)

(i) $f_1(x,y):=x+2y$ で $f_1\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を定めると、f_1 は $\mathbb{R}^2$ で連続である ($\because$ 多項式関数だから)。

(ii) $P(x,y):=5x^2+6y^2+7$, $Q(x,y):=3x+4$, $f_3(x,y):=\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ とおくと、$P(x,y),Q(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$, $f_3(x,y)\in\mathbb{R}(x,y)$. 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して、$P(x,y)\geq 5\cdot 0+6\cdot 0+7\geq 7$ であるから $P(x,y)\neq 0$. ゆえに $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が定義できて、連続である ($\because$ 有理関数だから)。

(iii) $p\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $q\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $r\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $s\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$p(x,y):=x,\quad q(z)=e^z,\quad r(u)=8u+9,\quad s(v)=\log v$$

で定めると、いずれも連続関数である (p は多項式関数、q は指数関数、r は多項式関数、s は対数関数)。$p(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}$, $q(\mathbb{R})=(0,\infty)$, $r((0,\infty))=(9,\infty)\subset(0,\infty)$ であるから、合成関数 $f_3:=s\circ r\circ q\circ p\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が定義できて、連続である。

f_1, f_2, $f_3\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続であるから、$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ で連続である。■

4.7 多変数関数の極限に関する注意

簡単のため主に 2 変数実数値関数の場合に限り、実例を使って説明する。
$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $(a,b)\in\overline{\Omega}$, $A\in\mathbb{R}$ とする。

$$(\sharp)\qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=A$$

であるとは、定義によれば

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(x,y)\in\Omega:\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta)\quad |f(x,y)-A|<\varepsilon$$

ということである。それだけのことであるが、

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)=A,$$

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=A$$

のようなものと取り違える人[27]が少なくない。

次の例を考えるために、一つ準備をする。

命題 4.7 (関数が極限を持つならば、制限した関数も同じ極限を持つ) $\emptyset \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とするとき、f の Ω' への制限 $f|_{\Omega'}\colon \Omega' \to \mathbb{R}^m$ が $f|_{\Omega'}(x) = f(x)$ $(x \in \Omega')$ で定義されるが、$a \in \overline{\Omega'}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^m$, $\lim_{x\to a} f(x) = \boldsymbol{A}$ とするとき、

$$\lim_{x\to a} f|_{\Omega'}(x) = \boldsymbol{A}.$$

($\lim_{x\to a} f|_{\Omega'}(x)$ のことを、$\lim_{\substack{x\in\Omega' \\ x\to 0}} f(x)$ で表す人が多い。)

(この命題は簡単すぎるのか、ほとんどのテキストに載っていないが、知っておくと、色々な場面ですっきりすると思われる。考えてみると、数列については「収束する数列の部分列は同じ極限に収束する」という命題はほとんどすべてのテキストに載っているのに、この命題を載せていないのはバランスが悪いな、と考えている。)

証明 　極限の定義から

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta)\, |f(x) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon$$

となるので ($\Omega' \subset \Omega$ であることから)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega' : |x - a| < \delta)\, |f(x) - \boldsymbol{A}| < \varepsilon.$$

これは $\lim_{x\to a} f|_{\Omega'}(x) = \boldsymbol{A}$ を示している。 ■

系 4.8 連続関数の制限は連続である。

たとえ $\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$ であっても、それが $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ に一致するとは限らない。

例 4.9 (極限の存在しない例 (とても有名)) $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

で定めるとき

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

であるが[28]、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

は存在しない。実際、実数 k を固定して、直線 $y = kx$ に沿った極限を考えると (つまり $\Omega_k := \{(x,y) \in \Omega \mid y = kx\}$, $f|_{\Omega_k}\colon \Omega_k \to \mathbb{R}$, $f|_{\Omega_k}(x,y) := f(x,y)$ $((x,y) \in \Omega_k)$ と定義して、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Omega_k}(x,y)$ を考えると)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Omega_k}(x,y) = \lim_{\substack{y=kx \\ (x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

[27]「少しずつ計算していこう。まず y を b に近付けて、それから x を a に近付けて…」として $(x,y)\to(a,b)$ のときの極限が計算できるならば、ありがたいけれど、そのやり方間違っている、ということです。

[28] $a > 0$, $a \neq 1$ とするとき指数関数 $x \mapsto a^x$ というものを考えた。それは $\mathbb{R}$ 全体で連続で、$x = 0$ のとき 1 という値を取る。特に $\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1$. 一方、$\alpha > 0$ に対して $x \mapsto x^\alpha$ という関数を考えると、これは $[0,\infty)$ で連続で、$x = 0$ のとき 0 という値を取る。特に $\lim_{x\to +0} x^\alpha = 0^\alpha = 0$.

これは k に依存するから、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。実際、もし $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在すれば、命題 4.7 により、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_{\Omega_k}(x,y)$ も同じ極限を持つはずであるが、それが k に依存しているので (k を変えると異なる値を取るので)、そういうことはありえない。■

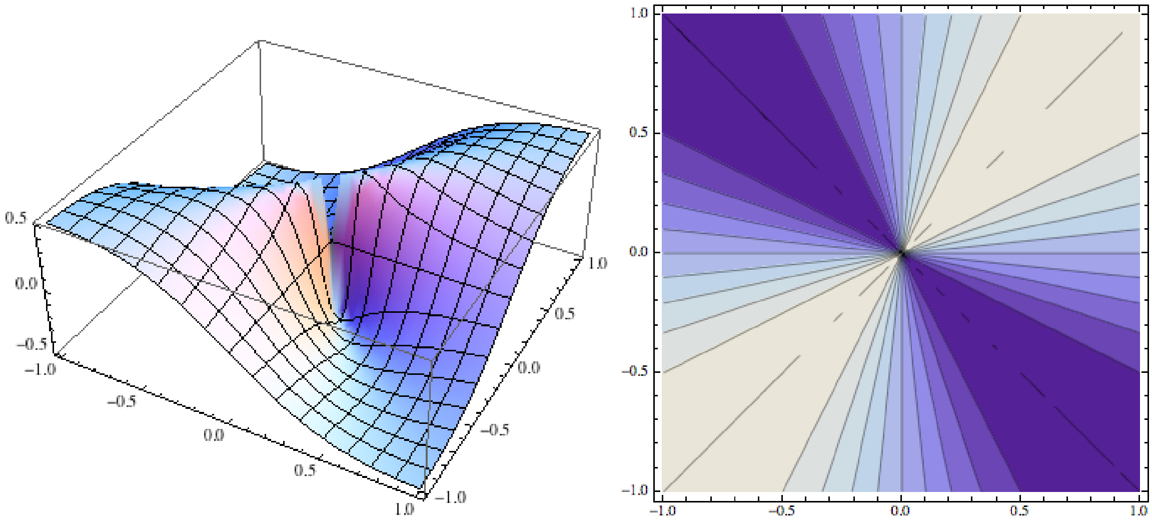


図 2: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ のグラフと等高線

この例では、グラフよりは等高線の方が分かりやすい

```
Plot3D[x y/(x^2+y^2),{x,0,1},{y,0,1}]; ContourPlot[x y/(x^2+y^2),{x,0,1},{y,0,1}]
```

そういうわけで、$y = kx$ のように近づき方を指定してみることで、極限が存在することの証明は出来ないが、極限が存在しないことの証明は出来ることがある。また極限が存在する場合に、極限の見当をつけることも出来る。つまり $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ y=kx}} f(x,y)$ を計算して、常に (k によらない) A という値を取ったとするとき、それだけで $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$ とは結論できないが、もし極限が存在するならば、それは A 以外にありえないことは分かる。そこで後は $|f(x,y) - A|$ が 0 に収束するかどうか調べる、という手順で考えるのは有効である。

$(x,y)\to(0,0)$ のときの $f(x,y)$ の極限を調べる $y=kx$ 作戦のまとめ

1. 任意の実数 k に対して、 $\displaystyle\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)$ を考える。
   - その極限が存在しなければ、 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。
   - その極限が存在する場合、それを A_k とおく。
2. A_k が実際に k に依存するならば、 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない。
3. A_k が実際には k に依存しない、つまり $(\exists A\in\mathbb{R})\ (\forall k)\ A_k=A$ が成り立つならば、次のいずれかが成り立つ。

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=A.$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ が存在しない。

   (a), (b) のいずれであるかを判定するには

   $$|f(x,y)-A|$$

   が 0 に収束するかどうかを判定できれば良い。

次のことを理解しよう。

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ に比べて、 $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}} f(x,y)$ は (1 変数関数の極限なので) 格段に計算しやすい。
- 最初の $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を調べるという問題に比べて、具体的に得られた A に対して $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)-A|$ が 0 であるかどうか調べる、というのは、ある程度簡単になった問題である。

例 4.10 $f\colon\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\quad((x,y)\in\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$$

で定めるとき

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

実際、

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|\le\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|y|=1\cdot|y|=|y|.$$

任意の正数 ε に対して、$\delta:=\varepsilon$ とおくと、$\delta>0$ で、$|(x,y)-(0,0)|<\delta$ を満たす $(x,y)\in\Omega$ に対して、

$$|f(x,y)-0|\le|y|\le\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ を示している。■

余談 4.11 (計算の工夫) 上の二つの例は、極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を施すと簡単で見通しが良くなる。いつもそうなるわけではないが、紹介しておく。まず $(x,y)\to(0,0)$ より

$r \to 0$ になることに注意しよう。

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

であるが、これは $r \to 0$ のとき、極限を持たないことは明らかである (方向により違う値を取ることも良く分かる)。一方

$$\frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta)^2 \cdot r\sin\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin\theta$$

は $r \to 0$ のとき、0 に収束する。実際、

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0\right| = r\left|\cos\theta\sin\theta\right| \le r \to 0$$

であるから。■

関数が無限大に発散することも定義しておこう。

定義 4.12 (関数の無限大への発散) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする。$x \to a$ のとき $f(x)$ が ∞ **に発散する** とは

$$(\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) > U$$

が成り立つことをいう。このことを

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

と表す。

せめて 1 行覚えるならば

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x-a| < \delta) \quad f(x) > U.$$

$-\infty$ への発散も同様に定義する。

(問 51 と問 52 の間が空いているような気がする。)

問 62. $-\infty$ へ発散することの定義を書いてみよ。

問 63. (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (3) $\displaystyle\lim_{((x,y)\to(0,0))} \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{x^2-y^2}$

定義が出来れば、次のような命題 (1 変数の場合は、事実としては、高校生も知っていて、使っている) を証明するのは難しくない。

命題 4.13 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$

(2) $(\forall x \in \Omega)\ f(x) > 0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ならば、$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

証明

(1) $\forall\varepsilon > 0$ に対して、$U := \dfrac{1}{\varepsilon}$ とおくと $U > 0$. 仮定 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ より、$\exists\delta > 0$ $(\forall x \in \Omega)$ $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > U$. このとき、$0 < \dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{U} = \varepsilon$. ゆえに $\left|\dfrac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$. ゆえに $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(2) $\forall U \in \mathbb{R}$ に対して，$\varepsilon := \dfrac{1}{|U|+1}$ とおくと、$\varepsilon > 0$. 仮定 $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ より、$(\exists\delta > 0)$ $(\forall x \in \Omega)$ $|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon$. 仮定 $f(x) > 0$ より、このとき、$f(x) = |f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon} = |U| + 1 > U$. ゆえに $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$. ■

合成関数の極限に関する命題 4.2 と同様の命題が、$\pm\infty$ に発散する場合にも得られる。これ以外に (Ω が有界でない場合に) $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$ のような極限もあるが、省略する。

問 64. 次の極限が存在するかどうか調べ、存在する場合はそれを求めよ。発散する場合も ∞ または $-\infty$ であるときはそれを指摘せよ。出来る限り根拠を書くこと。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (3x^2 + 4xy + 5y^2)$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2+3xy}{4x^2+5y^2}$ (3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}$ (5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ (6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

(8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$.

問 65. つぎの関数が原点 $(0,0)$ で連続かどうか調べよ。

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ (2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ (4) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\log(x^2+y^2)} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & (x+y\neq 0) \\ 0 & (x+y=0). \end{cases}$

問 66. 次の極限を調べよ (収束・発散のいずれかを証明し、収束する場合は極限を求める)。

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2+y^3+y^2}{x^2+y^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

4.8 偏微分、全微分, C^1 級

多変数関数の微分については、微積分で一通り学んだはずである。超特急で振り返る。Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

(i) $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について偏微分可能であるとは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう。

(ii) $1 \leq j \leq n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が Ω で x_j について偏微分可能であるとは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で x_j について偏微分可能であることをいう。

(iii) $\boldsymbol{f}$ が Ω で C^1 級であるとは、任意の $j \in \{1, \cdots, n\}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が Ω で x_j について偏微分可能であり、$\Omega \ni \boldsymbol{x} \mapsto \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ が Ω で連続なこと、すなわち

$$(\forall \boldsymbol{a} \in \Omega) \quad \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right| = 0 \right)$$

が成り立つことをいう。

(iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ におけるヤコビ行列と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ とも表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ は、(i,j) 成分が $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

「C^1 級 (連続的微分可能) $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上 3 つの lim が出て来るが、(i) は 1 変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも 0 になるかどうかが問題) である。

4.9 おまけ

例 4.14 $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \wedge y > 0\}$, $f(x,y) = x^y$. $(a,b) = (0,0)$ とするとき、

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} 1 = 1, \\ &\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0, \\ &\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \quad \text{は存在しない}. \end{aligned}$$

通常 0^0 は定義されないが[29]、それにはこの事実が背景にある。■

Intermission (休憩時間): 目標の再確認

以下、連続関数の持つ、3 つの有名かつ便利な性質

(1) “Weierstrass の最大値定理”

(2) 中間値の定理

(3) コンパクト集合[30]上の連続関数の一様連続性

を目標にする。

---

[29] Taylor の定理に表れる $f(a+h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_{n+1}$ において、$h^0 = 1$ とするので、この定理を考えるとき $0^0 = 1$ としている。

[30] この講義では $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合のこと。

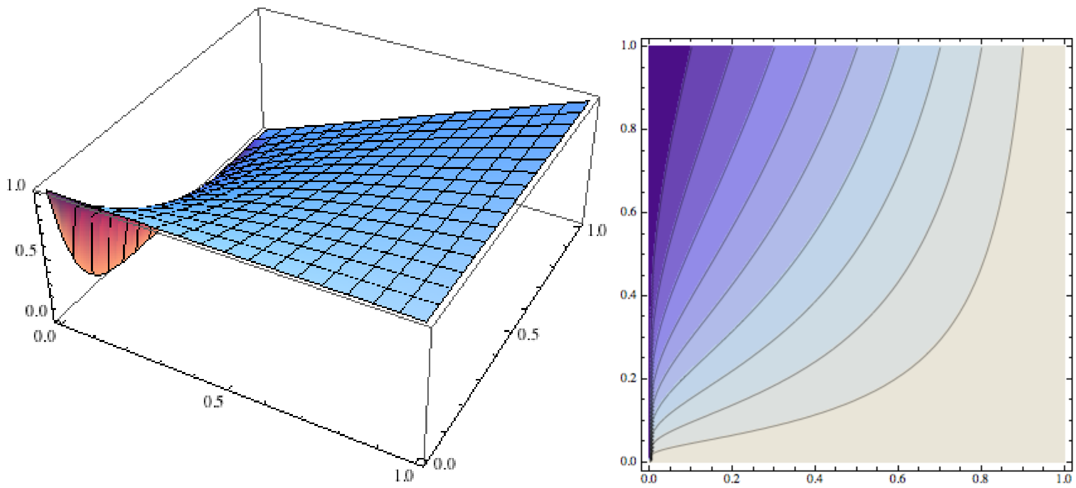


図 3: $f(x,y)=x^y$ のグラフと等高線

```
Plot3D[x^y,{x,0,1},{y,0,1}]; ContourPlot[x^y,{x,0,1},{y,0,1}]
```

5　数列・点列の極限の存在条件

何らかの意味で数列 (点列) の極限が存在することを保証する定理を 3 つ述べる (区間縮小法の原理、Bolzano-Weierstrass の定理、$\mathbb{R}$ の完備性)。論理的には積み木になっていて、最初の区間縮小法の原理自体が、$\mathbb{R}$ の連続性を本質的に用いているので (ここでは定理 2.18 から導く)、どれも $\mathbb{R}$ の連続性のおかげで成り立つ定理と言える。

連続関数に関する 3 つの重要定理のうち、中間値の定理が証明できる。

この節の内容は、主に数列についてであるが、最後に点列の場合に言及する。

5.1　区間縮小法

極限が存在することを示すための、有名な区間縮小法を紹介する。まず図形的なイメージを頭に浮かべやすい形で述べる。

定理 5.1 (区間縮小法の原理) $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を縮小する $\mathbb{R}$ の閉区間列とする。すなわち任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して I_n は $\mathbb{R}$ の閉区間で

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots$$

を満たすとする。このとき

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n\neq\emptyset$$

が成り立つ。$[a_n,b_n]:=I_n$ とおくとき、$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ が成り立つならば、

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c\qquad (\text{そして}\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n=\{c\}).$$

言葉で表すと「**縮小する閉区間の列の共通部分は空でない，幅が** 0 **に収束するならば共通部分は 1 点のみからなる**」。

念のため復習: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\{x\mid(\forall n\in\mathbb{N})x\in I_n\}$. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ とも書く。

実際に証明をするには、次のように述べた方がやりやすいと思われる。

命題 5.2 (書き直し) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加数列、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少数列で

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n<b_n$$

を満たすならば、次の (1), (2) が成り立つ。

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である。そして

$$A:=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad B:=\lim_{n\to\infty}b_n$$

とおくとき、

$$A\le B,\quad (\forall n\in\mathbb{N})\quad a_n\le A\le B\le b_n.$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ ならば、$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$.

(証明に用いるのは、定理 2.18 と、命題 2.13 (の系) くらいである。)

証明

(1) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\le b_n\le b_1$ であるから、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は上界 b_1 を持つので上に有界であり、単調増加であるから、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し、極限は上限に等しい: $A=\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$.

同様に、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $b_n\ge a_n\ge a_1$ であるから、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は下界 a_1 を持つので下に有界であり、単調減少であるから、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束し、極限は下界に等しい: $B=\inf\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}$.

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\le b_n$ であるから (極限でも順序は保たれ)

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n=B.$$

また

$$a_n\le\sup\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}=A,\quad B=\inf\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}\le b_n.$$

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ と仮定すると

$$B-A=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

であるから $A=B$. ■

区間の記号 $[A,B]$ は、普通 $A<B$ の場合にのみ用いるが、次の証明では、$A=B$ の場合も $[A,B]=\{A\}$ という意味で使うと約束する。

定理 5.1 の証明 $I_n=[a_n,b_n]$ で $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定めると、命題 5.2 の仮定が満たされる。$A:=\lim_{n\to\infty}a_n$, $B:=\lim_{n\to\infty}b_n$ とおくと、$\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $a_n\le A\le B\le b_n$ であるから、

$$[A,B]\subset[a_n,b_n]=I_n.$$

ゆえに $[A,B]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ である。

一方、$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ とするとき、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$x\in I_n$ であるから、$a_n\le x\le b_n$. $n\to\infty$ として、$A\le x\le B$. すなわち $x\in[A,B]$. ゆえに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n\subset[A,B]$.

ゆえに $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [A, B]$. 特に $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

$A = B$ ならば $c := A = B$ とおくと、$\lim_{n\to\infty} a_n = A = c$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B = c$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} I_n = \{c\}$. ■

余談 5.3 上の証明では用いなかったが

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_m$$

が成り立つ。実際 $n \geq m$ のときは、$a_n < b_n \leq b_m$. $n < m$ のときは $a_n \leq a_m < b_m$ であるから、いずれの場合も $a_n < b_m$. ■

問 67. 定理 5.1 から、I_n が閉区間という条件を除くと、結論が成り立たないことを示せ。

(次の例は、後で中間値の定理を証明すれば、もっと簡単に議論できるので、授業では飛ばすと思う。)

例 5.4 (正数 p の m 乗根 $\sqrt[m]{p}$ の存在) $p > 0$, $m \in \mathbb{N}$ とするとき、p の m 乗根が存在する、すなわち

$$(\exists x > 0) \quad x^m = p$$

が成り立つことを証明する[31]。

$$a_1 := 0, \quad b_1 := \begin{cases} 1 & (p \leq 1) \\ p & (p > 1) \end{cases}$$

とおくと、$0 < a_1 < b_1$, $a_1^m < p \leq b_1^m$.

$$n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n < b_n, \quad a_n^m < p < b_n^m$$

とするとき、$x := \dfrac{a_n + b_n}{2}$ とおく。$x^m < p$ ならば

$$a_{n+1} := x, \quad b_{n+1} := b_n,$$

$x^m \geq p$ ならば

$$a_{n+1} := a_n, \quad b_{n+1} := p$$

とおくと、

$$0 < a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n, \quad a_{n+1}^m < p \leq b_{n+1}^m, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2.$$

ゆえに数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ で、

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots,$$
$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n < b_n \wedge a_n^m < p \leq b_n^m,$$
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0$$

[31]後で、連続関数を定義して、中間値の定理を証明して、色々な方程式の解の存在を示すことになるが、$f(x) = x^m$ については、連続性に相当することが、命題 2.8 からすぐに導けるので、現時点で (連続性を定義することなしに) m 乗根 $\sqrt[m]{p}$ の存在証明が出来る。これは杉浦 [2] に載っている例であるが、なかなか面白い。もちろん、中間値の定理を知っていればその系になってしまうので、スキップしても問題はない。

を満たすものが作れる。区間縮小法の原理から

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

このとき

$$c^m = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^m = \lim_{n\to\infty} (a_n^m) \le p, \quad c^m = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)^m = \lim_{n\to\infty} (b_n^m) \ge p.$$

ゆえに

$$c^m = p. \blacksquare$$

問 68. 自然数 m と正数 p, ε を入力したとき、例 5.4 の $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \cdots$ を $b_n - a_n < \varepsilon$ となるまで計算するプログラムを作成せよ (ε は「要求精度」で、10^{-6} や 10^{-15} のような "小さい" 数を入力すると $\sqrt[m]{p}$ の近似値が高精度で求まる)。

5.2 中間値の定理

区間縮小法を用いると有名な中間値の定理が証明できる。
それに取り掛かる前に一つの小さな定理を準備する。

命題 5.5 (連続関数は収束列を収束列に写す) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ は連続で、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 内の点列, $a \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とするとき、

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

この結果を $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$ と書くと、初学者に覚えやすいかもしれない。

証明 ε を任意の正の数とする。f は a で連続であるから、ある正の数 δ が存在して、

$$(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ。点列 $\{a_n\}$ は a に収束するので、ある自然数 N が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad |a_n - a| < \delta$$

が成り立つ。ゆえに $n \ge N$ を満たす任意の自然数 n に対して、

$$|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ。これは $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ であることを示している。$\blacksquare$

問 69. (収束列をつねに収束列に写す関数は連続) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$ とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となる任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つならば、f は a で連続であることを示せ。(ヒント: 背理法)

定理 5.6 (中間値の定理 (the intermediate theorem)) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ と仮定すると、$f(c) = 0$ を満たす $c \in (a,b)$ が存在する。

証明 $a_0 := a$, $b_0 := b$, $c_0 := \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ とおき、

- $f(c_0) > 0$ ならば、$a_1 := c_0$, $b_1 := b_0$ とおく。

- $f(c_0) \leq 0$ ならば、$a_1 := a_0$, $b_1 := c_0$ とおく。

すると、条件 $P(n)$ を次のように定めるとき、$P(1)$ が成り立つ。

$$P(n)\colon\ a \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b,\quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\quad f(a_n) > 0,\quad f(b_n) \leq 0.$$

今、$a_1, \dots, a_k$, $b_1, \dots, b_k$ を定めて、$P(1), \dots, P(k)$ が成り立っているとする。

$$c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$$

とおき、

- $f(c_k) > 0$ ならば、$a_{k+1} := c_k$, $b_{k+1} := b_k$ とおく。
- $f(c_k) \leq 0$ ならば、$a_{k+1} := a_k$, $b_{k+1} := c_k$ とおく。

すると $P(k+1)$ が成り立つ。

以下、帰納的に $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定めると、数学的帰納法により、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$P(n)$ が成り立つ。

区間縮小法の原理 (命題 5.2) から、$(\exists c \in [a,b])$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$

f は c で連続であるから、命題 5.5 より、$\{f(a_n)\}$ も $\{f(b_n)\}$ も $f(c)$ に収束する。$f(a_n) > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0,$$

一方、$f(b_n) \leq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0.$$

ゆえに $f(c) = 0$. $c \in [a,b]$ であるが、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ であるから、$c \neq a, b$ であるので、$c \in (a,b)$. ■

この中間値については、高校数学でもある程度利用したことだし、使うときにありがたみを実感しやすいので、この講義ではあまり例は出さないが、次のことは注意しておく。例えば連続な関数の逆関数の存在証明に利用できる。例えば $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ の逆関数として、ルート $\sqrt{\ }$ を定義する等。

問 70. $\sqrt{\ }$ は中学校で学んだはずだが、そのときどのように導入されたか思い出せ (思い出せなかったら調べよ[32])。

念のために (明らかではあるが) 一般化しておく。

系 5.7 (中間値の定理 (一般化版)) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、$k \in \mathbb{R}$ は $f(a)$, $f(b)$ の間にある (i.e. $f(a) < f(b)$ の場合 $f(a) < k < f(b)$, $f(a) > f(b)$ の場合 $f(a) < k < f(b)$) ならば、

$$\exists c \in (a,b) \text{ s.t. } f(c) = k.$$

証明 $f(a) > f(b)$ の場合は $g(x) := f(x) - k$, $f(a) < f(b)$ の場合は $g(x) := k - f(x)$ とおいて、g について定理 5.6 を適用する。■

多変数関数の中間値の定理については、付録の E「多変数実数値関数に関する中間値の定理」を用意した。30 分もあれば解説できるような短い内容なので、興味があれば自習してみることを勧める。

[32] 思い出せた場合は良いけれど、そうでない場合に調べるのは案外難しいかもしれない。学校の教科書をもっと簡単に見返すことが出来るような仕組みがあると良いですね。ちなみに筆者は子供が使い終わった教科書をもらって本棚に入れてある。

(2017 年度、逆関数の存在と連続性について、次のような命題の証明を宿題に出した。)

問 71. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続かつ狭義単調増加[33]とする。$A := f(a)$, $B := f(b)$ とおくと、任意の $x \in [a,b]$ に対して $A \le f(x) \le B$ が成り立つので、$\widetilde{f}\colon [a,b] \to [A,B]$ を $\widetilde{f}(x) := f(x)$ $(x \in [a,b])$ で定めることが出来る。この $\widetilde{f}$ が、以下の (1), (2), (3) を満たすことを示せ。

(1) $\widetilde{f}$ は単射である。　(2) $\widetilde{f}$ は全射である。　(3) 逆関数 $\widetilde{f}^{-1}$ は連続である。

(解答は p. 143)

つまり、1 変数の場合、連続関数の逆関数の存在、連続性が中間値の定理を使って証明できることがある、ということである。

- $f(x) = x^2$ $(x \in [0,\infty))$ の逆として、$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- $f(x) = \sin x$ $(x \in [-\pi/2, \pi/2])$ の逆として、$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$ (主値)。
- $a > 0$, $a \neq 1$ を満たす a に対して、$f(x) = a^x$ $(x \in [0,\infty))$ の逆として、$f^{-1}(x) = \log_a x$. (指数関数をきちんと定義して、それが連続であることを示すのは案外難しいので、逆に対数関数を $\log x := \int_1^x \dfrac{dt}{t}$ $(x > 0)$ で定義して、その逆関数として e^x を定義する方が簡単かもしれない。)

5.3 Bolzano-Weierstrass (ボルツァーノ・ワイエルシュトラス) の定理

数列の極限の存在を示すために極めて重要な Bolzano-Weierstrass の定理を述べる。

そのため数列の部分列という概念を導入しよう。数列 $\{a_n\}$ があるとき、例えば奇数番目の項を選んだ (偶数番目を捨てた)

$$a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2k-1}, a_{2k+1}, \cdots$$

であるとか、偶数番目の項を選んだ (奇数番目を捨てた)

$$a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{2k}, a_{2k+2}, \cdots$$

であるとか、平方数番目の項を選んだ

$$a_1, a_4, a_9, \cdots, a_{k^2}, \cdots$$

であるとか、円周率の 10 進小数表現 $\pi = 3.1415926535\cdots$ を使って選んだ

$$a_3, a_{31}, a_{314}, a_{3141}, \cdots$$

であるとか (これは盛大に捨てている) を数列 $\{a_n\}$ の部分列と言う。

定義 5.8 (部分列) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{b_n\}$ が $\{a_n\}$ の**部分列** (subsequence of $\{a_n\}$) であるとは、各項が自然数である狭義単調増加数列 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (つまり $(\forall k \in \mathbb{N})$ $n_k \in \mathbb{N}$ と $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ が成り立つ) が存在して、

$$b_k = a_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

が成り立つことを言う。

[33]すなわち、$(\forall x \in [a,b])$ $(\forall x' \in [a,b])$ $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ が成り立つ。

上の例では、それぞれ $n_k = 2k-1$, $n_k = 2k$, $n_k = k^2$,

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 31, \quad n_3 = 314, \quad \cdots (\text{がんばって書くと } n_k = [10^{k-1}\pi] \text{ かな？})$$

である。

$\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ が各項が自然数である狭義単調増加数列とするとき、$n_{k+1} > n_k$ より $n_{k+1} \geq n_k + 1$ であることと、$n_1 \geq 1$ から、

$$(\sharp) \qquad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad n_k \geq k$$

が成り立つことを注意しておく。

命題 5.9 (収束列の部分列は (おなじ極限に収束する) 収束列である) 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するならば、$\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は a に収束する。

証明 ε を任意の正数とするとき、数列 $\{a_n\}$ が a に収束することから

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

このとき $k \geq N$ を満たす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ であるから、$n_k \geq N$. ゆえに

$$(\forall k \in \mathbb{N} : k \geq N) \quad |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ を示している。■

命題 5.10 (Bolzano-Weierstrass の定理) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界な数列ならば、その部分列で収束するものが存在する。

証明 有界であるという仮定から、

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -R \leq x_n \leq R.$$

$a_1 := -R$, $b_1 := R$ とおくと、$x_n \in [a_1, b_1]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限に存在する。

$c_1 := (a_1 + b_1)/2$ とおくと、(a) $x_n \in [a_1, c_1]$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に存在するか、(b) $x_n \in [c_1, b_1]$ となる $n \in \mathbb{N}$ が無限に存在する (左右どちらも有限個しかないなら、$[a_1, b_1]$ 内に有限個しか存在しないことになり矛盾する)。(a) が成り立つならば $a_2 := a_1$, $b_2 := c_1$ とおき、そうでなくて (b) が成り立つならば $a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$ とおくと、$x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

以下同様にして a_n, b_n $(n \in \mathbb{N})$ を定めると、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加数列、$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少数列、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n < b_n$, $b_n - a_n = 2R/2^{n-1} \to 0$ $(n \to \infty)$ となるので、区間縮小法の原理によって、

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \quad c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ で

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad x_{n_k} \in [a_k, b_k]$$

という条件を満たすものを以下のように定めることが出来る。

- $n_1 := 1$ とする ($x_1 \in [-R, R] = [a_1, b_1]$ である)。
- $x_{n_1}, \cdots, x_{n_{k-1}}$ まで定まったとして、

  $$x_n \in [a_k, b_k], \quad n > n_{k-1}$$

  を満たす $n \in \mathbb{N}$ (これは無限個存在する) のうちで最小のもの[34]を n_k とおく。

[34]自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は以下の性質を持つ: $\mathbb{N}$ の任意の部分集合は最小値を持つ。

$\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ であるから、

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c. \blacksquare$$

例 5.11 (収束部分列の例) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とするとき、数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列ではない。

しかし偶数番目の項だけを選んで作った部分列 $\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty)$$

であるから収束列である。 ■

この例では数列が簡単なので、収束部分列が具体的に抜き出せたが、数列が有界であればつねに収束部分列が存在するという Bolzano-Weierstrass の定理は、(多分多くの初学者の予想を超えて) 強力である。

次の問には、ぜひ自分で取り組むことを勧める。

問 72. (1) どんな部分列も収束しないような数列の例をあげよ。(2) 有界でないが、ある部分列は収束列であるような数列の例をあげよ。

5.4 Cauchy 列と $\mathbb{R}$ の完備性

(Bolzano-Weierstrass の定理を証明してあれば、有名な $\mathbb{R}$ の完備性 (命題 5.14) の証明は簡単である。)

数列 $\{a_n\}$ が収束列であるための 1 つの必要十分条件「$\{a_n\}$ が Cauchy 列である」を与える。

定義 5.12 (Cauchy 列) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を数列とする。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Cauchy**(コーシー) **列**であるとは、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

命題 5.13 (収束列は Cauchy 列である) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が収束列ならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である。

証明 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ と仮定する。ε を任意の正数とするとき、$\varepsilon/2 > 0$ であるから、

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n, m \in \mathbb{N}$ が $n \geq N$, $m \geq N$ を満たすならば

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。 ■

この命題は基本的だが、この逆が成り立つことがきわめて重要である。

命題 5.14 (($\mathbb{R}$ 内の) Cauchy 列は収束する, $\mathbb{R}$ の完備性) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列ならば、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である。

証明　$\{a_n\}$ が Cauchy 列であることから、有界であることが分かる。実際、

$$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N)(\forall m\in\mathbb{N}:m\geq N)\quad |a_n-a_m|<1$$

が成り立つので、$n\geq N$ とするとき、

$$|a_n|=|a_n-a_N+a_N|\leq|a_n-a_N|+|a_N|\leq 1+|a_N|\,.$$

ゆえに $R:=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N-1}|,|a_N|+1\}$ とおくと、

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |a_n|\leq R$$

が成り立つので、$\{a_n\}$ は有界な数列である。

Bolzano-Weierstrass の定理より、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 $a\in\mathbb{R}$ で、$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$ を満たすものが存在する。

以下、$\{a_n\}$ 自体が a に収束することを示す。任意の正数 ε に対して $(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n\in\mathbb{N}$: $n\geq N)$ $(\forall m\in\mathbb{N}$: $m\geq N)$

$$|a_n-a_m|<\varepsilon.$$

この N に対して、$n\geq N$, $k\geq N$ を満たす任意の $n,k\in\mathbb{N}$ に対して、$n_k\geq k\geq N$ であるから、

$$|a_n-a_{n_k}|<\varepsilon.$$

$k\to\infty$ とすると

$$|a_n-a|\leq\varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ であることを示している。ゆえに $\{a_n\}$ は収束する。■

完備性は様々な場面で役立つ。現象数理学科のカリキュラムでは、例えば「複素関数」で級数を扱う際にその実例を多く見ることが出来る (「絶対収束級数は収束する」等)。

5.5 点列の場合の Bolzano-Weierstrass の定理、Cauchy 列の収束性

多次元の区間縮小法というのもないわけではないが、ここでは Bolzano-Weierstrass の定理の多次元版、Cauchy 列と $\mathbb{R}$ の完備性の多次元版について述べる。

まず有界な数列、Cauchy 列という概念を点列の場合に一般化しておく。

定義 5.15 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^N$ の点列とする。

(i) $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとは、

$$(\exists R\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ |\boldsymbol{a}_n|\leq R$$

が成り立つことをいう。

(ii) $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 点列であるとは、

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N}:n\geq N)(\forall m\in\mathbb{N}:n\geq N)\ \ |\boldsymbol{a}_n-\boldsymbol{a}_m|\leq\varepsilon$$

が成り立つことをいう。

以下の記述を簡単にとどめるため、2次元の場合で説明するが、何次元でも同じであることは容易に分かると思う。

$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbb{R}^2$ の点列とする。$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくと、二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が得られる。

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ についての不等式

$$\max\{|a|, |b|\} \le |\boldsymbol{a}| \le 2\max\{|a|, |b|\}$$

より、次のことは容易に分かる。

- $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界な点列であるためには、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がともに有界な数列であることが必要十分である。

- $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 点列であるためには、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がともに Cauchy (数) 列であることが必要十分である。

これから、$\mathbb{R}^2$ の Cauchy 列は収束列であることが容易に示される。($\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列なので、それぞれ極限 a, b が存在する。$\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} a_n \\ \lim_{n\to\infty} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$. ゆえに $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列である。)

命題 5.16 $\mathbb{R}^2$ は完備である。

問 73. 命題 5.16 を証明せよ。

Bolzano-Weierstrass の定理の $\mathbb{R}^2$ 版が成り立つ。すなわち

命題 5.17 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の有界な点列ならば、その部分列で収束するものが存在する。

証明　各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} := \boldsymbol{a}_n$ とおくと、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界な数列である。Bolzano-Weierstrass の定理より、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (つまり $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は各項が自然数である狭義単調増加数列) と $a \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

このとき、$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ も有界な数列であるから、Bolzano-Weierstrass の定理より、$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{b_{n_{k_\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ (つまり $\{k_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ は各項が自然数である狭義単調増加数列) と $b \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{\ell\to\infty} b_{n_{k_\ell}} = b.$$

$\{a_{n_{k_\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ は、a に収束する数列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列であるから、

$$\lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} = a.$$

ゆえに

$$\lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{a}_{n_{k_\ell}} = \lim_{\ell\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n_{k_\ell}} \\ b_{n_{k_\ell}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

ゆえに $\{\boldsymbol{a}_{n_{k_\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ は $\{\boldsymbol{a}_n\}$ の部分列で収束する。■

例題 5.1 $\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad b_n = \sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{n^2}$$

で定めるとき、$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^2$ の有界な点列であることはすぐに分かるが、収束部分列を実際に取り出して見よ。

解答 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しないが、

$$a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2k}, \ldots$$

と偶数番目の項を取ると、

$$a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}$$

ゆえ、これは 1 に収束する。つまり $n_k = 2k$ としたわけ。次に $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を考えると、$b_{n_k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2}$ ゆえ、これも収束しないが、3 項おきに取ると、0 に収束することが分かる。つまり $k_\ell = 3\ell$, すなわち $n_{k_\ell} = 6\ell$ とすると、

$$\boldsymbol{a}_{n_{k_\ell}} = \boldsymbol{a}_{6\ell} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{6\ell} \\ \dfrac{1}{36\ell^2} \end{pmatrix}$$

であるから、$\{\boldsymbol{a}_{n_{k_\ell}}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束する。 ■

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)

これまでの節の立て方からすると、6, 7, 8, 9 節を一つの節にまとめて、「$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合のコンパクト性とその応用」のような見出しをつけるのが良いかもしれないが、あまりにも長くなってしまうのと、初学者には中身が見えにくくなってしまうおそれがあるので、細かく分割して、中身の見える見出しをつけることにする。

重要な Weierstrass の最大値定理も、1 次元の場合に限れば、すぐに証明に取り掛かれる。

$[a,b]$ と書いたら、1 次元の閉区間のことを表すとする。つまり、$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ であり、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$.

定理 6.1 (Weierstrass の最大値定理) $K = [a,b]$ は $\mathbb{R}$ の閉区間、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。
(「$\mathbb{R}$ の閉区間で定義された連続関数は、最大値、最小値を持つ。」)

証明 最大値の存在を示す (最小値の存在も同様に証明できる)。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

($f(K)$ は f の値域 $\{f(x) \mid x \in K\}$ を表す。)

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

(i) $f(K)$ が上に有界の場合は、S は $f(K)$ の上限であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

(ii) $f(K)$ が上に有界でない場合は、$S=\infty$ であり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n\in K)\quad f(x_n)>n.$$

このように $\{x_n\}$ を作ると、(i), (ii) いずれの場合も

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=S$$

が成り立つ。

Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、命題 2.13 によって $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

f は c で連続であるから、命題 5.5 によって

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=S.$$

ゆえに S は (∞ ではなく) 実数であり、$f(K)$ の上限であることが分かる。$S=f(c)\in f(K)$) であるから、それは f の最大値である。■

注意 6.2 上の証明の途中で、$f(K)$ が上に有界ではない場合を考えているが、実際にはそういうことは起こりえないわけである。(もしかすると、先に $f(K)$ の有界性を証明して、それから $f(K)$ の上限に収束する数列を作る、と話を進める方が分かりやすいかな？) ■

以下、上の定理の仮定が成り立たず、定理の結論である最大値の存在が成り立たない例をいくつかあげる。

例 6.3 (関数が連続でない場合) $K=[0,1]$, $f(x):=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$ のとき。f が連続でない。$\displaystyle\sup_{x\in K} f(x)=1$ であるが、それは最大値ではない。$\displaystyle\max_{x\in K} f(x)$ は存在しない。■

例 6.4 (定義域が閉区間でなく場合 1) $K=(0,1)$, $f(x):=x$ $(x\in K)$ のとき。f は連続であるが、K が閉区間でない。$\displaystyle\sup_{x\in K} f(x)=1$ であるが、それは最大値ではない。$\displaystyle\max_{x\in K} f(x)$ は存在しない。■

例 6.5 (定義域が閉区間でない場合 2) $K=(0,1)$, $f(x):=\dfrac{1}{x}$ $(x\in K)$ のとき。f は連続であるが、K が閉区間でない。$\displaystyle\sup_{x\in K} f(x)=\infty$ である。当然、$\displaystyle\max_{x\in K} f(x)$ は存在しない。■

例 6.6 (定義域が閉集合であるが有界でない場合 1) $K=[0,\infty)$, $f(x):=\tan^{-1}x$ $(x\in K)$ のとき。f は連続であるが、K が閉区間でない (区間であり、閉集合ではあるが)。$\displaystyle\sup_{x\in K} f(x)=\frac{\pi}{2}$ であるが、それは最大値ではない。$\displaystyle\max_{x\in K} f(x)$ は存在しない。■

例 6.7 (定義域が閉集合であるが有界でない場合 2) $K=[0,\infty)$, $f(x):=x$ $(x\in K)$ のとき、f は連続であるが、K が閉区間でない。$\displaystyle\sup_{x\in K} f(x)=\infty$ であり、f は上に有界ではない。(上限もないのだから) $\displaystyle\max_{x\in K} f(x)$ は存在しない。■

例 6.5 を詳しく調べてみよう。$f(K) = (1, \infty)$ であり、$f(K)$ は上に有界ではない。$x_n = \dfrac{1}{n}$ とすると、$f(x_n) = n$ であり、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$. $\{x_n\}$ は部分列を取らなくても収束する。$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. つまり証明中の記号で $c = 0$. しかし $0 < x_n < 1$ であるが、$0 < c < 1$ は成り立たない。すなわち $c \notin K$. ここで証明の議論が成り立たなくなっている。■

例	K は有界閉区間？	f は連続？	$\sup f(K)$	$\max f(K)$
i	○	×	1	存在しない
ii	×	○	1	存在しない
iii	×	○	∞	存在しない
iv	×	○	$\dfrac{\pi}{2}$	存在しない
v	×	○	∞	存在しない

K が有界閉区間という条件が成立しないと、最大値の存在が導かれない場合が、たくさんある。■

問 74. 上の他の例について、証明中の議論がどこで成り立たなくなっているか、検討せよ。

Weierstrass の最大値定理を多次元の場合に一般化するためには、$x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$, $n \to \infty$ のとき $x_n \to c$ であることから、$c \in K$ が導けることが重要であることが想像できるであろう。8 節でそのための条件を検討する。

7　1 変数関数に対する平均値の定理、Taylor の定理

前節で示した Weierstrass の最大値定理により、1 変数実数値関数に関する平均値の定理、Taylor の定理が証明できる。

なお、多変数関数については、容易に 1 変数関数の場合に帰着され、解析学として新たに説明すべきところはない (微積分的にはそれなりに手間がかかる — 詳細は、例えば講義ノート [14], [15] を紹介しておく)。この「数学解析」の授業では、とりあえず平均値の定理まで説明することくらいを目標にして、後は Taylor の定理、多変数版についてのお話をするくらい (両者の存在定理の面を強調するとか)。

7.1　平均値の定理

高校の数学の微分法で、イメージで納得していたような「よく知られた事実」をきちんと証明しようとすると、平均値の定理のお世話になることが多い。

微分係数の定義 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ より、直観的に “明らか” に、十分小さな $|h|$ に対して

$$f'(x) \fallingdotseq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であるが、大体等しい $\fallingdotseq$ は数学的な主張 (命題) ではなく、厳密な論証に使えない。

定義 7.1 (極大値、極小値、極値) I を $\mathbb{R}$ の区間、 $c \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ とする。$f(c)$ が、x が c に十分近い範囲での f の最大値になっているとき、すなわち

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I : |x - c| < \varepsilon)\ f(c) \geq f(x).$$

が成り立っているとき、$f(c)$ は f の**極大値**(きょくだいち)である、f は c で**極大**である、という。同様に **極小値**(きょくしょうち), **極小**が定義される。極大値、極小値をあわせて**極値**と呼ぶ。f が c で極値を取るとき、 c を**極値点**と呼ぶ。

命題 7.2 (内点で極値を取れば、微分係数 $= 0$) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$, c は I の内点, $f(c)$ は f の極値、f は c で微分可能 $\Longrightarrow f'(c) = 0$.

(適当なグラフを板書する。端の点で極大になっているような場合を描いたり。)

証明　f が c で極大になる場合を考える (極小になる場合も同様)。極大の定義から、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in I : |x - c| < \varepsilon)\ f(c) \geq f(x).$$

$|h| < \varepsilon$ ならば、

$$f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

まず $h > 0$ の場合を考えると、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

ここで $h \downarrow 0$ として[35] $f'(c) \leq 0$ が得られる。一方 $h < 0$ の場合を考えると、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

ここで $h \uparrow 0$ として $f'(c) \geq 0$ が得られる。ゆえに $f'(c) = 0$. ■

命題 7.3 (Rolle の定理) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で、(a,b) で微分可能, $f(a) = f(b)$ が成り立つならば、$\exists c \in (a,b)$ s.t. $f'(c) = 0$.

(これも適当なグラフを板書する。授業では端の点で最小になっているような場合を描いた。)

証明　$I = [a,b]$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合であるから、I 上の連続関数である f は最大値と最小値を持つ。最大値と最小値が等しい場合、f は定数関数であるから、$c := \dfrac{a+b}{2}$ とおけば $f'(c) = 0$, $a < c < b$.

最大値と最小値が等しくない場合、少なくとも一方は $f(a) = f(b)$ に等しくない。すると、ある内点 c で、f は最大値かまたは最小値を取ることになる。定理 7.2 によって、$f'(c) = 0$. ■

命題 7.4 (平均値の定理 (the mean value theorem)) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は連続で、(a,b) で微分可能とするとき、$\exists c \in (a,b)$ s.t.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

証明　$x \in [a,b]$ に対して

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

[35] h を正の方から 0 に近付けることを $h \downarrow 0$ と書く。$h \to +0$ と同じこと。同様に $h \to -0$ を $h \uparrow 0$ とも書く。

とおくと

$$\begin{cases} g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{連続}, \\ g \text{ は } (a,b) \text{ で微分可能}, \\ g(a) = g(b) \end{cases}$$

となり, g は Rolle の定理の仮定を満たす。よって、$\exists c \in (a,b)$ s.t. $g'(c) = 0$. ところで、

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるから、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \blacksquare$$

注意 7.5 (1) この定理は、いろいろな表し方がある。例えば、

$$\exists\theta \in (0,1) \text{ s.t. } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\theta(b-a))$$

のように c のかわりに θ で表現したり、

$$\exists c \in (a,b) \text{ s.t. } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

のように分母を払った形にしたりする。また $b-a=h$ として、

$$\exists\theta \in (0,1) \text{ s.t. } f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$

とした形は、$h<0$ の場合も成り立ち、便利であるので、特によく使われる。

(2) 平均値の定理はいわゆる「**存在定理**」であって、c の存在は主張するが、c の値については、a と b の間にあるという以外に何の情報も与えていない。

(3) 時間に余裕があれば、この機会に、有名なロピタルの定理を証明するために便利な、Cauchy の第二平均値定理 (命題 F.1, p. 166) を見ておくと良いかもしれない。やはり Rolle の定理を用いて証明出来る。 $\blacksquare$

命題 7.6 (微分がいたるとこと正ならば狭義単調増加) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、f は (a,b) で微分可能、$f'>0$ in (a,b) とするとき、f は $[a,b]$ で狭義の単調増加である。すなわち

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

証明 平均値の定理より、$f(x_2)-f(x_1) = f'(c)(x_2-x_1)$ を満たす $c \in (x_1,x_2)$ が存在する。仮定より $f'(c)>0$, $x_2-x_1>0$ であるから、$f(x_2) > f(x_1)$. $\blacksquare$

命題 7.7 (微分がいたるところ非負ならば単調増加) $f' \ge 0$ の場合は広義の単調増加となる。すなわち $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続で、f は (a,b) で微分可能、$f' \ge 0$ in (a,b) とするとき

$$a \le x_1 < x_2 \le b \Longrightarrow f(x_1) \le f(x_2).$$

証明は上と同様なので省略する。

次の微分法を習った人なら誰でも知っている定理 (しかし案外証明を知っている人は少ない) も平均値の定理で証明できる。

命題 7.8 (微分がいたるところ 0 ならば定数) $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で、f は (a,b) で微分可能、$f'\equiv 0$ in (a,b) とするとき f は $[a,b]$ で定数となる。

これも証明は上と同様なので省略する。

問 75. 命題 7.6, 7.7, 7.8 のいずれかの証明を書け。(「上と同様」と言うのはまったく正しいけれど、読むことと書くことは違うので、書く練習と思ってやってみよう。)

注意 7.9 平均値の定理はベクトル値関数では成立しない。例えば $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $(t\in[0,2\pi])$ とすると、$f(0)=f(2\pi)$, $f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ であるから、$f(2\pi)-f(0)=f'(c)(2\pi-0)$ を満たす c は存在しない (左辺は 0 だが、右辺は 0 にならない)。しかし、次の定理は多次元でも成立するので、あまり困ることはない。■

命題 7.10 (有限増分の公式) $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続で、f は (a,b) で微分可能、f' は (a,b) で有界とすると、$\displaystyle\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|=M$ とおくとき、$|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$.

これも証明は (1 次元の場合は[36]) 平均値の定理からただちに導かれる。なお、f が C^1 級であれば、平均値の定理を使わなくても、$f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$ $(x\in[a,b])$ から

$$|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(t)\,dt\right|\le\int_a^b|f'(t)|\,dt\le M\int_a^b dt=M(b-a)$$

と容易に導くことが出来る。ただし、連続関数の積分の存在を証明するのにも、それなりに手間がかかるので、論理的に近道が出来るわけではないし、$\sup_{x\in(a,b)}|f'(x)|$ が有限であることを示すのには、大抵の場合は f' の連続性を仮定して、Weierstrass の最大値定理を用いるのが簡単である。— つまり Weierstrass の最大値定理を避けて通ることは難しい、ということである。

次の定理は、載せていないテキストもあるが、しばしば利用される重要なものである。

命題 7.11 $I=[a,b]$, $c\in(a,b)$, $f\colon I\to\mathbb{R}$ は連続、f は $I\setminus\{c\}$ で微分可能、$A\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{x\neq c\\ x\to c}} f'(x)=A$$

が成り立つならば、f は c でも微分可能で $f'(c)=A$ が成り立つ。

問 76. 命題 7.11 を証明せよ。

余談 7.12 (やや覚えにくい定理について言い訳のようなもの) 平均値の定理 (命題 7.4) の仮定の中で、「f は $[a,b]$ で連続で、(a,b) で微分可能」という条件を、シンプルな「f は $[a,b]$ で微分可能」で置き換えるテキストを最近見かけるようになった。

ここら辺は教える側の意見が揃わないところなのだけど、私は次のように考えている。

[36] 多次元の場合は少し工夫が必要である

- シンプルにすることで証明自体が簡単になって、より多くの人が理解可能になるのならば、教育的見地からシンプルなものを採用することは考えられる。(一般の場合の証明がものすごく大変な定理というのがいくつかあって、そういうときに証明を全く省略するよりは、簡単化した定理の証明を見せるのは価値がある。) しかし今の場合はシンプルにしても証明自体はまったく変わらない。

- シンプルでないと、そもそも覚えることすら出来ないかもしれない。覚えられないよりは覚えられた方が良いので、シンプルなバージョンを教える価値がある、という考え方には一理ある。

- 微積分は「基本」であるとして、色々な人達に講義される。対象者によって教え方が違うことはありうる。将来道具として使いこなさないといけない人には、使うときのことを考えて、それなりにシャープなナイフを渡すべきである。

一般論としては、どういう選択をするか、結構悩ましい。今回は、命題 7.6 を証明するには、シンプル・バージョンの定理では不十分なので、シャープなバージョン (命題 7.4) を採用した次第である。■

7.2 Taylor の定理

(平均値の定理は済んでいるので、ここはカットする可能性が高い。)

Taylor の定理は、微積分の要の一つであるが、平均値の定理の一般化であって、証明も平均値の定理の証明とほぼ同じで (ただし証明を自力で発見して書くのは難しい[37])、Rolle の定理を用いる。

定理 7.13 (Taylor の定理) $k \in \mathbb{N}$, I は $\mathbb{R}$ の区間, $f\colon I \to \mathbb{R}$ は k 回微分可能な関数, $a \in I$, $x \in I$ とするとき、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + R_k \tag{6}$$

によって R_k を定義すれば

$$R_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-a)^k \tag{7}$$

を満たす c が a と x の間に[a]存在する。

[a]つまり $a < x$ ならば $c \in (a, x)$, $x < a$ ならば $c \in (x, a)$, $a = x$ ならば $c = a$.

証明　$a = x$ ならば明らかだから、$a \neq x$ とする。

$$g(t) = -f(x) + \left[\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-t)^j}{j!} f^{(j)}(t) + \frac{(x-t)^k}{k!}\omega\right]$$

とおく。ただし、定数 ω は $g(a) = 0$ となるように、すなわち

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{(x-a)^k}{k!}\omega$$

[37]以下の証明の $g(t)$ や ω を自分で見つけるのは難しい。

が成り立つように定める。$g(x) = 0$ であるから、$g(a) = g(x)$ であり、g について Rolle の定理を適用すると、$g'(c) = 0$ (c は a と x の間) を満たす c の存在が分かる。ところで (根性で) 計算すると

$$g'(t) = \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\left[f^{(k)}(t) - \omega\right]$$

となることがわかる。$t = c$ を代入して、$f^{(k)}(c) = \omega$ を得る。■

注意 7.14 (1) (C.1) の右辺は、$f^{(0)} = f$, $0! = 1$ であることに注意すると、

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + R_k$$

と書ける。ただし $h^0 \equiv 1$ であるとした[38]。

(2) R_k を k **次剰余項**(じょうよこう)と呼ぶが、特に (7) の形で表されたものを **Lagrange の剰余項**という。**気分的には**剰余項は小さな項である。$\dfrac{1}{k!}$ は小さいし、多くの場合は $|x-a|$ が小さいので $|(x-a)^k|$ はとても小さいから (本当は、$|x-a|$ が小さくないときにもこの定理を用いるし、$|f^{(k)}(c)|$ がものすごく大きくなることもありうるわけで、R_k が本当に小さいかどうかはケース・バイ・ケースである)。

(3) $k = 1$ ならば平均値の定理に相当する。すなわち Taylor の定理は平均値の定理の一般化である。

(4) $x - a = h$ とおくと (6), (7) は以下のようになる:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}h^{k-1} + R_k,$$

$$R_k = \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!}h^k.$$

ここで θ は $0 < \theta < 1$ を満たす、ある数である。

(5) 応用上重要な多くの場合に、a に十分近い任意の x に対して $\displaystyle\lim_{k\to\infty} R_k = 0$ が成り立つ (このとき、f は a の近傍で実解析的であるという)。すなわち

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

が成立する。これを f の a を中心とする **Taylor 展開** (**テイラー展開**, **Taylor expansion**) と呼ぶ。特に $a = 0$ の場合、すなわち

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

を **Maclaurin**(マクローリン) **展開** (マクローリン展開) と呼ぶ[39]。これら冪級数の性質に関しては、複素関数論で詳しく学ぶことになる。■

[38]正数でない h に対して h^0 は一般には定義されない。例えば 0^0 が定義されないのは有名な話であるが、ここでは 1 であると考える。

[39]Taylor 展開の中心が 0 であるものを Maclaurin 展開と呼ぶ、というのはすっかり普及している用語であるが、歴史的には正しくないのだそうである (このことも良く知られているが、今さら変えられないらしい)。

7.3 凸関数と 2 階導関数

(授業では、この小節を説明する余裕はないと思われる。簡単であるから必要が生じてから読めば良いであろう。)

定義 7.15 (凸関数) I を $\mathbb{R}$ の区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ とするとき、

f が**凸関数**(とつかんすう) (convex function) $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} (\forall a \in I)(\forall b \in I)(\forall t \in (0,1)) \\ f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b). \end{cases}$

直観的には、グラフが下に凸であるような関数のことを凸関数というわけである。

定理 7.16 (2 階導関数の符号と凸性) $\mathbb{R}$ の区間 I で f'' が存在して、$f'' \ge 0$ on I であるとき、以下のことが成立する。

(1) 任意の $a, x \in I$ に対して, $f(x) \ge f(a) + (x-a)f'(a)$.

(2) f は I で凸。

(3) $f'(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in I$ が存在すれば、α は f の最少点である。

証明

(1) Taylor の定理を $n=2$ として用いると、$f'' \ge 0$ から

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \ge f(a) + f'(a)(x-a).$$

(2) $x = ta + (1-t)b$ とすると、前項より

$$f(a) \ge f(x) + (a-x)f'(x), \quad f(b) \ge f(x) + (b-x)f'(x)$$

となる。両式にそれぞれ t, $1-t$ (≥ 0) を乗じて、辺々加えると、

$$tf(a) + (1-t)f(b) \ge [t + (1-t)]f(x) + [t(a-x) + (1-t)(b-x)]f'(x).$$

整理すると[40]

$$tf(a) + (1-t)f(b) \ge f(x) = f(ta + (1-t)b).$$

(3) Taylor の定理を $n=2$ として使うと、α と x の間に c が取れて、

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(c)}{2}(x-\alpha)^2.$$

$f'(\alpha) = 0$, $f'(c) \ge 0$, $(x-\alpha)^2 \ge 0$ であるから、

$$f(x) \ge f(\alpha).$$

ゆえに $f(x)$ は $x = \alpha$ で最小となる。 ■

[40] $t(a-x) + (1-t)(b-x) = ta + (1-t)b - [t + (1-t)]x = ta + (1-t)b - x = 0.$

8 開集合, 閉集合

(講義では毎年少しずつ工夫している。講義メモを見返して、このノートを改良していくべきであるが、さぼりがち。)

(開集合、閉集合について、微積分で良く必要になる、最小限のことを説明する。「トポロジー」を履修すれば詳しく学ぶことが出来る。)

開集合・閉集合の話をするのは、この講義の流れ的は、Weierstrass の最大値定理の多次元版を述べるために、閉集合の概念が必要になったからである (6 節の最後に述べておいた)。

多変数関数の微分法のテキスト[41]に出て来る定理・命題の 8 割以上で、関数の定義域は開集合であると仮定するのが普通である。そうする理由を一つ説明しておく。f が n 変数ベクトル値関数であるとは、$\mathbb{R}^n$ の部分集合 Ω を定義域とする写像 $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ であることを意味するが、$a \in \Omega$ において f の微分を考える場合に、“a に十分近い任意の” 点 $a+h$ での値に意味がないと、微分を定義すること自体が困難である。Ω が次で定義する開集合というものであれば、この問題が解決される[42]。

定義 8.1 ($\mathbb{R}^n$ の開集合) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。Ω が $\mathbb{R}^n$ の**開集合**(かい) (開部分集合, an open (sub)set of $\mathbb{R}^n$) とは、

$$(\heartsuit) \qquad (\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad B(x;\varepsilon) \subset \Omega$$

を満たすことをいう。

復習 (?): $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、$B(a;r)$ とは、a を中心とする半径 r の開球である:

$$B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\} \quad (a \text{ からの距離が } r \text{ より小さい点の全体}).$$

従って $(\heartsuit)$ は

$$(\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \varepsilon) \quad y \in \Omega$$

と同値である。

$\mathbb{R}^n$ の開集合のイメージ 分の “縁” の点を 1 つも含まない集合は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。なぜなら x と Ω の補集合までの距離 ε は正で、$B(x;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つから。(x と Ω^c との距離とは、$\inf\limits_{y \in \Omega^c} |y-x|$ のことをいう。これを ε とするとき、$B(x;\varepsilon) \subset \Omega$ が証明できる。)

一方、自分の “縁” の点を 1 つでも含む集合は、$\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。a を縁から選ぶと、a と Ω^c との距離は 0 となってしまう。$\varepsilon > 0$ をどんなに小さく取っても、$B(a;\varepsilon)$ は Ω をはみ出すので、Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではない。 ■

例 8.2 (開区間は開集合) $\mathbb{R}$ の開区間 I は $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の開集合である。例えば $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $I = (\alpha, \beta)$ の場合、$a \in I$ に対して、

$$\varepsilon := a \text{ と } I \text{ の端点までの距離} = \min\{a-\alpha, \beta-a\}$$

とおくと、$\varepsilon > 0$ で、$B(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset I$ となるので (確認せよ)、I は開集合である。$I = (-\infty, \beta)$, $I = (\alpha, \infty)$ の場合も同様である。 ■

[41]参考までに、多変数の微分法の講義ノート桂田 [14], [15] を紹介しておく。

[42]実はここに書いた理由がかすんでしまうくらい、開集合や閉集合が重要である理由は他にある。それはおいおい明らかになる。

例 8.3 (開球は開集合) $c \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、$\Omega := B(c;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-c| < r\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(証明) $a \in \Omega$ とするとき、$|a-c| < r$ であるから、$\varepsilon := r - |a-c|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ で、$B(a;\varepsilon) \subset \Omega$ である。実際 $y \in B(a;\varepsilon)$ とすると、$|y-a| < \varepsilon$ であるから、

$$|y-c| = |y-a+a-c| \le |y-a| + |a-c| < \varepsilon + |a-c| = r$$

となり、$y \in B(c;r) = \Omega$ である。■

余談 8.4 (証明のヒント) 与えられた $\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを、定義に従って証明する場合、ε をどう選ぶか問題になるが、$\varepsilon := \inf\{|x-a| \mid x \in \Omega^c\}$ とおいて、$\varepsilon > 0$ となるかどうかチェックすれば良い。(それさえ言えれば、$B(a;\varepsilon) \subset \Omega$ が一般に成り立つことが容易に示せる。) 上の二つの例の ε の取り方は実はそうなっている。■

問 77. $a \in \mathbb{R}$, $r \ge 0$ に対して、$V(a;r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}$ とおく。$A \subset \mathbb{R}^n$, $A \ne \mathbb{R}^n$, $a \in A$ に対して、$\varepsilon := \inf\{|x-a| \mid x \in A^c\}$ とおくとき、$V(a;\varepsilon) \subset A$ であることを示せ。

問 78. 一般に $\varepsilon := \inf\{|x-a| \mid x \in \Omega^c\}$ とおくとき、$\varepsilon \ge 0$ であるが、Ω が開集合 $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$ であることを示せ。

開集合については、次の定理が基本的である。

定理 8.5 (位相 (開集合系) の公理, 授業では定理 A と呼ぶ) (1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(2) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるならば、合併 $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\lambda \in \Lambda)\ x \in U_\lambda\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) U_1 と U_2 が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば、$U_1 \cap U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

問 79. 命題 8.5 を証明せよ。

問 80. 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であっても、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合とは限らない。例をあげよ。

微積分に現れる開集合の多くは、次の命題によって開集合であることを証明できる。(かなり便利である。また、等号抜きの不等式で定義できるものは開集合ということで、「開集合とは、自分自身の「縁(ふち)」をまったく含まない集合である。」という感覚が持てるようになる。)

定理 8.6 (真不等号の不等式は開集合を定める, 授業では定理 B と呼ぶ) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ne \gamma\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。
(利用上の注意: f の定義域が $\mathbb{R}^n$ であることが重要である。)

証明 $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\}$ とおく。$a \in \Omega$ ならば、$f(a) > \alpha$. ゆえに $\varepsilon := f(a) - \alpha$ とおくと $\varepsilon > 0$. f は a で連続だから、

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < \delta) \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

ゆえに $\forall x \in B(a;\delta)$ に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ であるから、$-\varepsilon < f(x)-f(a) < \varepsilon$. ゆえに $f(x) > f(a)-\varepsilon = f(a)-(f(a)-\alpha) = \alpha$. ゆえに $x \in \Omega$. これは $B(a;\delta) \subset \Omega$ を意味している。ゆえに Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\}$ が開集合であることも同様に証明できる (あるいは $F(x) := \beta - f(x)$ とおくと、F は連続で、$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) > 0\}$ となることからも分かる)。

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha < f(x) < \beta\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \alpha\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \beta\},$$
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq \gamma\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \gamma\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \gamma\}$$

であるから、定理 8.5 によって、これらの集合も $\mathbb{R}^n$ の開集合である。■

余談 8.7 (f の定義域が $\mathbb{R}^n$ でない場合) 位相空間の一般論を学ぶと、「位相空間 X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ が連続であるためには、Y の任意の開集合 V に対して、$f^{-1}(V)$ が X の開集合であることが必要十分である」という定理が基本的であることが分かる。上の命題の最初の 3 つの集合は $f^{-1}((\alpha,\infty))$, $f^{-1}((-\infty,\beta))$, $f^{-1}((\alpha,\beta))$ であるので、開区間の連続関数による逆像になっていることに注意しよう。

なお、f の定義域が $\mathbb{R}^n$ でない場合は、注意が必要である。簡単に言うと、$f\colon A \to \mathbb{R}$ が連続であるとき、$f^{-1}((\alpha,\infty))$, $f^{-1}((-\infty,\beta))$, $f^{-1}((\alpha,\beta))$ はいずれも “A の開集合” となる。「A の開集合」を理解するには、部分位相 (相対位相) という概念を学ぶ必要がある。

大して難しい話ではないが、講義では (時間的余裕がないと思われるので) 説明は省略する。簡単な説明を 8.1 に書いておく。

これまで、単に「開集合」と言わずに「$\mathbb{R}^n$ の開集合」と言ってきたのは、それなりの理由があるわけである。

なお、問 84 も参照せよ。■

問 81. 定理 8.6 を用いて以下のことを示せ。

(1) $\mathbb{R}$ の開区間は $\mathbb{R}$ の開集合である。

(2) $\mathbb{R}^n$ の開球は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) $\mathbb{R}^2$ の第 1 象限 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \land y > 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

問 82. $\mathbb{R}^2$ における次の各集合について、(a) 図示できる場合は図示せよ, (b) 開集合である場合は証明せよ。
(1) $\emptyset$　(2) $\mathbb{R}^2$　(3) $\{(0,0)\}$　(4) $\{(0,0),(1,1)\}$　(5) $(1,2)\times(3,4)$　(6) $[1,2]\times(3,4)$
(7) $[1,2]\times[3,4]$　(8) $\{(x,y) \mid 5 < x^2+y^2 < 6\}$　(9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$　(10) $\{(x,y) \mid x^3 \le y \le x^2\}$
(11) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

問 83. 前問の各集合が、開集合でない場合、閉集合でない場合に、そのことを証明せよ。

問 84. (定理 8.6 の一般化) U, V をそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ の開集合、$f\colon U \to V$ を連続関数とする。このとき $W \subset V$ なる任意の $\mathbb{R}^n$ の開集合 W に対して、$f^{-1}(W) := \{x \in U \mid f(x) \in W\}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合となることを証明するため、以下の空欄を埋めよ。「任意の $a \in \boxed{\text{ア}}$ をとると、$a \in U$ かつ $f(a) \in \boxed{\text{イ}}$. $\boxed{\text{イ}}$ は $\boxed{\text{ウ}}$ であるから、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(f(a);\varepsilon) \subset \boxed{\text{イ}}$ (ここで $B(\alpha;r)$ は中心 α, 半径 r の開球を表す記号). f の連続性から $\boxed{\text{エ}}$ $\delta > 0$ $(\forall x \in \mathbb{R}^n)$ $[\ |x-a| < \delta \Longrightarrow x \in U$ かつ $|f(x)-f(a)| < \varepsilon]$. ゆえに $f(B(a;\delta)) \subset B(f(a);\varepsilon) \subset W$ となるが、これから $B(a;\delta) \subset \boxed{\text{オ}}$. ゆえに $f^{-1}(W)$ は R^n の開集合である。」■

開集合と対になる概念として、閉集合がある[43]。

定義 8.8 ($\mathbb{R}^n$ の閉集合) $F \subset \mathbb{R}^n$ とする。F が $\mathbb{R}^n$ の**閉集合**(へい)(閉部分集合, a closed (sub)set of $\mathbb{R}^n$) であるとは、$F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることをいう。

この講義の中でも、有界閉集合に関するいかにも重要そうな定理が後からたくさん出て来るので、閉集合と言う概念の重要さは学習者にとって特に分かりにくい、ということはないと思われるが、近いところで、命題 9.1 を強調しておくと良いかも。

定理 8.5 に対応する、以下の命題が得られる。

定理 8.9 (閉集合系の公理, 授業では定理 C と呼ぶ) (1) $\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(2) 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各集合 U_λ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるならば、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall\lambda \in \Lambda)\ x \in U_\lambda\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば、$U_1 \cup U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

問 85. 命題 8.9 を証明せよ。(ヒント: ド・モルガンの法則 $\displaystyle\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda^c$ を用いると、定理 8.5 に帰着される。)

例 8.10 ($\mathbb{R}^n$ の単元集合は閉集合) $a \in \mathbb{R}^n$ とするとき、$F := \{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

例 8.11 (閉区間は閉集合) $\mathbb{R}$ の閉区間 I は、$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ の閉集合である。例えば $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $I = [\alpha, \beta]$ の場合

$$I^c = \mathbb{R} \setminus I = \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta] = (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$$

であり、これは二つの開集合 (開区間であるから) の合併であるので、I^c は $\mathbb{R}$ の開集合である。ゆえに I は $\mathbb{R}$ の閉集合である。■

開集合の場合の定理 8.6 の、閉集合バージョンは次のようになる。

定理 8.12 (等号付きの不等式は閉集合を定める, 授業では定理 D と呼ぶ) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続関数、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge \alpha\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \beta\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \le f(x) \le \beta\}, \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

証明 補集合が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを確認すれば良い。

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \ge \alpha\}^c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\}, \\
\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le \beta\}^c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\}, \\
\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \le f(x) \le \beta\}^c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \beta\}, \\
\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \gamma\}^c &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \gamma\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > \gamma\}
\end{aligned}$$

[43] 閉集合は、次の定義 8.8 のように定義するのがスタンダードであるが、「分かりにくい」という学生が少なくない。杉浦 [2] のように $\overline{F} = F$ が成り立つことと定義するのもありかもしれない。そして命題 8.14 を前に出して、定理 8.9 を後に続けるわけである。一度試してみる価値はあるかもしれない。

定理 8.6 と、定理 8.5 によって、$\mathbb{R}^n$ の閉集合である。■

例 8.13 ($\mathbb{R}^n$ の閉球は閉集合) $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とするとき、$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| \le r\}$ とおくと、B は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。■

問 86. 定理 8.9 を用いて以下のことを示せ。

(1) $\mathbb{R}$ の閉区間 $[\alpha, \beta]$ (ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$) は $\mathbb{R}$ の閉集合である。

(2) $\mathbb{R}^n$ の閉球は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) $\mathbb{R}^n$ の単元集合 $\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

問 87. $\mathbb{R}^2$ における次の各集合について、閉集合である場合はそのことを証明せよ。
(1) $\emptyset$　(2) $\mathbb{R}^2$　(3) $\{(0,0)\}$　(4) $\{(0,0),(1,1)\}$　(5) $(1,2) \times (3,4)$　(6) $[1,2] \times (3,4)$　(7) $[1,2] \times [3,4]$　(8) $\{(x,y) \mid 5 < x^2 + y^2 < 6\}$　(9) $(0,\infty) \times (0,\infty)$　(10) $\{(x,y) \mid x^3 \le y \le x^2\}$　(11) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

問 88. $F \subset \mathbb{R}^n$ で $f\colon F \to \mathbb{R}$ が連続とする。(1) $\{x \in F \mid f(x) \ge 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合とは限らないことを示せ。(2) F が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとき、$\{x \in F \mid f(x) \ge 0\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ。

集合の閉包[44] を紹介した際に、直観的には A に A の「縁」を付け加えた集合が $\overline{A}$ であると説明した。この節で A が閉集合であるとは、直観的には自分の縁をすべて含む集合だと説明したので、次の命題は自然に感じられるだろう。

命題 8.14 (閉集合である $\Leftrightarrow$ 自分自身の閉包と一致) $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 A に対して

$$A \text{ が閉集合} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} = A.$$

証明の前に簡単な注意をしておく。(i) 一般に $A \subset \overline{A}$ であるから[45]、$\overline{A} = A$ は、$\overline{A} \subset A$ と同値である。(ii) $X \subset Y \Leftrightarrow Y^c \subset X^c$. (iii) $X \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow X \subset Y^c$.

証明　ここは効率優先で計算で証明する。

$$\begin{aligned}
\overline{A} = A \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{A} \subset A \\
&\Leftrightarrow \quad A^c \subset \left(\overline{A}\right)^c \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A^c) x \in \left(\overline{A}\right)^c \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A^c) \neg (x \in \overline{A}) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A^c) \neg ((\forall \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap A \ne \emptyset) \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A^c)(\exists \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap A = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x \in A^c)(\exists \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \subset A^c \\
&\Leftrightarrow \quad A^c \text{ は開集合} \\
&\Leftrightarrow \quad A \text{ は閉集合.} \blacksquare
\end{aligned}$$

[44] $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\overline{A} \overset{\text{def.}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x;\varepsilon) \cap A \ne \emptyset\}$.
[45] $x \in A$ ならば、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $x \in B(x;\varepsilon) \cap A$ であるから、$B(x;\varepsilon) \cap A \ne \emptyset$. ゆえに $x \in \overline{A}$. ゆえに $A \subset \overline{A}$.

閉集合については、この節で解説したことと、次節の命題 9.1 を押さえておけば、微積分への応用については十分であろう。

問 89. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、$\overline{\Omega}$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ。$\overline{\Omega}$ は、Ω を含む ($\mathbb{R}^n$ の) 閉集合のうちで最小のものである。(問 56 を参照せよ。)

8.1 補足: 定理 B, D の使用上の注意と拡張, 相対位相

$f_1\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_2\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$f_1(x) = \log x \quad (x \in (0,\infty)),$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0,\infty))$$

により定義する。これらは連続関数である。

$$A_1 = \{x \in (0,\infty) \mid f_1(x) \le e\}, \quad A_2 = \{x \in [0,\infty) \mid -1 < f_2(x) < 1\}$$

とおくとき、A_1, A_2 は開集合になるか、あるいは閉集合になるか？A_1 は等号つきの不等式、A_2 は等号抜きの不等式で定義されているから、

「A_1 は $\mathbb{R}$ の閉集合で、A_2 は $\mathbb{R}$ の開集合」　(実は間違い)

と早とちりする人がいるかもしれない。実際は

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le 1\}, \quad A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$$

であるので、どちらの集合も、$\mathbb{R}$ の開集合ではなく、かつ $\mathbb{R}$ の閉集合でもない。定理 B, D において、関数 f の定義域が全空間 $\mathbb{R}^n$ である、という条件があったことを思い出そう。今の場合は、その条件が満たされていないので、定理 B, D は (当然) 適用できず、等号つきの不等式で定義されていても $\mathbb{R}$ の閉集合とは限らないし、等号抜きの不等式で定義されていても $\mathbb{R}$ の開集合とは限らない。

これだけだと、定理 B, D の適用範囲には注意すべき限界がある、という話であるが、続きがある。

$\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合 Ω に対して、Ω の開集合、Ω の閉集合というものが定義される。

定義 8.15 (相対開集合, 相対閉集合) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とする。

(1) $U \subset \Omega$ とするとき、U が Ω の開集合であるとは、$\mathbb{R}^n$ のある開集合 V が存在して、$U = \Omega \cap V$ となることをいう。

(2) $F \subset \Omega$ とするとき、F が Ω の閉集合であるとは、$\mathbb{R}^n$ のある閉集合 G が存在して、$F = \Omega \cap G$ となることをいう。

例えば A_1 については、$G = [-1, 1]$ とおくと、これは $\mathbb{R}$ の閉集合で、$A_1 = (0,\infty) \cap G$ が成り立つので、A_1 は $(0,\infty)$ の閉集合である。

一方、A_2 については、$V = (-1, 1)$ とおくと、これは $\mathbb{R}$ の開集合で、$A_2 = [0,\infty) \cap V$ が成り立つので、A_2 は $[0,\infty)$ の開集合である。

実は次の定理が成り立つ。

定理 8.16 (定理 B, D の一つの拡張) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が連続であり、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\}, \quad U_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) < \beta\}, \\
U_3 &= \{x \in \Omega \mid \alpha < f(x) < \beta\}, \quad U_4 = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq \gamma\}
\end{aligned}$$

は Ω の開集合である。また

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}, \quad F_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \beta\}, \\
F_3 &= \{x \in \Omega \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta\}, \quad F_4 = \{x \in \Omega \mid f(x) = \gamma\}
\end{aligned}$$

は Ω の閉集合である。

「$\mathbb{R}^n$ の 2 つの開集合の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の開集合である」,「$\mathbb{R}^n$ の 2 つの閉集合の共通部分は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である」が成り立つので、次の系が得られる。

系 8.17 (定理 B, D のもう一つの拡張) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が連続、$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ とする。

Ω が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{x \in \Omega \mid f(x) > \alpha\}, \quad U_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) < \beta\}, \\
U_3 &= \{x \in \Omega \mid \alpha < f(x) < \beta\}, \qquad U_4 = \{x \in \Omega \mid f(x) \neq \gamma\}
\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

Ω が $\mathbb{R}^n$ の閉集合ならば

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{x \in \Omega \mid f(x) \geq \alpha\}, \quad F_2 = \{x \in \Omega \mid f(x) \leq \beta\}, \\
F_3 &= \{x \in \Omega \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta\}, \quad F_4 = \{x \in \Omega \mid f(x) = \gamma\}
\end{aligned}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

9　コンパクト性と Weierstrass の最大値定理

(Lagrange の未定乗数法の解説を省略するようになったので、この節で Weierstrass の最大値定理の応用例を補う必要がありそう。)

9.1　閉集合の点列による特徴づけ]

閉集合はその補集合が開集合であるような集合として定義したが、次の特徴づけが重要である。(「特徴づけ」という言葉の解説が必要？)

命題 9.1 (閉集合の点列による特徴づけ) $K \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、次の (i) と (ii) は互いに同値である。

(i) K は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(ii) K 内の任意の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して、$\{a_n\}$ が ($\mathbb{R}^n$ で) 収束するならば、その極限は K に属する。

証明

(i) ⇒ (ii) $\{a_n\}$ は K 内の点列で、$\mathbb{R}^n$ 内で a に収束しているとするとき、$a \in K$ を背理法で証明しよう。$a \notin K$ と仮定すると、$a \in K^c$. K は閉集合であるから、K^c は開集合である (閉集合の定義)。ゆえに $(\exists \varepsilon > 0)$ $B(a;\varepsilon) \subset K^c$. ゆえに[46] $B(a;\varepsilon) \cap K = \emptyset$. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \in B(a;\varepsilon)$. ところが $a_n \in K$ であるから、$a_n \notin B(a;\varepsilon)$ となるはずで、矛盾である。ゆえに $a \in K$ である。

(ii) ⇒ (i) K が閉集合でないと仮定する。すると K^c は開集合でないので、$(\exists a \in K^c)$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $B(a;\varepsilon) \not\subset K^c$. ゆえに $B(a;\varepsilon) \cap K \neq \emptyset$. $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ として、$\exists a_n \in B\left(a; \frac{1}{n}\right) \cap K$. こうして作った $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \in K$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすので、仮定から $a \in K$. これは矛盾である。ゆえに K は閉集合である。■

例 9.2 上の命題を用いて、与えられた集合が閉集合であるかどうか、判定してみよう。

(1) $K = [0, 1]$ は閉集合である。実際、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が K 内の数列であり、$a \in \mathbb{R}$ に収束すると仮定すると、K 内の数列であることから、$0 \le a_n \le 1$. $n \to \infty$ として $0 \le a \le 1$. ゆえに $a \in K$.

(2) $K = (0, 1)$ は閉集合ではない。実際 $a_n := 1 - \dfrac{1}{2n}$ により $\{a_n\}$ を定義すると、これは K 内の収束列であるが、極限は 1 で、K に属さない。■

9.2 Weierstrass の最大値定理 (多次元版)

ようやく、この講義の目玉定理を証明できる準備が整った。この定理を見て、その主張が理解できても、どれほど重要であるかはすぐには分からないかもしれない。どのように役立つかは、後でいくつか例をあげる。この講義初回のイントロを思い出してもらえれば、c が点列の極限として得られることに気付いてもらえるだろうか。

定理 9.3 (Weierstrass の最大値定理) K は $\mathbb{R}^n$ の空でない有界な閉集合であり、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f は最大値を持つ。すなわち $(\exists c \in K)(\forall x \in K)$ $f(c) \ge f(x)$.

(最小値についても同様である。)

証明 1 次元の $K = [a, b]$ の場合とほぼ同様にして、$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c, \quad \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \sup\left\{f(x) \mid x \in K\right\}$$

が成り立つ。命題 9.1 より、$c \in K$. ゆえに

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \sup\left\{f(x) \mid x \in K\right\}.$$

これは $f(c)$ が f の K における最大値であることを示す。■

(以下の説明は、1 次元のときと重複しているので削除するか。問にでもしてしまう。)

K の有界性と閉集合性、f の連続性のどれか 1 つ欠けても、最大値が存在しない場合がある。

[46] 一般に $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$. その対偶命題として、$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \not\subset B^c$.

例 9.4 (有界でない場合) $K=\mathbb{R}$ とすると、K は閉集合であるが、有界ではない。

$f(x)=x$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続であるが、非有界であり、当然最大値も持たない。

$f(x)=\tan^{-1}x$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続かつ有界であるが、最大値は持たない。$f(K)$ の上限は $\pi/2$ であるが、$f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす $x\in K$ は存在しない。

もちろん、最大値が存在する場合もある。$f(x)=e^{-x^2}$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続で、最大値 $f(0)=1$ を持つ (しかし最小値は持たない…)。 ■

例 9.5 (閉集合でない場合) $K=(0,1)$ とすると、K は有界であるが、閉集合ではない。

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続であるが、非有界であり、当然最大値も持たない。

$f(x)=x(x-1)x$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続かつ有界であるが、最大値は持たない。$f(K)$ の上限は 0 であるが、$f(x)=0$ を満たす $x\in K$ は存在しない。

もちろん、最大値が存在する場合もある。$f(x)=x(1-x)$ で定まる $f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続で、最大値 $f(1/2)=1/4$ を持つ (しかし最小値は持たない…)。 ■

例 9.6 (連続でない場合) $K=[0,1]$ とすると、K は有界かつ閉集合である。$f\colon K\to\mathbb{R}$ を

$$f(x):=\begin{cases} x(1-x) & (x\neq 1/2)\\ 0 & (x=1/2)\end{cases}$$

で定めると、f は連続ではなく、最大値も持たない。上限は 1/4 であるが、$f(x)=1/4$ を満たす $x\in K$ は存在しない。 ■

もちろん最大値を持つ連続関数はつねに存在する (定数関数を考えよ)。

9.3 コンパクト集合の特徴づけ

(お酒を飲んでいたら、「解析学の奥義を一つ伝授してやる」とか言いそうだ。)

$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合は非常に「良い」性質を持っている。それは “コンパクト (compact)“ という概念に一般化されている。

定理 9.7 (コンパクト集合の特徴づけ) $\mathbb{R}^N$ の部分集合 K に関する次の 3 条件は互いに同値である。

(i) K は有界かつ閉集合である。

(ii) K の要素からなる任意の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束部分列を持ち、その極限は K に属する。(このことを K は**点列コンパクト**であると言う。)

(iii) K は **Heine-Borel の条件**「K の任意の開被覆は有限部分被覆を持つ」を満たす。すなわち、集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の各要素 U_λ が $\mathbb{R}^N$ の開集合で $K\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ が成り立っているならば、$(\exists r\in\mathbb{N})$ $(\exists\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\Lambda)$ $K\subset\bigcup_{j=1}^{r}U_{\lambda_j}$ が成り立つ。

一般に、Heine-Borel の条件を満たす位相空間を**コンパクト** (compact) であるという。この講義ではこれ以上立ち入らないが、重要な概念であり、講義科目「トポロジー」では説明されるはずである。

証明　ここでは (i) ⇔ (ii) のみを証明する (だとすると、タイトルは「$\mathbb{R}^N$ の有界閉集合の点列コンパクト性」くらいが適当か)。(i) ⇔ (iii) の証明は、多くの本に載っているが、例えば桂田 [16] (積分の解説をしてある) の付録 C でも読める。

(i)⇒(ii) K は $\mathbb{R}^N$ の有界な閉集合であると仮定する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を K 内の任意の点列とすると、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。ゆえに Bolzano-Weierstrass の定理から、収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。その極限を $a(\in\mathbb{R}^N)$ とすると、K は閉集合と仮定したから、命題 9.1 により、$a\in K$.

(ii)⇒(i) K は条件 (ii) を満たすと仮定する。

(K が有界であること) 背理法を用いる。K が有界でないと仮定すると、各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$(\exists a_n\in K)\ |a_n|>n$. こうして作った点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、いかなる収束部分列も含み得ない (収束部分列が存在するならば、それは有界だが、$|a_{n_k}|>n_k\geq k$ であるから、矛盾が導ける[47])。ゆえに K は有界である。

(K が閉集合であること) K 内の点列 $\{a_n\}$ が収束すれば、その極限 a は必ず K に含まれることを示せば、命題 9.1 により、K が閉集合である。仮定から、部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a'\in K$ が存在して、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a'$. ところで、一般に収束列の部分列は同じ極限を持つ収束列であるから、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$. 極限の一意性から $a=a'$. ゆえに $a\in K$. ■

次の問題中の命題は、定理 9.3 の一般化と言えるだろう。

問 90. K は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合で、$f\colon K\to\mathbb{R}^m$ は連続関数とするとき、$f(K)$ は $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合であることを示せ。
(ヒント: $f(K)$ の点列コンパクト性を示せば良い。)

問 91. 定理 9.7 あるいは前問を用いて、Weierstrass の最大値定理を証明せよ。
(この文書では[48]、定理 9.7 の証明に、Weierstrass の最大値定理を用いていないので、循環論法にはならない。)

次の問題は、このように出題すると、気がついた人には当たり前すぎるだろうけれど、いきなりこの命題を示されると「曲線が有界閉集合であることは、直観的に正しそうに感じられるけれど、証明は見当もつかない」という人が多そうである[49]。

問 92. (曲線の像は有界閉集合) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とする。$\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$ が連続なとき、$\varphi([a,b])$ は $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合であることを示せ。

次の問題は、「有界」と「閉集合」が二つ組合わさることで、はじめて強い条件になることを教えてくれる (解答しなくても問題文を読んでみることを強くお勧めする)。

---

[47] 念のため: $\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$ とすると、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}|a_{n_k}|=|a|$. 一方、$|a_{n_k}|\geq k$ であることから、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}|a_{n_k}|=\infty$ となり、矛盾が生じる。

[48] 定理をどういう順番に証明するかは色々な選択肢がある。Weierstrass の最大値定理は分かりやすいので、この文書ではなるべく早く証明できるようにしてみた。Weierstrass の最大値定理の証明を急がない方が、全体として無駄のないすっきりした議論が出来るような気もするが、初学者には、「何のためにこんなことを証明しているのか」という疑念が生じそうなので、この講義では「とにかく Weierstrass の最大値定理」という話の進め方をしている。

[49] 筆者が学生時代に、よそのクラスの過去問で見かけたのだけれど、学生の出来はどうだったのか気になる。

問 93. (1) K が $\mathbb{R}^n$ の閉集合、$f\colon K\to\mathbb{R}^m$ が連続であっても、$f(K)$ が $\mathbb{R}^m$ の閉集合とは限らないことを示せ (反例をあげよ)。
(2) K が $\mathbb{R}^n$ の有界集合、$f\colon K\to\mathbb{R}^m$ が連続であっても、$f(K)$ が $\mathbb{R}^m$ の有界集合とは限らないことを示せ (反例をあげよ)。

余談 9.8 昔話。コンパクト集合の特徴づけ (命題 9.7) は、自分が学生の時の授業で強烈な印象を与えられた。一体なんだこれは ?! 、というわけである。それを理解するために、自分なりに色々な本を読んで勉強した。一般の距離空間バージョンもあり、それは次の 3 条件が同値である、という定理である。

(a) K は全有界かつ完備

(b) K は点列コンパクト

(c) K はコンパクト

今から振り返ると、かなり下手なやり方で勉強した気がするが、定理そのものは頭に深く刻まれた。大学院の入試問題で次の問題に出くわしたが、何とか解くことが出来たのは、そのおかげのような気がする。

> 距離空間 X 上の任意の実数値関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ が最大値を持つならば、X はコンパクトであることを示せ。

この命題は、よくある定理「コンパクト空間上の実数値連続関数は必ず最大値を持つ。」(定理 9.3 の親類) のある種の逆のようなもので、ちょっと面白い。 ■

9.4 Weierstrass の最大値定理を使いこなす

例 9.9 $K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、次の (1), (2) に答えよ。

(1) f の K における最大値、最小値が存在することを示せ。

(2) f の K における最大値、最小値を求めよ。

(解答)

(1) $g(x,y,z):=\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}$ $((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$ は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^3$ で連続である。

$$K=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$$

であるから、K は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

また K は有界である。実際、$R=3$ とおくと、任意の $(x,y,z)\in K$ に対して,

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}\le\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

であるから、$x^2+y^2+z^2\le 9$. ゆえに

$$|(x,y,z)|\le 3=R$$

が成り立つ。

f も多項式関数であるから、$\mathbb{R}^3$ で連続である。特に f は K でも連続であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K における最大値と最小値が存在する。

(2) Lagrange の未定乗数法を思い出そう。

> **定理 9.10 (Lagrange の未定乗数法)** Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ はともに C^1 級の関数とする。
>
> $$N_g := \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$$
>
> とおいたとき、
>
> $$\nabla g(x) \neq 0 \quad (x \in N_g)$$
>
> が成り立ち、f は N_g において $a \in N_g$ で極大であるとする:
>
> $$(\exists \varepsilon > 0) \quad f(a) = \sup_{x \in N_g \cap B(a;\varepsilon)} f(x).$$
>
> このとき、
>
> $$(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$
>
> が成り立つ。

$\Omega = \mathbb{R}^n$, $K = N_g$ とおく。$\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in N_g$ のとき、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるから、

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1} \\ \frac{2y}{4} \\ \frac{2z}{9} \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}.$$

f の K における最大値と最小値は、それぞれ N_g 上の f の極大値と極小値であるから、Lagrange の未定乗数法で得られる。

ゆえに K における最大値、最小値を取る点は、方程式

$$g(\boldsymbol{x}) = 0, \nabla f(\boldsymbol{x}) = \lambda g(\boldsymbol{x})$$

の解である。これを成分で表すと

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \\ \frac{2}{9}z \end{pmatrix}.$$

後者から得た $x = \dfrac{1}{2\lambda}$, $y = \dfrac{2}{\lambda}$, $z = \dfrac{9}{2\lambda}$ を前者に代入して、

$$1 = \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{14}{4\lambda^2}.$$

これから $\lambda = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$. このとき (複号同順で)

$$(x, y, z) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}\right) = \pm\sqrt{14}.$$

ゆえに最大値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{9}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14}$. 最小値は $f\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{9}{\sqrt{14}}\right) = -\sqrt{14}$. ■

期末試験の過去問からも類題をいくつか。

問 94. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y,z,w) = x^2y^2z^2w^2$ $((x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4)$ で定め、

$$S = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\right\}$$

とおくとき、Weierstrass の最大値定理を用いて、f の S における最大値が存在することを示せ (省略せず、ていねいに答えること)。

問 95. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = x^2 - x + 2y^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2$$

で定め、$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \le 1\}$ とおくとき、以下の問に答えよ。

(1) f と g は連続関数であることを示せ。

(2) K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であることを示せ。

(3) f の K 上での最大値と最小値を求めよ。

問 96. xy 平面上で, $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ を頂点とする三角形 (内部と周を含む) を K とし、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) K は有界であることを示せ。

(2) K が $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを証明せよ。
(ヒント: K を不等式を用いて表現すると学んだ定理が使える。)

(3) f の K 上の最大値と最小値を求めよ。それらが最大値、最小値である根拠も述べよ。
(ヒント: 計算は K の内部と境界 ('周') で分けて行なう。)

有名な代数学の基本定理は、複素関数論の Liouville の定理を用いる証明が有名だが、Weierstrass の最大値定理を使っても証明できる。

問 97. 代数学の基本定理「$f(z)$ を次数が 1 以上の複素係数多項式とするとき、$f(c) = 0$ を満たす c が存在する」を証明せよ。
(ヒント: $|f(z)|$ の最小値が存在するが、それが 0 でないと仮定すると矛盾することを示す。$z = c$ で最小となるとして、$z = c$ における Taylor 展開を考える。)

9.5 一様連続性

定義 9.11 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。f が Ω で**一様連続** (uniformly continuous) であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_0 \in \Omega)(\forall x_1 \in \Omega : |x_1 - x_0| < \delta) \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

f が Ω で連続であるとは、

$$(\forall x_0 \in K)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1 \in K : |x_1 - x_0| < \delta) \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ということであるから、一様連続性は連続性よりも強い条件である。後者は δ が ε と a によって決まるが、前者は δ が ε のみによって決まる。

例 9.12 (C^1 級の関数で考えてみる) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $(x\in\mathbb{R})$, $K:=[a,b]$ とする。

$$M:=\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|=\max_{x\in[a,b]}|2x|=2\max\{|a|,|b|\}$$

とおくと、$x_0,x_1\in[a,b]$ に対して

$$|f(x_1)-f(x_0)|\le\sup_{\theta\in(0,1)}|f'(x_0+\theta(x_1-x_0))|\,|x_1-x_0|\le M\,|x_1-x_0|$$

が成り立つ。ゆえに任意の正の数 ε に対して、$\delta:=\frac{\varepsilon}{M+1}$ とおくと、

$$(\forall x_0,x_1\in[a,b]:|x_1-x_0|<\delta)\quad |f(x_1)-f(x_0)|<M\delta\le\varepsilon$$

が成り立つ。ゆえに f は $K=[a,b]$ で一様連続である。

しかし f は $\mathbb{R}$ で一様連続ではない。$\max_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|$ が存在しないので、上の議論が成立しないことに注意しよう。■

問 98. 例 9.12 の f は $\mathbb{R}$ で一様連続でないことを示せ。

定理 9.13 K は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合、$f\colon K\to\mathbb{R}^m$ は連続とするとき、f は K で一様連続である。

証明 背理法を用いる。f が K で一様連続でないと仮定すると、ある正の数 ε が存在して

$$(\forall\delta>0)(\exists x\in K)(\exists y\in K:|x-y|<\delta)\quad |f(x)-f(y)|\ge\varepsilon \tag{8}$$

が成り立つ。$n=1,2,3,\dots$ に対して，$\delta:=\frac{1}{n}$ とすると

$$x_n\in K,\quad y_n\in K,\quad |x_n-y_n|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon$$

を満たす x_n, y_n 取れる。こうして点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を作ったとき、K の点列コンパクト性により、$\{x_n\}$ の収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。すなわち

$$(\exists a\in K)\quad \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

このとき

$$|y_{n_k}-a|=|(y_{n_k}-x_{n_k})-(a-x_{n_k})|\le|y_{n_k}-x_{n_k}|+|(a-x_{n_k}|\le\frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-a|\to 0\quad(k\to\infty).$$

f は a で連続であるから、

$$f(x_{n_k})\to f(a),\quad f(y_{n_k})\to f(a).$$

ゆえに

$$|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\ge\varepsilon$$

で $k\to\infty$ として

$$0=|f(a)-f(a)|\ge\varepsilon(>0).$$

これは矛盾である。ゆえに f は K で一様連続である。■

例 9.14 $K=(0,1]$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$ とするとき、$f\colon K\to\mathbb{R}$ は一様連続ではない。任意の $\delta>0$ に対して,

$$\delta':=\min\left\{\delta,\frac{1}{2}\right\},\quad x=\frac{\delta'}{2},\quad a=\frac{\delta'}{4}$$

とおくと、

$$|x-a|=\frac{\delta}{4}<\delta,\quad |f(x)-f(a)|=\left|\frac{2}{\delta'}-\frac{4}{\delta'}\right|=\frac{2}{\delta'}\ge 1.$$

これは $\varepsilon=1$ として (8) が成立していることを意味する。ゆえに f は一様連続ではない。■

10　積分

10.1　はじめに

積分の計算の話は 1 年次の微積分で学んだはずであるが、理論も重要である。

色々な話があるが、ここでは Riemann 積分の基礎を説明する。具体的には、積分の定義と、「$[a,b]$ 上の連続関数 f は積分可能である」ことの証明と、多次元への一般化である。

それ以外に重要なことに、広義積分、Lebesgue 積分があるが、前者については「信号処理とフーリエ変換」、後者については「応用測度論」で説明を聴くことが出来る。

高校数学では、次のように定積分を定義した。関数 f の原始関数 F ($F' = f$ を満たす関数 F) をとり、

$$\int_a^b f(x)\,dx := [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

とおき、これを f の $[a,b]$ における積分と呼ぶ。

以上の定義で、十分豊富な議論が出来たが、「原始関数はいつでも存在するのか、何か条件が必要か」、「原始関数が存在するとして、どうやって見つけるか」という問にどう答えたら良いだろう。

高校数学では、ほとんどの場合、原始関数がすぐ分かる場合だけを扱った (事前に色々な関数の導関数を調べておいて、その知識を逆引きして用いた)。

実際には、原始関数が分からないことは多い。次の各積分は、被積分関数の原始関数が初等関数で求まらない。

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx \quad (\alpha,\,\beta > 1,\ \text{非整数の場合も考える}),$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

(ここでは詳しいことは説明しないが、どれも名前がついている重要な積分である。)

そこで、原始関数を使わないで積分を定義することになる。アイディアは簡単で、座標軸とグラフで挟まれた領域の面積として定義する。高校数学では、積分を原始関数を用いて定義して、後から、それが面積を表すことを導くわけだが、それとは逆に面積を用いて定義して、後からそれと原始関数を結びつけるのである。

(歴史的には、積分は面積を用いて定義されたと言える。つまり、高校数学流は由緒正しいものではないことになる。)

元々、面積・体積については、非常に古くから研究されていて、すでに古代ギリシャ (紀元前！) のエウドクソス (BC 408〜BC 355, 現トルコのクニドス (Cnidus) に生まれ、クニドスにて没する)、アルキメデス (シュラクサイの Archimedes, BC 287 頃–BC 212, 現イタリアの Syracuse に生まれ、Syracuse にて没する) の段階で、高度な議論がなされていた。

ニュートン、ライプニッツの時代に、「微分積分学の基本定理」と呼ばれる事実が発見された。それは言葉で言うと、微分と積分が互いの逆演算であることを意味する。

(1) (積分してから微分)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

(2) (微分してから積分)

$$\int_a^b F'(x)\,dx = [F(x)]_a^b.$$

高校数学はこの (2) の事実を利用して、原始関数で積分を定義した、ということになる。

10.2 Riemann 積分の定義 (1 次元の場合)

$[a,b]$ を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とする。

$\Delta = \{x_j\}_{j=0}^n$ が区間 $[a,b]$ の**分割**であるとは、

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

が成り立つことをいう。x_j のことを分割 Δ の分点、$[x_{j-1}, x_j]$ のことを分割 Δ の小区間、

$$|\Delta| := \max_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1})$$

のことを分割 Δ の**幅**という。

有限数列 $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ が

$$(\forall j \in \{1,2,\cdots,n\})\quad \xi_j \in \left[x_[j-1], x_j\right]$$

を満たすとき、ξ は分割 Δ に合う**標本点**と呼ぶことにする (これはこの文書だけの約束である)。

関数 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ と、区間 $[a,b]$ の分割 $\Delta = \{x_j\}_{j=0}^n$, Δ に合う標本点 $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n$ があるとき、

$$S(\Delta,\xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\,(x_j - x_{j-1})$$

を f の Δ, ξ に関する Riemann 和と呼ぶ。

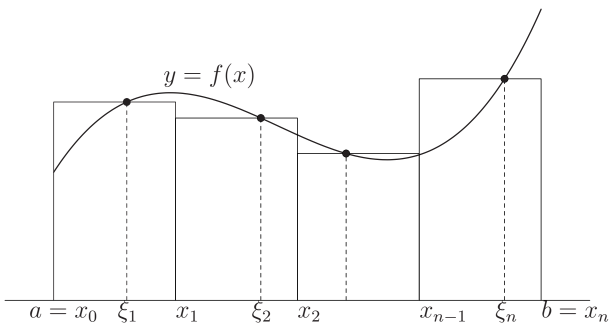


図 4: 長方形の面積の和が Riemann 和 $S(\Delta,\xi)$ である

定義 10.1 (Riemann 積分) $[a,b]$ が $\mathbb{R}$ の有界閉区間、$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ とするとき、f が $[a,b]$ で Riemann 積分可能とは、

$$(\exists S \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \Delta = \{x_j\}_{j=0}^n : [a,b] \text{ の分割、} |\Delta| < \delta)$$
$$(\forall \xi = \{\xi_j\}_{j=1}^n : \Delta \text{ に合う標本点})\quad |S(\Delta,\xi) - S| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義する。このとき S を f の $[a,b]$ 上の積分と呼び、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す。

上の条件を

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta,\xi)=S$$

と書くことがあるが、この意味は、あくまで定義 10.1 で定義されたものであり、以前から知っていた lim とは異なる。

(何となく、これまで学んだ極限と似ているが、数列の極限とも、関数の極限とも違っている。)

注意 10.2 (区分求積法) 高校数学で、$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ が連続のとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\frac{b-a}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(a+j\frac{b-a}{N}\right) \tag{9}$$

という公式を証明抜きで学んだ ($\displaystyle\sum_{j=1}^{N}$ は $\displaystyle\sum_{j=0}^{N-1}$ とすることもある)。

これは、ある特別な Riemann 和の極限の形をしていることが分かる。f が $[a,b]$ で積分可能であれば (定義によって) (9) が成り立つことが分かる。後で f が $[a,b]$ で連続ならば、$[a,b]$ で積分可能という定理を証明すると、上の公式も同時に証明されることになる。 ■

10.3 閉区間上の連続関数の積分可能性

定理 10.3 (閉区間上の連続関数の積分可能性) $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の有界な閉区間、$f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f は $[a,b]$ で積分可能である。

証明 証明は 3 つのステップからなる。

1. 任意の正の数 ε に対して、十分小さな正数 δ をとると、$[a,b]$ の任意の分割 $\Delta=\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $\Delta'=\{x'_i\}_{i=0}^{n'}$, Δ に合う標本点 $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$, Δ' に合う標本点 $\xi'=\{\xi'_i\}_{i=1}^{n'}$ に対して、

$$|\Delta|<\delta,\ |\Delta'|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |S(\Delta,\xi)-S(\Delta',\xi')|<\varepsilon/2 \tag{10}$$

が成り立つことを示そう。

ε を任意の正の数とする。連続関数 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ は一様連続であるから、正の数 δ を

$$x,y\in[a,b],\quad |x-y|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

となるように取れる。

$|\Delta|$, $|\Delta'|<\delta$ としよう。Δ と Δ' の分点をあわせて作った分割[50]を $\widetilde{\Delta}=\{\widetilde{x}_i\}_{i=0}^{\widetilde{n}}$, また $\widetilde{\xi}=\{\widetilde{\xi}_i\}_{\widetilde{n}}$ を適当に (例えば $\widetilde{\xi}_i=(\widetilde{x}_{i-1}+\widetilde{x}_i)/2$) と定めるとき、

$$\left|S(\Delta,\xi)-S(\widetilde{\Delta},\widetilde{\xi})\right|<\varepsilon/4,\quad \left|S(\Delta',\xi')-S(\widetilde{\Delta},\widetilde{\xi})\right|<\varepsilon/4$$

を示せばよい。

[50] これを Δ と Δ' の共通の細分という。例えば $[a,b]=[0,1]$, $\Delta=\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\}$, $\Delta'=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ のとき、$\widetilde{\Delta}=\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\}$.

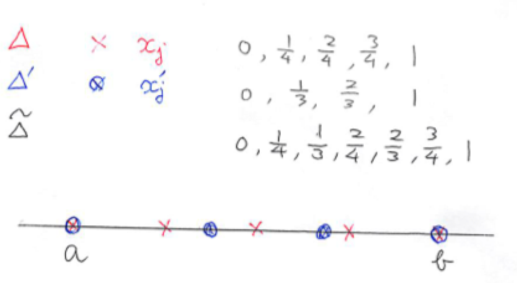


図 5: 2 つの分割の分点を合わせて共通の細分を作る

どちらでも同様に証明できるので、前者のみを示す。Δ の一つの区間 $[x_{i-1}, x_i]$ は、$\widetilde{\Delta}$ では ℓ 個の区間 $[\widetilde{x}_{k+j-1}, \widetilde{x}_{k+j}]$ $(j = 1, 2, \cdots, \ell)$ に分割される ($\ell = 1$ もありうる)。$\sum_{j=1}^{\ell}(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) = x_i - x_{i-1}$ に注意すると

$$\begin{aligned}
&\left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\widetilde{\xi}_{k+j})(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| \\
&= \left| f(\xi_i) \sum_{j=1}^{\ell}(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\widetilde{\xi}_{k+j})(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{\ell} \left(f(\xi_i) - f(\widetilde{\xi}_{k+j}) \right) (\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\ell} \left| f(\xi_i) - f(\widetilde{\xi}_{k+j}) \right| (\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1})
\end{aligned}$$

であるが、ξ_i も $\widetilde{\xi}_{k+j}$ も $[x_{i-1}, x_i]$ に含まれるので $\left|\xi_i - \widetilde{\xi}_{k+j}\right| < \delta$ であり、$\left| f(\xi_i) - f(\widetilde{\xi}_{k+j}) \right| < \varepsilon/(4(b-a))$ が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}
\left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{j=1}^{\ell} f(\widetilde{\xi}_{k+j})(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \right| &< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{j=1}^{\ell}(\widetilde{x}_{k+j} - \widetilde{x}_{k+j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

これを $i = 1, \cdots, n$ について加えると

$$|S(\Delta, \xi) - S(\widetilde{\Delta}, \widetilde{\xi})| < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{4}.$$

(**1** の証明終了)

2. 自然数 n に対して $\Delta^{(n)} = \left\{x_j^{(n)}\right\}_{j=0}^{n}$ を区間の n 等分分割とし、$\xi^{(n)} = a + \{\xi^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ を各小区間の中点を取ったものと定義する。つまり、$x_j^{(n)} = \dfrac{j(b-a)}{n}$, $\xi_j^{(n)} = \dfrac{x_{j-1}^{(n)} + x_j^{(n)}}{2}$.

任意に与えられた正の数 ε に対して、δ を (10) を満たすようにとる。すると $n, m > (b-a)/\delta$ なる任意の n, m に対して $\left|\Delta^{(n)}\right|$, $\left|\Delta^{(m)}\right| < \delta$ となるので、

$$\left| S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}) - S(\Delta^{(m)}, \xi^{(m)}) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

が成り立つ。$\{S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Cauchy 列になるので、収束する。すなわち、ある $S \in \mathbb{R}$ が存在して

$$S = \lim_{n \to \infty} S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

3. 任意に与えられた正の数 ε に対して、$\delta > 0$ を (10) を満たすようにとる。
2 より、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \left|S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}) - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\dfrac{b-a}{n} < \delta$ と $n \geq N$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ を取る。このとき $\left|\Delta^{(n)}\right| < \delta$ が成り立つ。
$I = [a, b]$ の任意の分割 Δ と、Δ に合う標本点 ξ に対して、$|\Delta| < \delta$ が成り立つならば、

$$|S(\Delta, \xi) - S| \leq \left|S(\Delta, \xi) - S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)})\right| + \left|S(\Delta^{(n)}, \xi^{(n)}) - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これは

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \xi) = S$$

を示している。■

注意 10.4 (上の証明は実はあまり標準的ではない) 積分の議論をするためには、上限和、下限和、上積分、下積分など、種々の道具 (ここではその定義は省略) を準備してからとりかかるのが普通である。そうした方が、結局はトータルの時間を短くすることが出来、後で使える武器 (道具) も増えて、議論が "経済的" になる、と言える。しかし、それをここでやると却って長い時間を費やしてしまうので、上の証明は、定義からなるべく早く結論に到達出来るように工夫したものである。短いけれども (それでも 1 コマの授業で消化するにはギリギリの分量である)、無理のない自然な証明になっていると考えている。結果的に f の値 (実数) の順序関係を用いなかったので、f が Banach 空間に値を持つ関数である場合にも通用する証明になっている。■

10.4 積分の性質

Riemann 和の極限であるから、$\sum$ の持つ性質が自然に拡張される。

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

$$(\forall x \in [a, b]) \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

(この点を上ではっきりさせなかったが) f が $[a, b]$ で積分可能であるためには、f は $[a, b]$ で有界であることが必要であり、$\displaystyle\sup_{x \in [a,b]} |f(x)| < \infty$.

これから次が分かる:

$$\lim_{x \to a+0} \int_a^x f(t)\, dt = 0$$

ここまでは、$a < b$ の場合のみ考えたが、以下では、$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ を $a = b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\, dx := 0,$$

$a > b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

で定義する。

定理 10.5 (微分積分学の基本定理) (1) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば、$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ $(x \in [a,b])$ は C^1 級であり、

$$F'(x) = f(x).$$

ゆえに任意の連続な関数 f に対して、f の原始関数が存在する。

(2) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば、f の任意の原始関数を G とするとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b.$$

あるいは、C^1 級の関数 $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_a^b G'(x)\,dx = [G(x)]_a^b.$$

証明

(1) $x \in [a,b)$, $h > 0$, $x+h \in [a,b]$ を満たす x, h に対して、

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) - f(x)\cdot\frac{1}{h}\int_x^{x+h} dt \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))\,dt\right| \le \frac{1}{h}\max_{t\in[x,x+h]}|f(t)-f(x)|\int_x^{x+h} dt \\ &= \max_{t\in[x,x+h]}|f(t)-f(x)| \to 0 \quad (h \to +0).\end{aligned}$$

$x \in (a,b]$, $h < 0$, $x+h \in [a,b]$ を満たす x, h に対して、

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{-h}\int_{x+h}^x (f(t)-f(x))\,dt$$

となるので、

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \le \max_{t\in[x-h,x]}|f(t)-f(x)| \to 0 \quad (h \to -0).$$

以上まとめて $F'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$. F は $[a,b]$ 上いたるところ微分できて、導関数は f に等しく、これは連続であるから、F は C^1 級である。

(2) $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ であるから、$(F(x)-G(x))' = 0$ $(x \in [a,b])$. これから、$(\exists C \in \mathbb{R})$ $(\forall x \in [a,b])$ $F(x) - G(x) = C$. このとき、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left.\int_a^x f(t)\,dt\right|_{x=b} = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) - G(a). \blacksquare$$

この定理の系として、部分積分の公式があるが、ここまで来ると、高校数学流と合流出来ていて、違いがないので、以下は省略する。

10.5　多次元への拡張

(工事中 — 自筆ノートの電子化をしないと。そもそも詳しいノートが残っていない。作図するのが面倒だなー。)

この項は詳しい説明は省略せざるを得ず、いわゆる「お話」で済ませるしかない。(詳しい説明が読みたい場合は、桂田 [16] の 1.3 節「積分可能性と Joran 可測性、零集合」を見よ。)

多次元空間 $\mathbb{R}^n$ における区間とは、次のように 1 次元区間の直積として表される集合のことをいう。

$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in[a_1,b_1],\ x_2\in[a_2,b_2],\cdots,x_n\in[a_n,b_n]\}.$$

面積、体積を一般化した n 次元**測度**という概念が必要になるが、I の測度 $\mu_n(I)$ は

$$\mu_n(I)=(b_1-a_1)(b_2-a_n)\cdots(b_n-a_n)$$

によって定義する。$\mu_n(I)$ は、$n=2$ であれば I の面積 (横×高さだから)、$n=3$ であれば I の体積 (幅×奥行×高さだから) であるので、$\mu_n(I)$ は確かに面積、体積の n 次元空間への自然な一般化であると分かる。

さて、それで $\mathbb{R}^n$ の区間 I で定義された関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ に対して、f の I 上の積分

$$\int_I f(x)dx=\int\cdots\int_I f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

が 1 次元と同様に、Riemann 和

$$\sum_{j=1}^m f(\xi_j)\mu_n(I_j)$$

の極限として定義される (詳しい説明は省略する)。そして、f が I 上連続である場合、f が I で積分可能である (極限 $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ が存在する) ことも、§10.3 (1 次元の場合) と同様に証明できる。

(めでたし、めでたし ???)

しかし、それだけでは不十分である...

Ω が区間でない集合の場合にも積分したくなる。どうするか？解決のアイディアは単純で、関数の定義域を水増しして区間にしてしまえば良い。$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は有界ではあるとして、$\Omega\subset I$ となる $\mathbb{R}^n$ の区間 I を取り (有界であればこれは可能である)、

$$\widetilde{f}(x):=\begin{cases}f(x) & (x\in\Omega)\\ 0 & (x\in I\setminus\Omega)\end{cases}\tag{12}$$

で f の I への拡張 $\widetilde{f}$ を定め (もともと f が定義されていた Ω の外では 0 とするので、$\widetilde{f}$ は f の 0 拡張と呼ばれる)、積分を

$$\int_\Omega f(x)\,dx:=\int_I\widetilde{f}(x)\,dx$$

によって定義する。

1 つ問題がある。f が連続関数であっても、$\widetilde{f}$ は連続関数とは限らない。多くの場合、$\widetilde{f}$ のグラフは Ω の境界のところで絶壁になる。不連続な関数の積分に取り組む必要がある。

幸い、この問題には奇跡的なくらい明快な解答がある。

定理 10.6 (Lebesgue (1902 年)) I は $\mathbb{R}^n$ の区間、$\widetilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ は有界とするとき、$\widetilde{f}$ が I で積分可能 ($\displaystyle\int_I \widetilde{f}(x)\,dx$ が存在) するためには、$\widetilde{f}$ の不連続点の全体

$$\left\{x \in I \;\middle|\; \widetilde{f} \text{ は } x \text{ で不連続}\right\}$$

が零集合であることが必要十分である。

零集合というのは、直観的には面積 (これは $n=2$ の場合で、$n=3$ の場合は体積, $n=1$ の場合は長さ) が 0 である集合、ということである。正確には次のように定義される。

定義 10.7 (零集合) $N \subset \mathbb{R}^n$ とする。N が**零集合** (a null set) であるとは、任意の正の数 ε に対して、次の条件を満たす集合族 $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在することをいう。

(i) 各 B_j は区間または空集合である。

(ii) $N \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$.

(iii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) < \varepsilon$.

例 10.8 (零集合) 簡単のため、2 次元の場合で考える。

(1) 1 点からなる集合 $\{\boldsymbol{a}\}$. B_1 は一辺が 2δ の正方形 $[a_1-\delta, a_1+\delta]\times[a_2-\delta, a_2+\delta]$, B_j $(j \ge 2)$ は空集合とすると、(i), (ii) が満たされ、$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) = \mu_n(B_1) = 4\delta^2$. ゆえに任意の正の数 ε に対して $\delta := \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$ とすれば、$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) = \frac{4\varepsilon}{9} < \varepsilon$ であるから、(iii) も満たす。

(2) 有限個の点からなる集合 $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j=1}^{\ell}$. 正の数 ε に対して、B_j $(j = 1, \dots, \ell)$ を $\{\boldsymbol{a_j}\} \subset B_j$, $\mu_n(B_j) < \frac{\varepsilon}{\ell}$ が成り立つように取れるので、$B_j = \emptyset$ $(j \ge \ell+1)$ とすれば良い。

(3) 可算無限個の点からなる集合 $\{\boldsymbol{a}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. 正の数 ε に対して、B_j $(j = 1, \dots)$ を $\{\boldsymbol{a_j}\} \subset B_j$, $\mu_n(B_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ が成り立つように取れば、

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n(B_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

(4) 線分。(準備中)

(5) 有界閉集合上の連続関数のグラフ。証明には、一様連続性を用いる。(準備中) ■

(工事中⋯)

10.6 この後の展望

(工事中)

10.6.1 変数変換の公式

10.6.2 広義積分

Riemann 積分は、直接には、有界な関数の、有界な集合上の積分しか扱えない。関数 f が非有界、あるいは集合 Ω が非有界な場合の積分 $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx$ は**広義積分**と呼ばれる。

広義積分に対して、それを有界な関数の有界な集合上の積分の極限として捉えようとするのがよく使われる手法である。

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

多次元の場合、広義積分可能性の定義は複数あり、そのうちのいくつかは互いに同値ではないようである。

10.6.3 Lebesgue 積分

(準備中)

11 逆関数定理

2016 年度からは、この節の内容は解説しないようになったが、講義ノートには残しておくことにする。

11.1 微積分の復習

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega\to\mathbb{R}^m$ とする。

$x\in\mathbb{R}^n$ とするとき $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ と表すことにする。

$$f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_n) \\ f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}.$$

すべての f_i $(1\le i\le m)$ が、各変数 x_j $(1\le j\le n)$ について偏微分可能であるとき、f は 1 回偏微分可能という。そのとき、f の 1 階偏導関数を並べて作った行列

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

を f のヤコビ行列と呼ぶ。その行列式 $\det f'$ を f のヤコビアンと呼ぶ。

すべての $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ が連続関数であるとき、f は C^1 級であるという。このとき

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{|h|}=0$$

が成り立つ。(これは 1 変数の微分の定義 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を移項して整理したような式だが、h や f がベクトルでも意味を持つようになっている。)

大雑把に言うと

$$f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h.$$

(右辺は $f'(a)h$ は行列とベクトルの積になっている。)

f が実数値関数であるとき、つまり $m=1$ であるとき、

$$f'(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

は n 次元横ベクトルである。これを転置して n 次元縦ベクトルにしたものを $\nabla f(x)$ や $\operatorname{grad} f(x)$ で表す。

$$\nabla f(x)=\operatorname{grad} f(x)=f'(x)^T=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}.$$

11.2 イントロ — 逆関数定理と陰関数定理は関数の存在定理である

数学解析のラスト・パートでは、兄弟の関係にある「逆関数定理」と「陰関数定理」を駆け足で説明する。この二つの定理は色々な理論の要(かなめ)となる定理で、非常に重要である。どちらも

「指定された点の近くで (局所的に) 関数 (それぞれ逆関数、陰関数) が存在する」

という、関数についての**存在定理**である。証明においては、y が与えられたときに $f(x)=y$ を x について解く、x が与えられたときに $F(x,y)=0$ を y について解く、と方程式の解を求めるところが関門である。

11.3 逆写像についての復習

逆写像については、

「写像 f が逆写像 f^{-1} を持つためには、f が全単射であることが必要十分である」

というのが基本中の基本であった。

与えられた関数 f そのものが全単射でなくても、その定義域と終域を狭い範囲に適当に制限して出来た関数が全単射になり、その逆写像 (逆関数) が便利である、というのが良くある話である。

例 11.1 (高校数学からの例) $f\colon\mathbb{R}\ni x\mapsto x^2\in\mathbb{R}$ は全射でも単射でもないが、その制限

$$\widetilde{f}\colon[0,\infty)\ni x\mapsto x^2\in[0,\infty)$$

は全単射であり、その逆関数 $\widetilde{f}^{-1}$ は、いわゆるルート $\sqrt{\quad}$ である。

$$\widetilde{f}^{-1}(y)=\sqrt{y}\quad(y\in[0,\infty)).$$

似たようなことは、exp と log, 各種逆三角関数であった。■

1 変数関数に対する逆関数の定理は簡単であるので、概略を述べてみよう。

例 11.2 (1 変数の逆関数の定理) I が $\mathbb{R}$ の開区間、$f\colon I \to \mathbb{R}$ は C^1 級、$a \in I$, $f'(a) \neq 0$ ならば、

$$(\exists U \subset I : a \text{ を含む開区間})\ (\exists V : b := f(a) \text{ を含む開区間})$$
$$\widetilde{f} = f|_U \colon U \ni x \longmapsto f(x) \in V \quad \text{は全単射で逆関数も } C^1 \text{ 級}$$

が成り立つ。実際 $f'(a) \neq 0$ であるから、$f'(a) > 0$ or $f'(a) < 0$. $f'(a) > 0$ の場合、f' の連続性から、$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $f' > 0$ on $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. このとき f は $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ で狭義単調増加である。このとき、$U := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $V := (f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon))$ とおくと、$\widetilde{f}$ が定義できて、単射である。また中間値の定理を用いて全射であることが分かる。ゆえに $\widetilde{f}$ は全単射であるから逆関数が存在する。少し頑張ると $\widetilde{f}^{-1}$ の連続性と微分可能性が証明できる (詳しくは桂田 [15] の付録 H.2「1 変数の逆関数の定理」)。■

逆関数の定理は、この例の素直な多次元化である。しかしそれを説明する前に、線形代数の復習をしておく。

例 11.3 (線型写像が全単射となる条件) 有限次元線型空間の間の線型写像を考える。一般形は、$n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M(m, n; \mathbb{R})$ として、

$$f\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^m$$

である。この f が全単射になるには、

$$m = n \wedge \det A \neq 0$$

が必要十分であり、そのとき、

$$f^{-1}(y) = A^{-1}y \quad (y \in \mathbb{R}^m).$$

(証明) 有名な次元定理

$$\operatorname{rank} f = n - \dim\ker f$$

が成り立つ。これはやや高級な定理であるが、これを認めれば後の議論は簡単である。まず、

- f が全射 $\iff \operatorname{rank} f = m$
- f が単射 $\iff \dim\ker f = 0$

であるから、

$$\begin{aligned} f \text{ が全単射} &\implies (\operatorname{rank} f = m \quad \text{and} \quad \dim\ker f = 0) \\ &\implies m = n. \end{aligned}$$

ゆえに全単射であるためには、空間の次元に関する条件 $m = n$ が必要である。そこで以下 $m = n$ を前提条件とする。このとき

$$\begin{aligned} f \text{ が全射} &\iff \operatorname{rank} f = m (= n) \\ &\iff \dim\ker f = 0 \\ &\iff f \text{ は単射} \\ &\iff f \text{ は全単射} \\ &\iff f^{-1} \text{ が存在} \\ &\iff A^{-1} \text{ が存在} \\ &\iff \det A \neq 0. \blacksquare \end{aligned}$$

11.4 逆関数定理とその証明

定理 11.4 (逆関数定理, the inverse function theorem) Ω は $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級、$a \in \Omega$, $\det f'(a) \neq 0$ ならば、($\exists U$: a を含む開集合) ($\exists V$: $b = f(a)$ を含む開集合) $\widetilde{f} = f|_U\colon U \to V$ を $\widetilde{f}(x) = f(x)$ $(x \in U)$ で定めると $\widetilde{f}$ は全単射で、逆関数 $\widetilde{f}^{-1}\colon V \to U$ も C^1 級である。

特に $\widetilde{f}\colon U \to V$ は全単射で、$\widetilde{f}$ と $\widetilde{f}^{-1}$ は連続である。このような写像を**同相写像** (homeomorphism) と呼ぶ。

証明の方法にはいくつかあり、解析学の常套手段である「**逐次近似法**」を使う証明は非常に魅力的だが、準備に手間がかかるので、ここでは Weierstrass の最大値定理に持ち込む方法を採用する。

おおまかな方針の説明: x が a に十分近いとき (δ を小さな正数として $|x-a| < \delta$ で考えて)、$f(x) \fallingdotseq f'(a)(x-a) + f(a)$ であるから、f は 1 次関数で十分良く近似される。特に $f'(a) = I$ の場合を証明すれば良いことが分かるので、$f(x) \fallingdotseq x + c$ となっている。与えられた y に対して $y = f(x)$ を満たす x を求めるため、$x \mapsto |y - f(x)|^2$ の最小値を考える。

証明

1° $A := f'(a)$, $g(y) := A^{-1}y$, $\tilde{f} := g \circ f$ とおくと、$\left(\tilde{f}\right)'(a) = g'(f(a))f'(a) = A^{-1}A = I$ (I は単位行列) となる。$\tilde{f}$ について定理を証明すれば、$f = g^{-1} \circ \tilde{f}$ について示せたことになる。そこで以下 $f'(a) = I$ と仮定として証明すれば十分である。

2° $(\exists \delta > 0)$ $K := \overline{B}(a;\delta)$ とおくとき、$K \subset \Omega$ かつ

(a) $(\forall x \in K)$ $|f'(x) - f'(a)| < \dfrac{1}{2}$.

(b) $(\forall x \in K)$ $\det f'(x) \neq 0$.

(c) $(\forall x \in K \setminus \{a\})$ $f(x) \neq f(a)$.

主張 (a), (b), (c) の証明 f' の連続性により、$x \mapsto |f'(x) - f'(a)|$ は連続で、$x = a$ のとき 0 であるから、

$$(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \overline{B}(a;\delta_1))\, |f'(x) - f'(a)| < \frac{1}{2}.$$

同様に $x \mapsto \det f'(x)$ は連続で、$\det f'(a) = 1 \neq 0$ であるから、

$$(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in \overline{B}(a;\delta_2)) \det f'(x) \neq 0.$$

(c) については、まず f が a で微分可能であることから

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

ゆえに $(\exists \delta_3 > 0)$

$$(\sharp) \qquad (\forall x : 0 < |x-a| < \delta_3) \quad \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} < \frac{1}{2}.$$

これから $0 < |x-a| < \delta_3$ ならば $f(x) \neq f(a)$ が成り立つ。実際、もしも $f(x) = f(a)$ とすると

$$\frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = \frac{|0 - I(x-a)|}{|x-a|} = \frac{|x-a|}{|x-a|} = 1$$

となり $(\sharp)$ に矛盾する。$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおけば $\delta > 0$ で、(a), (b), (c) が成り立つ。

3° (d) $(\forall x_1 \in K)\ (\forall x_2 \in K)\ |x_1 - x_2| \le 2\,|f(x_1) - f(x_2)|$.

これから f を K に制限したものが単射であることはすぐ分かるし ($x_1, x_2 \in K,\ f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つ)、後述の逆写像が連続であることの証明の鍵となる。

主張 (d) の証明　$g(x) := f(x) - x\ (x \in K)$ とおくと

$$g'(x) = f'(x) - I = f'(x) - f'(a)$$

であるから、(a) を用いて

$$\max_{x \in K} |g'(x)| \le \frac{1}{2}.$$

g の変化を g' を用いて評価する。

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= [g(x_2 + t(x_1 - x_2))]_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(x_2 + t(x_1 - x_2))dt \\ &= \int_0^1 g'(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)dt \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} |g(x_1) - g(x_2)| &\le \int_0^1 |g'(x_2 + t(x_1 - x_2))|\,|x_1 - x_2|\,dt \\ &\le \max_{x \in K} |g'(x)|\,|x_1 - x_2| \\ &\le \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|\,. \end{aligned}$$

すなわち

$$|(f(x_1) - f(x_2)) - (x_1 - x_2)| \le \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|\,.$$

ゆえに (不等式 $|a| - |b| \le |a - b|$ を用いて)

$$|x_1 - x_2| - |f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|\,.$$

移項して両辺を 2 倍すれば、(d) を得る。■

4° $S :=$ 閉球 K の境界 $= \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = \delta\}$ は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であり、$x \mapsto |f(x) - f(a)|$ は連続であるから、$d := \min\limits_{y \in S} |f(y) - f(a)|$ が存在する。(c) より $|f(x) - f(a)| > 0\ (x \in S)$ であるから、$d > 0$. $V := B(f(a); d/2)$ とおくと、

(e) $y \in V \land x \in S \Rightarrow |y - f(a)| < |y - f(x)|$.

(図を描くとほぼ明らかである。V は $f(a)$ を中心とする半径 $d/2$ の開球である。$f(x)$ は $f(S)$ 上にあるが、それは $f(a)$ を中心とする半径 d の開球の補集合に含まれる。)

主張 (e) の証明　実際、まず V の定義から

$$|y - f(a)| < \frac{d}{2}.$$

一方 $x \in S$ であることと、d の定義から

$$|f(x) - f(a)| \ge \min_{y \in S} |f(y) - f(a)| = d$$

であるから

$$\begin{aligned}|y-f(x)| &= |y-f(a)+f(a)-f(x)| \geq |f(x)-f(a)|-|y-f(a)| \\ &> d-\frac{d}{2}=\frac{d}{2}>|y-f(a)|.\end{aligned}$$

5° (f) $(\forall y\in V)\ (\exists!\ \overline{x}\in K\setminus S=B(a;\delta))\quad f(\overline{x})=y.$

主張 (f) の証明 任意の $y\in V$ を固定して、関数 $h\colon K\to\mathbb{R}$ を

$$h(x):=|y-f(x)|^2\equiv(y-f(x),y-f(x))$$

で定義する。(これが 0 になる点の存在を示すわけだが、それは最小値を与える点であることに注目しよう。) この h は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K 上の連続関数であるから、最小値を取る点 $\overline{x}\in K$ が存在する。ところで (e) より

$$x\in S\Rightarrow h(a)<h(x)$$

であるから、S 上の点が h の最小値を与えることはない。ゆえに $\overline{x}\notin S$. ゆえに h は内点 $\overline{x}$ で最小値を取ることになり、$\nabla h(\overline{x})=0$.

一般に「$F\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ が微分可能ならば、$h(x):=|F(x)|^2$ とおくと、$\nabla h(x)=2F'(x)^TF(x)$」となるので、$\nabla h(\overline{x})=f'(\overline{x})^T(f(\overline{x})-y)$. (b) より $f'(\overline{x})$ は正則行列であるから $f(\overline{x})-y=0$. すなわち $f(\overline{x})=y$. $\overline{x}$ の一意性は (d) から分かる。

6° ここまでで分かったことをまとめる。$\delta>0$, $d>0$ があって、

$$K=\overline{B}(a;\delta),\quad S=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-a|=\delta\},\quad V=B(f(a);d/2)$$

に対して

再掲 (d) $(\forall x_1\in K)\ (\forall x_2\in K)\ |x_1-x_2|\leq 2\,|f(x_1)-f(x_2)|$.

再掲 (f) $(\forall y\in V)\ (\exists!\ x\in K\setminus S)\quad y=f(x)$.

このとき

$$B:=K\setminus S=B(a;\delta),\quad U:=B\cap f^{-1}(V)$$

とおくと、$a\in U$ かつ U は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。実際、

- $a\in B(a;\delta)=B$, また $f(a)\in B(f(a);d/2)=V$ であるから $a\in f^{-1}(V)$. ゆえに $a\in U$.
- B は開球であるから開集合である。
- 後は $f^{-1}(V)$ が開集合であることを示せば、U は 2 つの開集合の共通部分として開集合である。その証明は、本質的に定理 8.6 (p. 79) の証明と同じである。$b\in f^{-1}(V)$ とすると、$f(b)\in V$ であり、V は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)\ B(f(b);\varepsilon)\subset V$. f が連続であることから、$(\exists\delta'>0)\ (\forall x\in\Omega\colon\ |x-b|<\delta')\ |f(x)-f(b)|<\varepsilon$. ゆえに $f(x)\in V$. $x\in f^{-1}(V)$. これは $f^{-1}(V)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示している。

このとき $V\subset f(B)$ に注意すると

$$f(U)=f(B\cap f^{-1}(V))\subset f(B)\cap f(f^{-1}(V))\subset f(B)\cap V=V.$$

そこで $\widetilde{f}:=f|_U\colon U\to V$ を $\widetilde{f}(x)=f(x)\ (x\in U)$ で定めることが出来て、$\widetilde{f}$ は全単射となり、逆写像 $\widetilde{f}^{-1}\colon V\to U$ が存在する。

7° $\widetilde{f}^{-1}$ は連続である。実際 (d) より $y_1, y_2 \in V$ とするとき

$$(\sharp) \qquad \left|\widetilde{f}^{-1}(y_1) - \widetilde{f}^{-1}(y_2)\right| \le 2\,|y_1 - y_2|$$

であるから。

8° $\forall x \in U$ に対して、$\widetilde{f}^{-1}$ は $y := f(x)$ で微分可能で

$$(\widetilde{f}^{-1})'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}.$$

主張の証明 $x_0 \in U$ に対して、$A := f'(x_0)$ とおく。(b) より $\det A \ne 0$ であるから、A の逆行列が存在する。微分可能性の定義から

$$(13) \qquad f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \varepsilon(x)$$

によって $\varepsilon(x)$ を定めるとき

$$(\flat) \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|\varepsilon(x)|}{|x - x_0|} = 0.$$

さて $\forall y \in V$ に対して $x := \widetilde{f}^{-1}(y)$ とおくと $x \in U$ であり、$f(x) = y$. それで (13) の両辺に A^{-1} をかけ、y_0, y で書き直すと

$$A^{-1}(y - y_0) = \widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0) + A^{-1}\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y)).$$

ゆえに

$$\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y)).$$

そこで次のことを示せばよい。

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\left|A^{-1}\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y))\right|}{|y - y_0|} = 0.$$

これを示すには

$$\lim_{y \to y_0} \frac{\left|\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y))\right|}{|y - y_0|} = 0$$

を示せばよい。

$$\frac{\left|\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y))\right|}{|y - y_0|} = \frac{\left|\varepsilon(\widetilde{f}^{-1}(y))\right|}{\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0)\right|} \cdot \frac{\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y_0))\right|}{|y - y_0|}.$$

$\widetilde{f}^{-1}$ の連続性より、$y \to y_0$ のとき $\widetilde{f}^{-1}(y) \to \widetilde{f}^{-1}(y_0) = x_0$. ゆえに ($\flat$) により右辺の第 1 因子 $\to 0$. 一方第 2 因子は、($\sharp$) より 2 で押さえられる。

9° $\widetilde{f}^{-1}$ が C^1 級であること。$\widetilde{f}^{-1}$ のヤコビ行列 $(\widetilde{f}^{-1})'(y)$ は $f'(x)$ の逆行列であり、成分は Cramer の公式から、分母が $\det f'(x)$, 分子は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ の多項式として表現できる。これは y の関数として見て連続である。ゆえに $\widetilde{f}^{-1}$ は C^1 級である。■

12 陰関数定理

12.1 イントロ (2 変数関数版)

陰関数という言葉は初めての可能性が高いので、陰関数定理については、簡単な具体例を並べるところから始めよう。

直観的には、方程式 $F(x,y)=0$ は、(例外的な状況を除けば) 平面曲線を定め、適当に範囲を限定すると、変数 x の関数 $y=\varphi(x)$ を定めることがある (このとき、その関数 $y=\varphi(x)$ を $F(x,y)=0$ の定める陰関数と呼ぶ)。

いくつか実例を並べてみよう。

(1) $F(x,y)=y-\varphi(x)$ のとき、$y=\varphi(x)$. $F(x,y)=0$ の定める曲線は、関数 φ のグラフである。

(2) $F(x,y)=ax+by+c$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0))$ のとき、$F(x,y)=0$ の定める曲線は直線である。$b\neq 0$ であれば、$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ と解ける。

(3) $F(x,y)=x^2+y^2-1$ のとき、$y=\pm\sqrt{1-x^2}$. $F(x,y)=0$ の定める曲線は、原点を中心とする半径 1 の円周である。(一般に、$F(x,y)$ が x と y の 2 次多項式であるならば、$F(x,y)=0$ の定める曲線は、いわゆる 2 次曲線で、具体的には、空集合、1 点、2 直線、楕円、放物線、双曲線である — 線形代数のテキストを見よ)。

(4) $F(x,y)=y^2-x^2(x-a)$ (a は実定数) のとき、$F(x,y)=0$ は、$y=0$ ($x=0$ のとき), または $y=\pm x\sqrt{x-a}$ ($x\geq a$ のとき) と解ける[51]。$F(x,y)=0$ の定める曲線は、

   (a) $a<0$ のときは原点で自己交差する曲線 (原点を結節点と呼ぶ)

   (b) $a=0$ のときは原点で尖っている曲線 (原点を尖点と呼ぶ)

   (c) $a>0$ のときは原点と、$x\geq a$ の範囲にある曲線 (原点を孤立点と呼ぶ)

```
g0=ListPlot[{{0,0}}]
myg[a_]:=ContourPlot[y^2-(x-a)x^2==0,{x,-2,2},{y,-2,2},ContourStyle->Red]
g=Show[myg[1],g0]
```

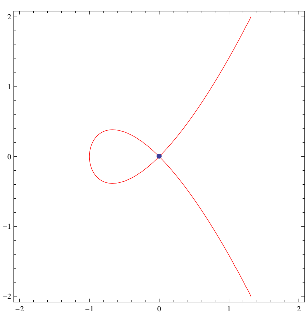


図 6: $a=-1$

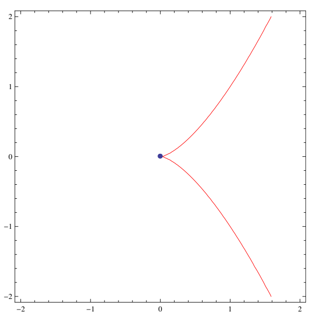


図 7: $a=0$

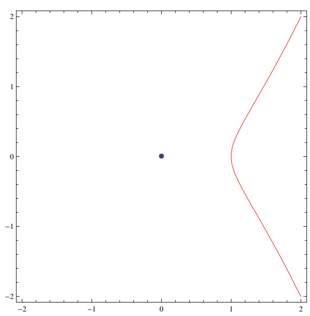


図 8: $a=1$

[51] $y^2=x^2(x-a)$ としたとき、実数の範囲で解ける $\Leftrightarrow x^2(x-a)\geq 0 \Leftrightarrow [x=0$ または $x\geq a]$ であることに注意せよ。$x=0$ のときは $y=0$, $x\geq a$ のときは、$y=\pm\sqrt{x^2(x-a)}=\pm|x|\sqrt{x-a}=\pm x\sqrt{x-a}$.

(5) (ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, 1694 年) $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)$ のとき、$F(x,y)=0$ は、いわゆるヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート (連珠形, 図 9) と呼ばれる。$F(x,y)=0$ は y についての 4 次方程式であるが、2 次方程式を解くことを 2 回行って、y について解ける。

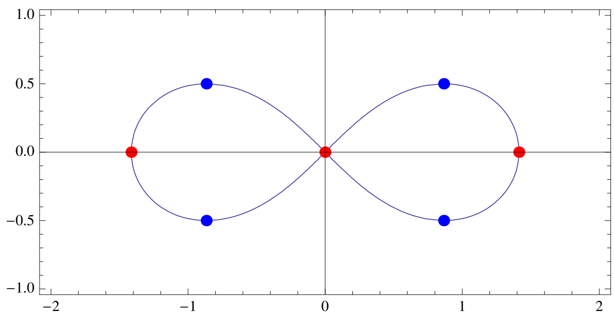


図 9: ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート $(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0$

(6) (デカルトの葉線, folium cartesii, 1638 年) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy$ のとき、$F(x,y)=0$ の定める曲線は、いわゆるデカルトの葉線で、原点において自分自身と交差する曲線である (図 10)。$F(x,y)=0$ は y についての 3 次方程式である。これは y について簡単に解くことは…？出来ないと思ったら、Mathematica は答を返して来た。あ、そうか。でも使いにくそう。例 12.6 (p. 112) を参照せよ。

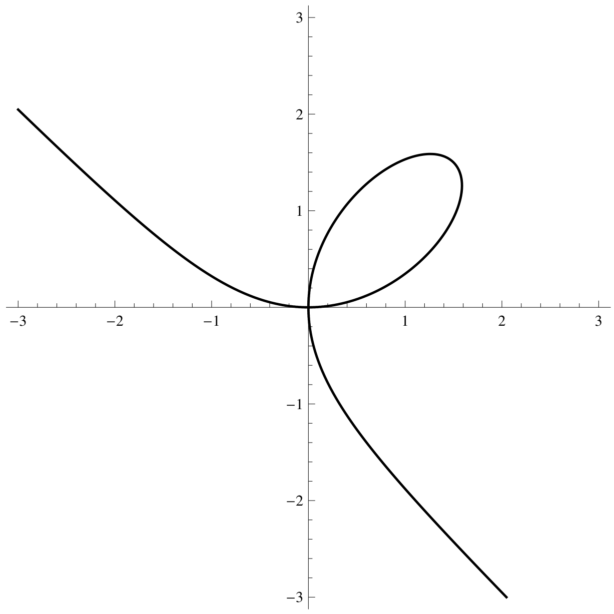


図 10: Decartes の葉線 $x^3+y^3-3xy=0$

余談 12.1 (Decartes の葉線の伝統的な描き方) 極座標を使うと、

$$r=\frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$$

という極方程式がすぐに得られる。あるいは $y=tx$ として、

$$x=\frac{3t}{1+t^3},\quad y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

という有理パラメーター表示も得られる。$x+y=-1$ が漸近線になっている。■

次のことが分かる。

- F によっては、$F(x,y)=0$ を具体的な式変形で y について解くことは不可能である。
$\to$ 抽象的な「存在定理[52]」が望み得るゴールとなる。

- 1 つの x に 2 つ以上の y が対応したり、逆に 1 つも y がなかったりする。
$\to$ 最初に $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) があったとして、その点の「近傍」で考えることにする。とっかかりは要求することにする。(a,b) によってうまく行ったり行かなかったりする。

- 1 つの x に複数の y が対応する場合も、注目している点を中心とした十分小さい範囲に限れば、1 つの x に 1 つの y が対応するようになることもある。
$\to$ a を含む開集合 U, b を含む開集合 V をとり、$U\times V$ (イメージとしては窓枠、ウィンドウ) に考察を限定する、という方針が良さそう。

  もっとも、どんなに小さい範囲にしぼってもダメなこともある (その点で曲線が自己交差していたり、x について片側にしか対応する y がない)。うまく行くための十分条件はないか？
$\to$ 実は $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ という条件が満たされれば OK, と後で分かる。

- 陰関数の導関数は (そもそも存在するかはすぐには分からないことであるが、存在するならば)、合成関数の微分法で計算するのは簡単である。

  例: $x^2+y^2=1$ より、$2x+2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$ だから、$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.
一般には、$F(x,\varphi(x))=0$ より、
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0 \quad \text{より} \quad \varphi'(x)=-\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x)).$$

12.2 定理とその証明

以下 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ が登場する。これはもちろん
$$\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\left\{(x,y)\;\middle|\; x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^m, y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\right\}$$
であるから、
$$z=\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_m\\ z_{m+1}\\ \vdots\\ z_{m+n}\end{pmatrix}\quad (z_j\in\mathbb{R},\ j=1,2,\cdots,m+n)$$
全体の集合である $\mathbb{R}^{m+n}$ と同一視できる。そこで例えば $\Omega\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ が開集合と言った場合はこの同一視によって Ω が $\mathbb{R}^{m+n}$ の開集合であることを意味する。単に (x,y) が $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ の要素であると言った場合は、特に断りがなければ $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^n$ であるとする。

[52] アナロジーとして、中間値の定理を思い出させる。

さて、$F\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ があるとき、

$$F=\begin{pmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_n\end{pmatrix}$$

と書けば、

$$F'(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

となるわけだが、m 列, n 列とブロックわけして、それぞれ $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ と書く。すなわち

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}.$$

以下しばらくこの記号を使おう。

定理 12.2 (陰関数定理, the implicit function theorem) Ω は $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ の開集合、$F\colon\Omega\ni(x,y)\mapsto F(x,y)\in\mathbb{R}^n$ は C^1 級、$(a,b)\in\Omega$, $F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ が成り立つとする。このとき、a を含む $\mathbb{R}^m$ の開集合 U, b を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合 V, C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ で、以下の (i), (ii), (iii), (iv) を満たすものが存在する。

(i) $U\times V\subset\Omega$.

(ii) $\forall(x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0\iff y=\varphi(x)$.

(iii) $\varphi(a)=b$.

(iv) $\forall x\in U$ について、$\varphi'(x)=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$.

注意 12.3 (覚え方のヒント) 上の定理は、大事なことをひとまとめにしたものだが、最低限必要なことと、それから導かれることに分けた方が覚えやすいかも知れない。実は (iii), (iv) は他のことから導ける。

まず $F(a,b)=0$ と (ii) から $\varphi(a)=b$ が導かれる。また (ii) から $F(x,\varphi(x))=0$ が得られるが、F と φ が C^1 級であるから、$F_x(x,\varphi(x))+F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$. $\det F_y(a,b)\neq 0$ であるから、(a,b) を含む十分小さな開集合で $F_y(x,y)^{-1}$ が存在するので、$\varphi'(x)=-\left(F_y(x,\varphi(x))\right)^{-1}F_x(x,\varphi(x))$.
■

注意 12.4 (陰関数定理の条件 (ii) の言い換え「零点集合がグラフになる」) 定理 12.2 の (ii) は、「方程式が解ける」といういわば解析的な表現であるが、幾何学的な表現である次の (ii)' で置き換えることも出来る。

(ii)' $U\times V$ において、F の零点集合は φ のグラフに一致する: $N_F\cap(U\times V)=\operatorname{graph}\varphi$.

ここで N_F, $\operatorname{graph}\varphi$ はこれまでも登場した記号で、

$$N_F := \{(x,y) \in \Omega \mid F(x,y) = 0\}, \quad \operatorname{graph}\varphi := \{(x,\varphi(x)) \mid x \in U\}. \blacksquare$$

証明　$f\colon \mathbb{R}^{m+n} \supset \Omega \to \mathbb{R}^{m+n}$ を、$f(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ F(x,y) \end{pmatrix}$ で定義すると、これは C^1 級で、$f(a,b) = \begin{pmatrix} a \\ F(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$f'(a,b) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}.$$

これから

$$\det f'(a,b) = \det I \cdot \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = \det \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0.$$

ゆえに逆関数定理が適用できて、点 (a,b) を含む開集合 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ と、点 $f(a,b) = (a,0)$ を含む開集合 W が存在して、 $f|_{\widetilde{\Omega}}\colon \widetilde{\Omega} \to W$ は C^1 級の逆関数 g を持つ。

$\forall(x,y) \in \widetilde{\Omega}$ に対して $g(x,y) = (x, \psi(x,y))$ と書ける。(実際、$(\eta(x,y), \psi(x,y)) := g(x,y)$ とおくと、$(x,y) = f(\eta(x,y),\psi(x,y)) = (\eta(x,y), F(\eta(x,y),\psi(x,y)))$. ゆえに $x = \eta(x,y)$ であるから、$g(x,y) = (x,\psi(x,y))$.)

射影 $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\pi(x,y) = y$ で定めると、$\psi = \pi \circ g$ と表現できる。これから ψ は C^1 級であることが分かる。

一方 $\pi \circ f = F$ ゆえ、$\forall(x,y) \in W$ に対して

$$F(x,\psi(x,y)) = F(g(x,y)) = (\pi \circ f) \circ g(x,y) = \pi \circ (f \circ g)(x,y) = \pi(x,y) = y.$$

さて a を含む開集合 $\tilde{U}$, b を含む開集合 V を十分小さく取って

$$\tilde{U} \times V \subset \tilde{\Omega}, \quad \tilde{U} \times \{0\} \subset W$$

が成り立つようにする。そして $\tilde{\varphi}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^m$ を $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x,0)$ で定める ($x \in \tilde{U}$ の時 $(x,0) \in \tilde{U} \times \{0\} \subset W = \psi$の定義域 であることに注意)。$\psi$ が C^1 級ゆえ $\tilde{\varphi}$ も C^1 級である。そして $\tilde{\varphi}(a) = b$. 実際 $\varphi(a) = \psi(a,0) = \pi \circ g(a,0) = \pi(a,b) = b$.

$U = \tilde{U} \cap \tilde{\varphi}^{-1}(V)$ とおくと U は a を含む開集合で $\varphi(U) \subset V$.

そして $x \in U$ とすると $\varphi(x) \in \varphi(U) \subset V$. よって $(x,\varphi(x)) \in U \times V \subset \tilde{U} \times V \subset \tilde{\Omega}$. ゆえに $F(x,\varphi(x)) = F(x,\psi(x,0)) = 0$.

逆に $F(x,y_1) = 0$ となったとすると、

$$f(x,y_1) = (x, F(x,y_1)) = (x,0) = (x, F(x,\varphi(x))) = f(x,\varphi(x)).$$

$f|_{\tilde{\Omega}}$ は 1 対 1 ゆえ、$y_1 = \varphi(x)$. $\blacksquare$

余談 12.5 (陰関数定理を認めた上での逆関数定理の証明) 講義の話の流れからは必要ないので、アイディアだけ。$F(x,y) := f(x) - y$ により F を定義すると、$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x)$ であるから、

$$\det \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \det f'(a) \neq 0.$$

これから F について陰関数定理が適用できて、(a,b) の近傍で $F(x,y) = 0$ が x について解けることが分かる。 $\blacksquare$

12.3 単純な例

既に述べたように、陰関数定理は広範な応用を持つが、ここではなるべく単純な例を紹介する。

例 12.6 [デカルトの葉線 (folium of Descartes, folium cartesii, 1694)] $a > 0$ とするとき、$F(x,y) := x^3 + y^3 - 3axy$, $P = \left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ とおく。点 P の十分小さな開近傍において、$F(x,y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在することを示し、その点における微分係数を求めよ。

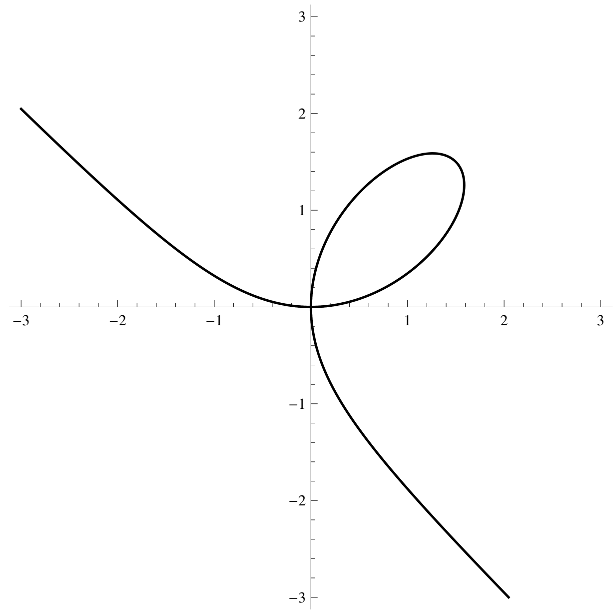


図 11: Mathematica による $F(x,y) := x^3 + y^3 - 3axy$ の零点集合 ($a = 2/3$ の場合)

```
g = ContourPlot[x^3 + y^3 - 3 x y==0, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
  ContourStyle->Thick, Axes->True, Frame->None]
```

解答　$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^1 級で、

$$F\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}\right)^3 + \left(\frac{3a}{2}\right)^3 - 3a\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \left(\frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4}\right)a^3 = 0,$$

$$F_y(x,y) = 3y^2 - 3ax, \quad F_y\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right) = 3\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - 3a\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{4} \neq 0$$

であるから、$\dfrac{3a}{2}$ の十分小さな開近傍 U と V が存在して、$U \times V$ で $F(x,y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ と解けて、$\varphi\colon U \to V$ は C^1 級となる。$F(x,\varphi(x)) = 0$ より、$F_x(x,\varphi(x)) + F_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$ となるので、$\varphi'(x) = -\dfrac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$. $F_x(x,y) = 3x^2 - 3ay$, $F_x\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right) = \dfrac{9a^2}{4}$ であるから、

$$\varphi'\left(\frac{3a}{2}\right) = -\frac{F_x(3a/2, 3a/2)}{F_y(3a/2, 3a/2)} = -\frac{9a^2/4}{9a^2/4} = -1. \blacksquare$$

注意 12.7 (陰関数の存在しない点) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ であれば、(x_0, y_0) の近傍で、$y = \varphi(x)$ の形の陰関数が存在することが保証されるので、その形の陰関数の存在しない可能性がある点は、連立方程式 $F(x,y) = 0$, $F_y(x,y) = 0$ の解として得られる。実際に解くと、$(x,y) =$

$(0,0)$, $\left(2^{2/3}a, 2^{1/3}a\right)$. この後者は、円 $x^2+y^2=a^2$ の場合の $(\pm a, 0)$ のような点であるが、原点 $(0,0)$ の方は、少し様子が違って、どんなに小さな開近傍を取っても、1 つの x に対して $F(x,y)=0$ を満たす y が 3 つ存在したりする。いずれにせよ、$(0,0)$, $\left({}^{2/3}a, 2^{1/3}a\right)$ とも、そのいかなる近傍でも、$y=\varphi(x)$ の形の ($F(x,y)=0$ の) 陰関数は存在しない。■

問 99. $F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$ とおく。

(1) 点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ の十分小さな開近傍において、$F(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを陰関数定理を用いて示せ。(本当は、定理を使わないでも、2 次方程式を解けば陰関数が具体的に求まる。そういう単純な場合で、定理を使う練習をしましょう、ということである。)

(2) $F(a,b)=0$ を満たす点 (a,b) のうちで、陰関数定理の仮定の成立しない点[53]を求めよ。

(3) 曲線 $F(x,y)=0$ 上の点で、その点における接線の傾きが 0 となる点を求めよ。

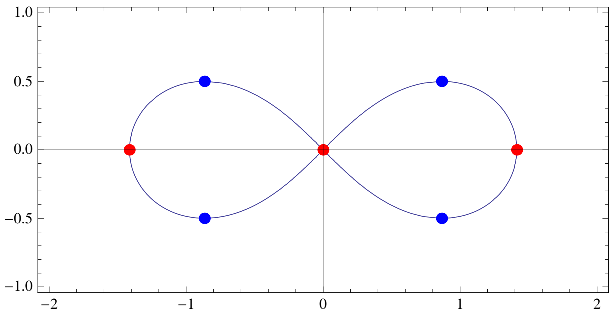


図 12: ヤコブ・ベルヌーイのレムニスケート, $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0$

例 12.8 連立方程式 $x+y+z+w=0$, $e^x+e^{2y}+e^z+e^w=4$ は、0 の十分小さな開近傍で x, y について解けることを証明せよ。

解答

$$X := \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$
$$F_1(X,Y) := x+y+z+w, \quad F_2(X,Y) := e^x+e^{2y}+e^z+e^w-4,$$
$$F(X,Y) := \begin{pmatrix} F_1(X,Y) \\ F_2(X,Y) \end{pmatrix}$$

とおくと、$F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (X,Y) \longmapsto F(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ は C^1 級で、

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(X,Y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^x & 2e^y \end{pmatrix}.$$

これから

$$\det \frac{\partial F}{\partial Y}(0,0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

[53]ただし、陰関数としては $y=\varphi(x)$ の形のものを考える ($x=\psi(y)$ の形のものは考えない)。

ゆえに $F(X,Y)=0$ は 0 の近傍で Y について解ける。いいかえると (x,y) について解ける。ついでに

$$\varphi'(X)=-\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial X}=-\frac{1}{2e^{2y}-e^x}\begin{pmatrix}2e^{2y} & -1\\ -e^x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ e^z & e^w\end{pmatrix}$$

が得られる。■

12.4 陰関数、逆関数の高階数導関数

陰関数、逆関数の高階導関数については、次の命題が成り立つ。

命題 12.9 (陰関数、逆関数の微分可能性) (1) 陰関数定理で F が C^k 級 $(k\geq 2)$ であれば φ も C^k 級。

(2) 逆関数定理で f が C^k 級 $(k\geq 2)$ であれば f^{-1} も C^k 級。

証明 陰関数定理、逆関数定理における (1 階の) 導関数の公式を眺めると明らかである (以下の例を見よ)。■

高階導関数を実際に計算するには、合成関数の微分法を用いれば良い。陰関数の場合に $k=2$ に対して調べてみよう。まず陰関数定理から、陰関数 φ は C^1 級で

$$\varphi'(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x)). \tag{14}$$

ここで F が C^2 級という仮定から $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ は C^1 級である。また φ は C^1 級であるから、(14) の右辺は C^1 級関数の合成関数として C^1 級である。ゆえに φ' が C^1 級となるから φ は C^2 級である。一般の場合もこれと同じことである。

その気になれば、合成関数の微分法に関する定理を用いて、実際に (14) の右辺を微分して、φ の 2 階導関数を表す公式を具体的に求められる。$m=n=1$ の場合に実行してみよう。

$$\begin{aligned}
\varphi''(x)&=-\frac{F_y(x,\varphi(x))\dfrac{d}{dx}F_x(x,\varphi(x))-\dfrac{d}{dx}F_y(x,\varphi(x))F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))^2}\\
&=-\Big\{F_y(x,\varphi(x))\left[F_{xx}(x,\varphi(x))+F_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]\\
&\qquad-\left[F_{yx}(x,\varphi(x))+F_{yy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right]F_x(x,\varphi(x))\Big\}\times\frac{1}{F_y(x,\varphi(x))^2}\\
&=-\frac{F_yF_{xx}+F_yF_{xy}(-F_x/F_y)-F_{yx}F_x-F_{yy}(-F_x/F_y)F_x}{F_y^2}\\
&=-\frac{F_y^2F_{xx}-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.
\end{aligned}$$

なかなか面倒なようだが、例えば極値の判定をするときは $\varphi'(x)=0$, すなわち $F_x(x,\varphi(x))=0$ となる点 x における値のみ興味があるわけで、そういう点では

$$\varphi''(x)=-\frac{F_y^2F_{xx}}{F_y^3}=-\frac{F_{xx}}{F_y} \tag{15}$$

とかなりシンプルになる。

例題 12.1 方程式

$$xy^2 - x^2y - 2 = 0$$

によって定められる陰関数 y の極値を求めよ。(古い演習書を見ると、この手の問題が載っていたりします。以下のようにして解いても、それだけではどういう陰関数なのか全然分からない、というのが変な感じがしますが…参考まで。)

解 まず与式を微分して

$$y^2 + 2xyy' - 2xy - x^2y' = 0. \tag{16}$$

これから

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow y(y-2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x \quad (y = 0 \text{ は元の式を満たさない}) \\ &\Leftrightarrow x = 1, \quad y = 2. \end{aligned}$$

ところで (16) から

$$2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' - 2y - 2xy' - 2xy' - x^2y'' = 0.$$

よって

$$y'(4y + 2xy' - 4x) + (2xy - x^2)y'' - 2y = 0.$$

ここで $x = 1$, $y = 2$, $y' = 0$ を代入すると $3y'' - 4 = 0$ となるので、

$$y'' = 4/3 > 0.$$

よって極小値である。■

12.5 陰関数定理の応用について

陰関数定理は、初めて学ぶ人にとっては、きちんと述べるだけでも大変な定理である。その本質は、いわゆる存在定理であって、ご利益(りやく)が分かりづらいところがある。しかし陰関数定理は多くの重要な応用を持つ。ここでは、多様体、条件付き極値問題、分岐理論[54]を紹介する。

多様体 幾何学の諸理論を展開する場である**多様体**(たようたい) (**manifold**) は (狭い見方をすれば) 曲線や曲面の概念を一般化したものであるが、現代の数学にとって基本的な言語である。その理論の基礎固めをするときに陰関数定理が必要になる。(例えば、局所的に $F = 0$ という方程式の解集合として定義されるものと、 $\operatorname{graph}\varphi$ として定義されるものが同等であることを保証するために使われる。この種の応用のごく簡単な場合を、次項「関数のレベル・セット」で説明する。)

条件つき極値問題 次の C 節で詳しく説明する。

分岐理論 パラメーター λ を含む方程式

$$F(x, \lambda) = 0$$

の解 $x = x(\lambda)$ のパラメーター依存性 (特に解の一意性がなくなる場合) を研究するのが**分岐理論**(ぶんきりろん) (**bifurcation theory**) である。陰関数定理が適用できる場合であれば、解の一意性が成立するので、分岐が起るためには、陰関数定理の条件が成立しないことが必要と分かる。

[54]非線形数学の重要なテーマである。

12.6 関数のレベル・セット

$$\text{内点 } a \text{ が } f \text{ の極値点} \Longrightarrow a \text{ は } f \text{ の停留点 i.e. } \nabla f(a)=0.$$

という定理の図形的な解釈を、関数のグラフの接平面を用いて行うことが出来るが、ここでは、f のレベル・セットとからめた意味付けを補足しておく。

簡単のため、Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ を C^1 級の関数とする。$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$L_c := \{(x,y)\in\Omega \mid f(x,y)=c\}$$

を f の高さ c の**レベル・セット** (level set) あるいは**等高線** (contour) という。特に $c=0$ の場合、L_c を f の**零点集合**とも呼び、N_f という記号で表したこともあった。

今 $(a,b)\in\Omega$ を任意に取って、$c:=f(a,b)$ とおく ($(a,b)\in L_c$ なので $L_c\neq\emptyset$ が成り立つ)。既に

> (a,b) から $\nabla f(a,b)$ の方向に移動すると標高が高くなり、$-\nabla f(a,b)$ の方向に移動すると標高が低くなる

ということは分かっている。

「∇f が 0 でなければ、レベル・セット L_c は曲線」 $F(x,y):=f(x,y)-c$ とおき、F について陰関数定理を適用することによって、$\nabla f(a,b)\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ならば、(a,b) の十分小さな開近傍 $U\times V$ で、$f(x,y)=c$ は、以下示すように、1 つの変数について解くことができる。

(1) $f_y(a,b)\neq 0$ の場合。y について解ける。すなわち $\mathbb{R}$ の開集合 U, V と C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ が存在して、$b=\varphi(a)$,

$$N_F\cap(U\times V)=\operatorname{graph}\varphi:=\{(x,\varphi(x))\mid x\in U\}.$$

(2) $f_x(a,b)\neq 0$ の場合。x について解ける。すなわち $\mathbb{R}$ の開集合 U, V と C^1 級の関数 $\psi\colon V\to U$ が存在して、$a=\psi(b)$,

$$N_F\cap(U\times V)=\operatorname{graph}\psi\equiv\{(\psi(y),y)\mid y\in V\}.$$

$N_F=L_c$ であることに注意すると、レベル・セット L_c は、(a,b) の十分小さな開近傍で 1 変数関数のグラフ、従って曲線になることが分かる。■

「$\nabla f=0$ の場合は…」 狭義の極値点 (山や谷) の近傍におけるレベル・セット L_c は「点」である。ちなみに峠点の近傍におけるレベル・セットは、峠点で交わる 2 曲線である[55]。■

同様にして、f が $\mathbb{R}^3$ の開集合 Ω で定義された C^1 級の関数で、$\nabla f\neq 0$ を満たす場合は、f のレベル・セット L_c は、局所的に 2 変数関数のグラフとして表され、特に曲面であることが分かる。

13 Lagrange の未定乗数法

Lagrange の未定乗数法については 1 年生のときに学んだはずであるが、ここではその証明 (陰関数定理を用いる) を紹介する。

[55] この事実は、Morse の補題という定理から簡単に証明できる。Morse の補題については、例えば服部晶夫、「いろいろな幾何 II」、岩波書店 (1993) の命題 3.1 や横田一郎、「多様体とモース理論」、現代数学社 (1991) を参照するとよい。

13.1 はじめに: Lagrange の未定乗数法の使い方の復習

楕円面

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

上での、関数 $f(x,y,z)=x+y+z$ の最大値と最小値を求めよ。

このような問題は「よくある問題」で、理工系の多くの学科の学生、経済学部の一部の学生が遭遇する。彼らは次のような答案を書く。

すごい？ いや、実は論理の無い “解答”

$g(x,y,z):=x^2/1+y^2/4+z^2/9-1$, $F(x,y,z,\lambda):=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$ とおく。“極値の条件” は

$$F_x=F_y=F_z=F_\lambda=0.$$

つまり

$$1-\lambda\frac{2x}{1}=0,\quad 1-\lambda\frac{2y}{4}=0,\quad 1-\lambda\frac{2z}{9}=0,\quad \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-1=0.$$

これを解くと、

$$(x,y,z,\lambda)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{4}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}},\frac{\sqrt{14}}{2}\right).$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{9}{\sqrt{14}}\right)=\sqrt{14},\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},-\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{9}{\sqrt{14}}\right)=-\sqrt{14}.$$

ゆえに最大値は $\sqrt{14}$, 最小値は $-\sqrt{14}$ である。(図形的には、空間内の平面 $x+y+z=k$ が楕円面と交わりを持つための条件は $-\sqrt{14}\le k\le\sqrt{14}$ で、$k=\pm\sqrt{14}$ が接するための必要十分条件である。) ■

最初の 3 つ $F_x=F_y=F_z=0$ は、$\nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)$ とも書ける。$F_\lambda=0$ は $g(x,y,z)=0$ ということである。つまり “極値の条件” は

$$(\exists\lambda\in\mathbb{R})\quad \nabla f(x,y,z)=\lambda\nabla g(x,y,z)=0 \quad かつ \quad g(x,y,z)=0$$

とも表せる。

上の議論の根拠となるのは、次の定理である。

定理 13.1 (条件つき極値問題に対する Lagrange の未定乗数法, Lagrange (1788 年)) Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、f と g を Ω で定義され $\mathbb{R}$ に値を持つ C^1 級の関数として、

$$N_g := \{x \in \Omega \mid g(x) = 0\}$$

とおいたとき

$$\nabla g \neq 0 \quad \text{on } N_g$$

が成り立つとする。条件 $g(x) = 0$ の下で、f は $a \in N_g$ で極大値または極小値を取るならば、

$$(\exists \lambda \in \mathbb{R}) \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

(条件 $g(x) = 0$ の下で f が a で極大値を取るとは、

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad f(a) = \max_{x \in N_g \cap B(a;\varepsilon)} f(x)$$

が成り立つことと定義する。また極小値も同様に定義する。)

この定理をどうやって使ったのだろう？と慎重に考えてみると…上の「答案」は実はツッコミどころ満載である。

(a) 最大値と最小値が存在するのはなぜか。

(b) 定理を使うわけだけど、極値は存在するという仮定は満たされるのか。

(c) 定理の仮定 $\nabla g \neq 0$ はチェックしなくて良いのか。

(d) 計算で求まったのは本当に極値なのか。それが最大値と最小値に等しいのはなぜか。

N_g は $\mathbb{R}^2$ の有界集合であり ($(x^2+y^2+z^2)/9 \le x^2/1+y^2/4+z^2/9 = 1$ より $x^2+y^2+z^2 \le 9$. すなわち $|(x,y,z)| \le 3$)、(g が連続であることから) $\mathbb{R}^2$ の閉集合でもある。f は連続であるから、Weierstrass の最大値定理により、N_g での f の最大値と最小値が存在する。(a) はクリア。

N_g における最大値 (最小値) は、条件 $g(x) = 0$ の下での極大値 (極小値) であるのは明らかであるから[56]、(b) もクリア。

(c) の $\nabla g \neq 0$ はチェックする必要がある。やってみよう。

$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{1} = \frac{2y}{4} = \frac{2z}{9} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (0,0,0).$$

$g(0,0,0) = -1 \neq 0$ であるから、$(0,0,0) \notin N_g$. ゆえに N_g 上では $\nabla g \neq 0$. これで (c) クリア。

上の定理から、最大値、最小値を与える a は (対応する λ と合わせて) は $\nabla f(x,y,z) = 0$ かつ $g(x,y,z) = 0$ を満たす。その方程式の解が 2 つしかなかったから、大きい値が最大値、小さい値が最小値である。

以上で、上の問題が完璧に解けたことになる。

たとえ話: ある殺人事件の犯人を捕まえたい。まずそれが本当に殺人事件であることを確認する (事故や自殺で亡くなったのではない)。そうでないと、そもそも犯人がいないかもしれない (無実の人を生んでしまうかも)。犯人がもし存在するならば、必ずある不審者条件を満たしていることが分かっている。不審者条件を満たしている人はある方法でもれなくピックアップ

[56] $f(a)$ が N_g における f の最大値であるとは、$f(a) = \max_{x \in N_g} f(x)$ が成り立つということ。そのとき、$\varepsilon = 1$ とすれば、明らかに $f(a) = \max_{x \in N_g \cap B(a;\varepsilon)} f(x)$ が成り立つ。

出来る。実際にそれを実行したら該当者が 2 人だけ存在した。簡単な方法でそのうち一人は犯人でないことが分かったら、残った一人が犯人である。

上の枠内の答案のやり方は、もしかすると無実の人を生むかもしれない杜撰な捜査方法である。

時間がおしているので、脱線はほどほどに。

このようにかなりこみ入った論理が必要になる理由は、問題が多変数関数であるため、1 変数のときのような増減表が使えないから、ということも出来る。増減表はとても良く出来たツールで、表を完成させれば、ほぼ完全な捜査が出来たことになる。

参考文献

[1] 新井紀子：数学は言葉 — math stories, 東京図書 (2009), 数理論理の専門家によって比較的最近書かれた本であり、 とても参考になる。

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980).

[3] 田島一郎：解析入門, 岩波書店 (1981).

[4] 中根美千代：ε-δ 論法とその形成, 共立出版 (2010).

[5] 黒田成俊：微分積分, 共立出版 (2002).

[6] 赤攝也：実数論講義, 日本評論社 (2014), 元々は SEG 出版から 1996 年に出版された。

[7] 高木貞治：数の概念, 岩波書店 (1949), 足立恒雄「高木貞治の数の基礎に関する三部作」(http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1677-15.pdf) に詳しい解説がある。

[8] 彌永昌吉：数の体系 上, 岩波書店 (1972).

[9] 彌永昌吉：数の体系 下, 岩波書店 (1978).

[10] 高木貞治：解析概論 改訂第 3 版, 岩波書店 (1961).

[11] リヒャルト・デデキント：数とは何かそして何であるべきか, 筑摩書房 (2013), 渕野昌翻訳, 有名な Was sind und was sollen die Zahlen? (1888 年) の翻訳と解説.

[12] 高橋陽一郎：実関数とフーリエ解析, 岩波書店 (2006), 「実関数と Fourier 解析 1, 2, 岩波講座 現代数学の基礎 (2000)」の 単行本化.

[13] Ahlfors, K.: *Complex Analysis*, McGraw Hill (1953), 笠原 乾吉 訳, 複素解析, 現代数学社 (1982).

[14] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート (2013 年度版), http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-new-text.pdf (2013).

[15] 桂田祐史：多変数の微分積分学 1 講義ノート, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu1-2013/tahensuu1-2011.pdf (2011).

[16] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 1 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p1.pdf (2008).

[17] M. スピヴァック：スピヴァック多変数の解析学 — 古典理論への現代的アプローチ, 東京図書 (2007), 齋藤正彦訳. 1972 年に出版されたものをお色直しして復刊.

索 引

A　問の解答

間違いをしないように、また出来る限り分かりやすくするように努めているつもりである。(でも限られた時間で作業しているので、時々見返すと「あっ！」ということはまだまだ残っている。) おかしなところを発見したら報告して下さい。また、分かりにくいと感じた場合は遠慮無く質問して下さい。

解答 1. $U=2$ とおくと、$U\in\mathbb{R}$ であり、任意の $x\in A$ に対して、($1\le x<2$ であるから) $x\le U$ が成り立つ。■

解答 2. U が A の上界であるとは、

$$(\forall x\in A)\quad x\le U$$

ということであるから、その否定は

$$(\exists x\in A)\quad x>U.\blacksquare$$

解答 3. A が上に有界であるとは、

$$(\exists U\in\mathbb{R})(\forall x\in A)\quad x\le U$$

ということであるから、その否定は

$$(\forall U\in\mathbb{R})(\exists x\in A)\quad x>U.\blacksquare$$

解答 4. U を任意の実数とする。$x:=U+1$ とおくと、$x\in\mathbb{R}=A$ かつ $x>U$. ゆえに

$$(\forall U\in\mathbb{R})(\exists x\in A)\quad x>U$$

が成り立つ。ゆえに A は上に有界ではない。(独白: $A=\mathbb{N}$ の場合も $x=\max\{[U]+1,1\}$ ($[\ ]$ はガウスの括弧[57]) とすれば良いが、今の段階で $[U]$ を使うのは厳密に言うと (実は) ルール違反であるので、ここでは $A=\mathbb{R}$ という問題にしておく。■

解答 5. (こうして出題すると、問のすぐ上に答が書いてあるので、人を馬鹿にしているような問題になってしまうけれど、こういう問 (◯◯の定義を書け) に答えられることは大事です。用語・記号の定義を学ぶごとに、白い紙を前にして、自問自答することを勧めます。)

(1) $A\subset\mathbb{R}$, $U\in\mathbb{R}$ とする。U が A の上界であるとは、$(\forall x\in A)$ $x\le U$ が成り立つことをいう。

(2) $A\subset\mathbb{R}$ とする。A が上に有界であるとは、A の上界が存在することをいう。((1) の答と独立にするならば、「A が上に有界であるとは、$(\exists U\in\mathbb{R})$ $(\forall x\in A)$ $x\le U$ が成り立つことをいう。」)

(3) $A\subset\mathbb{R}$, $S\in\mathbb{R}$ とする。S が A の上限であるとは、以下の (i), (ii) が成り立つことをいう。

　(i) $(\forall x\in A)\quad x\le S.$

　(ii) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists x\in A)\quad x>S-\varepsilon.$

[57] $[x]\overset{\text{def.}}{=}\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\}$. x の小数部分を切り捨てて整数にしたもの。$-\infty$ に向かっての丸め。$[12.3]=12$, $[-12.3]=-13$. C 言語ならば `floor()` で計算できる (floor = 床)。

解答 6. 上限の定義の条件 (i) を見てみよう。S が A の上限であるためには、S は A の上界である必要がある。■

解答 7. ($\because$ $\Rightarrow$ は、Weierstrass の上限公理そのものである。$\Leftarrow$ 上限は上界である (問6) から、上限が存在すれば上に有界である。 ■

解答 8. $A\subset\mathbb{R}$ であり、$S_1,S_2\in\mathbb{R}$ は A の上限とするとき、$S_1=S_2$ であることを示す。
ε を任意の正の数とする。S_1 は A の上限であるから、$S_1-\varepsilon<x$ を満たす $x\in A$ が存在する。S_2 は A の上限であるから、$x\le S_2$. ゆえに $S_1-\varepsilon<S_2$. したがって $S_1-S_2<\varepsilon$. 一般に「実数 x が任意の正の数よりも小さいならば、$x=0$」が成り立つので、$S_1-S_2\le$. ゆえに $S_1\le S_2$.
S_1 と S_2 の役割を入れ替えると $S_2\le S_1$ も示せる。ゆえに $S_1=S_2$. ■

解答 9. $S=2$ とおく。

(i) 任意の $x\in A$ に対して、$1<x<2=S$ であるから、特に $x\le S$.

(ii) ε を任意の正数とする。

$\varepsilon<1$ のとき、$-1<-\varepsilon<0$ であるから、$1<2-\varepsilon<2$. $x:=\frac{2+(2-\varepsilon)}{2}=2-\varepsilon/2$ とおくと、$1<2-\varepsilon<x<2$ であるから、特に $x\in A$, $x>S-\varepsilon$.

$\varepsilon\ge 1$ のとき、$2-\varepsilon<1$ であるから、$x=\dfrac{3}{2}$ とおくと、$x\in A$, $x>1>2-\varepsilon=S-\varepsilon$. 特に $x>S-\varepsilon$.

いずれの場合も $(\exists x\in A)\ x>S-\varepsilon$ が成り立つ。

以上より S は A の上限である。 ■

解答 10. U を任意の実数とする。空集合 $\emptyset$ は一つも要素を持たないので、$(\forall x\in\emptyset)\ x\le U$ は真である。ゆえに U は $\emptyset$ の上界である。 (証明終) (念のため: $(\forall x\in\emptyset)\ x\le U$ は、$(\forall x)$ $[x\in\emptyset\Rightarrow x\le U]$ と書き換えられる。任意の x に対して、$x\in\emptyset$ は偽であるから、$[x\in\emptyset \Rightarrow x\le U]$ は真である。) ■

解答 11. これも定義を写すだけだけど、この文書に書いてある定義は、分かりやすくする目的でしばしば冗長になっている (同じことを表現を換えて繰り返し書いている)。問題の答としては冗長に書く必要はない。

$$\sup A:=\begin{cases} A\text{ の上限} & (A\text{ が上に有界であるとき})\\ \infty & (A\text{ が上に有界でないとき}).\end{cases}\quad ■$$

解答 12. (略解) $A:=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2<2\}$ とおく。(脱線: 実数や $\sqrt{2}$ を知っていれば、$A=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right\}$ である。) $A\subset\mathbb{R}$ と見なすと $\sup A=\sqrt{2}$ であるが、$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ であるので、$\mathbb{Q}$ だけで考えたとき、A は上限を持たない。 ■

解答 13.

(1) (i) $(\forall x\in A)\ x\le S$.

(ii) $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists x\in A)\ x>S-\varepsilon$.

((3) で使うことを考えると、x の代わりに y という文字を使って書いた方が分かりやすいかも。そうすると、

(i′) $(\forall y \in A)\ y \le S$.

(ii′) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in A)\ y > S - \varepsilon$.

となる。)

(2) (a) $(\forall x \in -A)\ x \ge I$.

(b) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists x \in -A)\ x < I + \varepsilon$.

(3) S が A の上限であるとすると、(i′), (ii′) が成り立つ。$I := -S$ とおく。このとき (a), (b) が成り立つことを示す。

(a) x を $-A$ の任意の元とすると、$(\exists y \in A)\ x = -y$. (i′) より $y \le S$. ゆえに $x = -y \ge -S = I$.

(b) ε を任意の正数とする。(ii′) より $(\exists y \in A)\ y > S - \varepsilon$. このとき $x = -y$ とおくと、$x \in -A$ かつ $x = -y < -S + \varepsilon = I + \varepsilon$. これは (b) が成り立つことを示している。

ゆえに $I = -S$ は $-A$ の下限である。 ■

解答 14. (略解、と書くことにする — 「なぜでしょう」を連発したら、ツィートされてしまったので) $A \subset \mathbb{R}$, $A \ne \emptyset$, A は下に有界とする。このとき $A' := \{-x \mid x \in A\}$ とおくと、$A' \subset \mathbb{R}$, $A' \ne \emptyset$ で (なぜでしょう？)、A' は上に有界である (なぜでしょう？)。従って Weierstrass の公理により、A' は上限を持つ。それを S と書くことにする。実は $-S$ は A の下限になる (なぜでしょう？)。 ■

解答 15. U を任意の正の数とする。アルキメデスの公理によって ($a = 1$, $b = U$ として)、ある自然数 n が存在して

$$n \cdot 1 > U$$

が成り立つ。ゆえに $n > U$. ■

解答 16. まず、例 1.16 を前提として解答してみる。一般に「最大値は上限である」から、Z の最大値が存在すれば、それは Z の上限である 0 に等しいはずである。ところが $0 \notin Z$. Z の最大値は (最大値の定義によって) Z に含まれる必要があるので、これは矛盾である。ゆえに Z の最大値は存在しない。(証明終) 次に直接的な解答。Z の最大値 M が存在したとする。$M \in Z$ であるから、$(\exists n \in \mathbb{N})\ M = -\frac{1}{n}$. このとき、$n' := n + 1$ とおくと、$n' \in \mathbb{N}$ であるから、$-\frac{1}{n'} \in Z$. ところが $0 < n < n'$ より $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n'}$. ゆえに $M = -\dfrac{1}{n} < -\dfrac{1}{n'} \in Z$. これは M が最大値であることに矛盾する。 (より大きい $-\dfrac{1}{n'}$ が Z の要素である。) ■

解答 17.

(1) この命題は偽である。反例: $a = -1, b = 1$ とすると、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$na = -n < 0$ かつ $b > 0$ であるから、$na < b$. すなわち $(\exists n \in \mathbb{N})\ na > b$ は成り立たない。

(2) この命題は真である。ただし、次のように Weierstrass の上限公理なしで証明できる。任意の正の数 a, b に対して、$n := \frac{b}{a} + 1$ とおくと、$n \in \mathbb{N}$ であり、$na = \left(\frac{b}{a} + 1\right) a = b + a > b$ であるから $na > b$.

(3) この命題は真である。$n = \frac{b}{a} + 1$ とおくと、$n \in \mathbb{R}$ かつ $na = b + a > b$ であるから $na > b$.■

解答 18.

(a) $|A| \le B$ とする。$B \ge 0$ であることはすぐ分かる。$|A| \le B$ であることから、$A \ge 0$ であれば $A \le B$, $A < 0$ であれば $-A \le B$. $A \ge 0$ である場合、$-B \le 0 \le A \le B$. $A < 0$ である場合、$-B \le A < 0 \le B$. いずれの場合も $-B \le A \le B$.

逆に $-B \le A \le B$ とする。$B \ge 0$ であることはすぐ分かる。$A > 0$ であれば $|A| = A \le B$. $A < 0$ であれば ($-B \le A$ の両辺を -1 倍した不等式を用いて) $|A| = -A \le -(-B) = B$. いずれの場合も $|A| \le B$.

(b) $-|x| \le x \le |x|$, $-|y| \le y \le |y|$ であるから、$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$. ゆえに (a) から $|x + y| \le |x| + |y|$. ■

解答 19.

$$\inf X = \min X = 1, \quad \inf Y = 0, \quad \inf Z = \min Z = -1, \quad \inf W = \min W = 1.$$

なお Y の最小値は存在しない。■

解答 20. $(\forall x \in E)\ 0 \le x \le 1$ が成り立つので，E は上にも下にも有界である。

$(\forall x \in F)\ 1 \le x$ が成り立つので、F は下に有界である。一方 F は上に有界でない。実際 U を任意の実数とするとき、アルキメデスの原理より $(\exists n \in \mathbb{N})\ n > |U| \ge U$. $n \ge 1$ であるから、$n^2 \ge n$. ゆえに $n^2 \ge U$. $n^2 \in F$ であるから、F は上に有界ではない。

G は上にも下にも有界ではない。

G が上に有界でないことを示す。任意の実数 U に対して、アルキメデスの原理より $(\exists N \in \mathbb{N})$ $N > |U| \ge U$. N が偶数ならば $n := N$, $x := (-1)^n n$ とおくと、$x \in G$, $x = n = N > U$. N が奇数ならば、$n := N + 1$, $x := (-1)^n n$ とおくと、$x \in G$, $x = n = N + 1 > N > U$. ゆえに $(\exists x \in G)\ x > U$ が成り立つので、G は上に有界ではない。

G が下に有界でないことも同様に証明できる。

$-n(1 + (-1)^n)$ は、n が偶数ならば $-2n$, n が奇数ならば 0 に等しい。$\max H = 0$ であるから、H は上に有界である。一方 H は下には有界でない。任意の実数 L に対して、アルキメデスの原理により、$(\exists N \in \mathbb{N})\ N > |L| \ge -L$. N が偶数ならば $n := N$, N が奇数ならば $n := N + 1$ とおくと、n は偶数で、$n \ge N$. ゆえに $x := -n(1 + (-1)^n)$ とおくと、$x \in H$ かつ $x = -2n \le -2N \le -N \le L$. ■

解答 21. (ヒント) 簡単に出来るものは簡単にしてから (例えば $A_{10} = (-\pi/2, \pi/2)$)、図が描ければ図を描いて、どういう集合か把握し、上に有界ならば上限を求め、それを sup とする。上に有界でないならば (上限は存在せず) $\sup = \infty$ である。inf についても同様。

$\sup A_1 = 1$, $\inf A_1 = 0$, $\sup A_2 = \infty$, $\inf A_2 = 1$, $\sup A_3 = \infty$, $\inf A_3 = -\infty$, $\sup A_4 = 1$, $\inf A_4 = 0$, $\sup A_5 = \infty$, $\inf A_5 = 1$, $\sup A_6 = \dfrac{1}{2}$, $\inf A_6 = -1$, $\sup A_7 = \sqrt{2}$, $\inf A_7 = -\sqrt{2}$, $\sup A_8 = \sin 1$, $\inf A_8 = 0$, $\sup A_9 = 3$, $\inf A_9 = 0$, $\sup A_{10} = \dfrac{\pi}{2}$, $\inf A_{10} = -\dfrac{\pi}{2}$. ■

(おまけ) $\sup A_9 = 3$ の証明　$A_9 = (0,1) \cup (2,3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \lor 2 < x < 3\}$ である。

(i) $x \in A_9$ とすると、$0 < x < 1 \lor 2 < x < 3$. 前者なら $x < 1 < 3$ より $x \le 3$. 後者の場合も $x \le 3$. ゆえに

$$(\forall x \in A_9) \quad x \le 3$$

が成り立つ。

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

- $\varepsilon < 1$ ならば $x := \frac{3+(3-\varepsilon)}{2} = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ とおくと、$\dfrac{5}{2} < x < 3$ であるから、$x \in A_9$. 一方 $3 - \varepsilon < x$.
- $\varepsilon \geq 1$ ならば $3 - \varepsilon \leq 2$ であるから、$x = \dfrac{5}{2}$ とおくと、$x \in A_9$ かつ $3 - \varepsilon < x$.

ゆえに $(\exists x \in A_9) \quad 3 - \varepsilon < x$ が成り立つ。

(i), (ii) より $\sup A_9 = 3$. ■

解答 22. 背理法を用いる。$A \neq 0$ と仮定する。$\varepsilon := |A|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ である。仮定 (♠) より $|A| < \varepsilon$. これは矛盾である。ゆえに $A = 0$. ■

解答 23. $\{a_n\}$ が a に収束するとは、$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)$ $|a_n - a| < \varepsilon$ ということであるからその否定は

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N) \ \ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

$\{a_n\}$ が収束するとは、$(\exists a \in \mathbb{R})$ $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)$ $|a_n - a| < \varepsilon$ ということであるからその否定は

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N) \ \ |a_n - a| \geq \varepsilon. \blacksquare$$

解答 24.

(1) 任意の正数 ε に対して、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $N\varepsilon > 1$. このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$n^2 \geq n \geq N$ であるから、

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(2) 任意の正数 ε に対して、$\varepsilon^2 > 0$ であるから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $N\varepsilon^2 > 1$. ゆえに $\sqrt{N}\varepsilon > 1$. このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. ■

解答 25. $b := \dfrac{1}{a}$ とおくと、$b > 1$ であるから、$h := b - 1$ とおくと $h > 0$. 二項定理より $b^n = (1+h)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh + \cdots$ であるから、$n \geq 1$ であれば $b^n \geq nh$. ゆえに $0 < a^n = \left(\dfrac{1}{b}\right)^n \leq \frac{1}{nh}$. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{nh} = 0$ であるから、挟み撃ちの原理によって $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a^n = 0$. ■

解答 26. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ と仮定する。任意の正数 ε に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つ。$k \in \mathbb{N}$ より $n + k > n \geq N$ であるから、

$$|a_{n+k} - a| < \varepsilon.$$

以上から $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = a$. ■

解答 27. 要点は $||a_n - a| - 0| = |a_n - a|$ ということである。真面目に書くと

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0 &\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad ||a_n - a| - 0| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - a| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a. \blacksquare
\end{aligned}$$

解答 28. まず (i) から任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq 0$ であるから、$|b_n| = b_n$ が成り立つ。

任意の正数 ε に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 N に対して、

$$|b_n - 0| < \varepsilon.$$

ゆえに $b_n = |b_n| < \varepsilon$. ゆえに

$$|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であることを示している。 ■

解答 29.

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 2n + 1} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

例 2.7 と、命題 2.8 (3) から、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

命題 2.8 (2) から、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right) = 2 \cdot 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(3 \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 3 \cdot 0 = 0.$$

命題 2.8 (1) と帰納法から、$1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2} \to 1 + 0 + 0 = 1$, $3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} \to 3 + 0 + 0 = 3$. 命題 2.8 (4) から、$\dfrac{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}}{3 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} \to \dfrac{1}{3}$. ■

解答 30. $a \neq 0$ であるから、$\varepsilon := \dfrac{|a|}{2}$ とおくと、$\varepsilon > 0$ である。$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ であることから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)$ $|a_n - a| < \varepsilon$. このとき、

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2} > 0.$$

ゆえに $a_n \neq 0$. ■

解答 31. (色々な本に書いてある、とサボってきたけれど、書くことにした。。) 一般に

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - a b_n}{b_b b} = \frac{a_n b - ab + ab - ab_n}{b_n b} = \frac{a_n - a}{b_n} + \frac{a(b - b_n)}{b_n b}$$

が成り立つ。

ある実数 M が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(*) \qquad \frac{1}{|b_n|} \leq M, \quad \frac{|a|}{|b_n b|} \leq M$$

が成り立つことを示そう。まず $b_n \to b$ $(n \to \infty)$ であるから、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

このとき $-\dfrac{2}{|b|} < b_n - b < \dfrac{2}{|b|}$. $b > 0$ の場合は、

$$b_n > b - \frac{2}{|b|} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(> 0) \quad より \quad 0 < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}.$$

$b < 0$ の場合は、

$$b_n < n + \frac{2}{|b|} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}(< 0) \quad より \quad 0 < -\frac{1}{b_n} < -\frac{2}{b}.$$

いずれの場合も $\left|\dfrac{1}{b_n}\right| < \dfrac{2}{|b|}$. ゆえに $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ は有界である。(念のため: $U := \max\left\{\dfrac{1}{|b_1|}, \dots, \dfrac{1}{|b_{N-1}|}, \dfrac{2}{|b|}\right\}$ とおくと、$\left|\dfrac{1}{b_n}\right| \leq U$.)

したがって、$(*)$ を満たす M が存在する。

$n \to \infty$ のとき、$a_n \to a$ であるから、ある自然数 N_1 が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1)\, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

$n \to \infty$ のとき、$b_n \to a$ であるから、ある自然数 N_2 が存在して、

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2)\, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

$N := \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ を満たす任意の n に対して、

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n - a}{b_n} + \frac{a(b - b_n)}{b_n b}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \left|\frac{a}{b_n b}\right| |b - b_n| \leq M\,|a_n - a| + M\,|b_n - b| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

これは $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ であることを示している。■

解答 32. $|a| = |a-b+b| \le |a-b|+|b|$ より $|a|-|b| \le |a-b|$, a と b を入れ換えて $|b|-|a| \le |a-b|$ となるので、$-|a-b| \ge |a|-|b|$. ゆえに $||a|-|b|| \le |a-b|$.

ε を任意の正数とすると、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるから、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N)$ $|a_n - a| < \varepsilon$. このとき

$$||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. ■

解答 33. 背理法を用いる。$A \le B$ でないと仮定すると、$A > B$. ゆえに $A-B > 0$. $\varepsilon := A-B$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であるから $A < B+\varepsilon$. 移項して $A-B < \varepsilon$. ゆえに $\varepsilon < \varepsilon$. これは矛盾である。ゆえに $A \le B$. ■

解答 34. (数直線上に状況を図示してみれば、以下でやっていることは簡単である。) ε を任意の正数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = A$ より

$$(\exists N_1 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} n \ge N_1)\, |a_n - A| < \varepsilon.$$

このような n に対して、$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ より、特に $A - \varepsilon < a_n$ が成り立つ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = A$ より

$$(\exists N_2 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} n \ge N_2)\, |c_n - A| < \varepsilon.$$

このような n に対して、$-\varepsilon < c_n - A < \varepsilon$ より、特に $c_n < A + \varepsilon$ が成り立つ[58]。

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$N \in \mathbb{N}$ であり、$n \ge N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A-\varepsilon < a_n$ かつ $c_n < A+\varepsilon$ が成り立つ[59]。仮定より $a_n \le b_n \le c_n$ であるから、$A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon$. すなわち $|b_n - A| < \varepsilon$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = A$. ■

解答 35. $a_n := -\dfrac{1}{n}$, $b_n := \dfrac{1}{n}$ とおくと、$a_n \le \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le b_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるので、挟み撃ちの原理から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} = 0$ (収束して右辺に等しい)。 ■

解答 36.

(1) $r = 0$ のときは明らかであるから、以下では $r > 0$ とする。$\dfrac{1}{r} > 1$ であるから、$a := \frac{1}{r} - 1$ とおくと、$a > 0$ かつ $\frac{1}{r} = 1 + a$. ゆえに任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\frac{1}{r^n} = (1+a)^n = 1 + na + \cdots \ge na.$$

ゆえに

$$0 \le r^n \le \frac{1}{na}.$$

$n \to \infty$ のとき、左辺と右辺はともに 0 に収束するので、はさみ撃ちの原理から、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

(2) 前問とほぼ同じである。$n \ge 2k$ とするとき、$n - k = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - k = \frac{n}{2} + \frac{n-2k}{2} \ge \frac{n}{2}$ であるから、

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}a^k + \cdots \ge \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}a^k$$
$$\ge \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!}a^k = \frac{a^k}{2^{k+1}(k+1)!}n^{k+1}.$$

---

[58] 左側の不等式の両辺に A を加える。
[59] 右側の不等式の両辺に A を加える。

ゆえに

$$0 \leq n^k r^n \leq n^k \frac{2^{k+1}(k+1)!}{a^k n^{k+1}} \leq \frac{2^{k+1}(k+1)!}{a^k} \cdot \frac{1}{n}.$$

$n \to \infty$ のとき、左辺と右辺はともに 0 に収束するので、はさみ撃ちの原理から、$\lim_{n\to\infty} n^k r^n = 0$. ■

解答 37. 任意の自然数 n に対して、a_n の定め方から、$a_n^2 \leq 3 < \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$. $n \to \infty$ とすると $x^2 \leq 3 \leq x^2$. ゆえに $x^2 = 3$. ■

解答 38.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \leq \frac{1}{1-1/2} = 2$$

であるから、$a_n := \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ は、

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + 2 = 3,$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n!} > 0 \quad より \quad a_n < a_{n+1}$$

を満たす。ゆえに $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから収束する。■

解答 39. 誘導に従えば、前問とほとんど同じなので、省略する。■

解答 40. まず $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ である。a_{n+1} は a_n と $2/a_n$ の平均であるから、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}.$$

$a_1 = 2 > \sqrt{2}$ であるから、$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq \sqrt{2}$ である。ゆえに

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{2-a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

であるから、$\{a_n\}$ は単調減少数列である。

一方、$a_n \geq \sqrt{2}$ であるから (あるいは $a_n \geq 0$ であるから)、$\{a_n\}$ は下に有界である。

一般に「下に有界な単調減少数列は収束する」が成り立つので、$\{a_n\}$ は収束する。その極限を a とおく。漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ で、$n \to \infty$ とすると、

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right).$$

これから $a^2 = 2$. $a_n \geq \sqrt{2}$ であるから $a \geq \sqrt{2}$. ゆえに $a = \sqrt{2}$. すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. ■

(以下余談) $y = x$ と $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ のグラフを描いて、$\{a_n\}$ の定め方を図形的に解釈することが出来る (詳しいことは省略、各自の演習とする)。

また上では最初から $\sqrt{2}$ という数を持ち出したが、もし有理数の範囲だけで議論したければ、まず $a_n^2 > 2$ を帰納法で証明し ($\because a_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 4 + \frac{4}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 \geq 0$)、それから $\{a_n\}$ が単調減少であることを証明する。

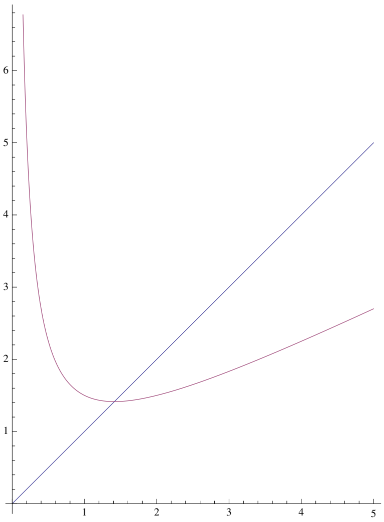


図 13: $y = x$, $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ のグラフ

この漸化式は、$f(x) = x^2 - 2$ に対して、Newton 法 $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ を適用して得られたもので ある。

$f(x) = x^2 - d$ に替えると、$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{d}{a_n}\right)$ という漸化式が得られ、これで定義した数列 $\{a_n\}$ について、$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{d}$ が成り立つ。

四則演算のみで $a_1, a_2, \cdots$ が計算出来るので、例えば、$\boxed{\sqrt{\ }}$ キーのない電卓で、$\sqrt{d}$ の近似値を求めるために利用できる。

$\{a_n\}$ の $\sqrt{d}$ への収束はかなり速く、$d = 2$ の場合、

$$\left|a_4 - \sqrt{2}\right| = 2.12\cdots\times 10^{-6}, \quad \left|a_5 - \sqrt{2}\right| = 1.59\cdots\times 10^{-12}, \quad \left|a_6 - \sqrt{2}\right| = 8.99\cdots\times 10^{-25}, \cdots$$

となり、既に a_5 で 10 桁以上の精度がある。(余談終)

解答 41.

(1) まず $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > b_n > 0$ が成り立つことを示す。仮定 $a > b > 0$ から $a_1 > b_1 > 0$ が得られるので、$n = 1$ のとき成り立つ。$n = k$ のとき成り立つと仮定すると、

$$a_{k+1} - b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} - \sqrt{a_k b_k} = \frac{\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{b_k}\right)^2}{2} > 0.$$

ゆえに $n = k + 1$ のときも成り立つ。数学的帰納法によって、任意の自然数 n に対して $a_n > b_n > 0$.

このことを用いると

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0,$$
$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) > 0$$

であるから、$\{a_n\}$ は単調減少、$\{b_n\}$ は単調増加である。

(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_1 \geq a_n > b_n \geq b_1$ であるから、$\{a_n\}$ は下に有界 ($\because b_1$ が下界)、$\{b_n\}$ は上に有界 ($\because a_1$ が上界) である。

そのことと (1) の結果から、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は収束する: $(\exists a, b \in \mathbb{R})\ \lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$.

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ において、$n \to \infty$ とすると、$a = \dfrac{a + b}{2}$ が導かれる。ゆえに $a = b$. ■

解答 42. $n \in \mathbb{N}$ に対して、n 項までの部分和を s_n とすると (つまり、$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$)、

$$\begin{aligned} &s_1 \geq s_3 \geq s_5 \geq \cdots \geq s_{2k-1} \geq s_{2k+1} \geq \cdots, \quad s_{2k-1} \geq s_2, \\ &s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2k} \leq s_{2k+2} \leq \cdots, \quad s_{2k} \leq s_1 \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち $b_n := s_{2n-1}$, $c_n := s_{2n}$ としたとき、$\{b_n\}$ は単調減少して s_2 を下界に持ち、$\{c_n\}$ は単調増加して s_1 を上界に持つ (これらのことのチェックは自分でやってみよう)。ゆえに $\{b_n\}$ も $\{c_n\}$ も極限を持つ。それらをそれぞれ b, c とおくと、

$$c - b = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} \left(-(-1)^{2n-1} a_{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0.$$

ゆえに $b = c$. これを s とおくと、$\{b_n\} = \{s_{2n-1}\}$ も $\{c_n\} = \{s_{2n}\}$ も s に収束するので、$\{s_n\}$ は s に収束する。 ■

解答 43. (略解) 例えば

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k, \quad a_k = \frac{4}{2k-1}.$$

これは前問の条件を満たしているので収束する。

あるいは **Basel 問題**の答である

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

この左辺の級数が収束することは、

$$\frac{1}{n^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^2}, \quad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{n} < 1$$

に注意すれば、定理 2.18 を使って証明できる。■

解答 44. $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく。U を任意の実数とする。$a = 1$, $b = |U| + 1$ とおくと、$a > 0$, $b > 0$. アルキメデスの公理から、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $Na > b$. すなわち $N > |U| + 1$. このとき、$(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N)$

$$a_n = n \geq N > |U| + 1 \geq U.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示している。 ■

解答 45. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を単調増加数列とする。$\{a_n\}$ が上に有界ならば、定理 2.18 によって、$\{a_n\}$ は極限を持つ。$\{a_n\}$ が上に有界でないならば、任意の実数 U に対して、$(\exists N \in \mathbb{N})$ $a_n > U$. 単調増加であることから、$n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \geq a_N > U$. ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. ■

解答 46. $\mathbb{R} \setminus \{(n + 1/2)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$. ■

解答 47. 「$\delta = \boxed{\varepsilon}$ とおくと」　　「$|x - a| < \boxed{\delta =} \varepsilon$.」 ■

解答 48. a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して、$\delta := \varepsilon$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の実数 x に対して、

$$|f(x)-f(a)| = \big||x|-|a|\big| \le |x-a| < \delta = \varepsilon.$$

ゆえに $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. ゆえに f は a で連続である。a は任意であるから、f は $\mathbb{R}$ で連続である。■

解答 49.

(1) ε を任意の正数とする。$\delta = \varepsilon/2$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(x)-f(0)| = |2x - 2\cdot 0| = 2|x-0| < 2\delta = \varepsilon.$$

すなわち $|f(x)-f(0)| < \varepsilon$. ゆえに f は 0 で連続である。

(2) a を $\mathbb{R}$ の任意の要素とする。ε を任意の正数とするとき、$\delta = \varepsilon/2$ とおくと、$\delta > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、

$$|f(x)-f(a)| = |2x-2a| = 2|x-a| < 2\delta = \varepsilon.$$

すなわち $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. ゆえに f は a で連続である。■

解答 50. a を $\mathbb{R}$ の任意の要素とする。ε を任意の正数とするとき、$\delta := \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}, 1\right\}$ とおくと、$0 < \delta \le 1$ である。$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|x+a| = |x-a+2a| \le |x-a| + 2|a| \le \delta + 2|a| \le 1 + 2|a|$$

であるから、

$$|f(x)-f(a)| = \left|x^2-a^2\right| = |x+a||x-a| < (1+2|a|)\cdot\delta \le (1+2|a|)\cdot\frac{\varepsilon}{2|a|+1} = \varepsilon.$$

ゆえに f は a で連続である。ゆえに f は $\mathbb{R}$ で連続である。■

(別解) a を $\mathbb{R}$ の任意の要素とする。ε を任意の正数とするとき、$\delta := -|a| + \sqrt{a^2+\varepsilon}$ とおくと、$\delta > -|a| + \sqrt{a^2+0} = -|a| + |a| = 0$ より $\delta > 0$. $|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|f(x)-f(a)| = \left|x^2-a^2\right| = |x+a||x-a| < (\delta+2|a|)\cdot\delta = \delta^2 + 2|a|\delta = \varepsilon.$$

ゆえに f は a で連続である。ゆえに f は $\mathbb{R}$ で連続である。■

初めて学ぶとき、この問題を自力できちんと解くのはかなり大変だと思う。こういうのはむしろ一般化した方がすっきりする。一般的な命題である系 3.10 の証明より、具体的な $f(x) = x^2$ の連続性の証明の方がずっと簡単、ということはない。(余談になるが、最近書店で手にした演習書で、このような具体的な関数の連続性を ε-δ 論法で証明させる問題がたくさん載っている本を目にしたが (百マス計算 ??)、ちょっとズレていると思った。$f(x) = x^2$ 位で、「案外面倒ですね」と感じてもらって、一般論のありがたみを理解してもらうのが良いと考える。) ■

解答 51. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ であるから、ある $\delta_1 > 0$ が存在して、$|x-a| < \delta_1$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - A| < 1.$$

このとき

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| \leq 1 + |A|.$$

ε を任意の正の数とする。$\lim_{x\to a} f(x) = A$ であるから、ある $\delta_2 > 0$ が存在して、$|x-a| < \delta_2$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}.$$

また $\lim_{x\to a} g(x) = B$ であるから、ある $\delta_3 > 0$ が存在して、$|x-a| < \delta_3$ を満たす任意の $x \in I$ に対して

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}.$$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ とおくと、$\delta_0 > 0$ であり、$|x-a| < \delta$ を満たす任意の $x \in I$ に対して、

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - AB| &= |f(x)g(x) - f(x)B + f(x)B - AB| \\
&\leq |f(x)|\,|g(x) - B| + |f(x) - A|\,|B| \\
&\leq (1 + |A|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} + \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)} \cdot |B| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$. ■

解答 52. (1) $\dfrac{1}{2} + \pi x + e x^2$　(2) $\dfrac{\sqrt{2} + e^3 x}{1 + x + x^{99}}$

解答 53. (工事中)

解答 54.

(1) (略解) まず Schwarz の不等式 $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ を証明する。内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ で定義すると、任意の実数 t に対して

$$0 \leq (t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = t^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$$

判別式を考えて、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ が得られる ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ の場合と $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の場合で場合分けして考える)。$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ であるので、$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$. (Schwarz の不等式の証明終)

これを用いると

$$(|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2 - (|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|)^2 = 2(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})) \geq 0$$

が得られるので、$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|$.

(2)

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|$$

より

$$|\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|.$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えて

$$|\boldsymbol{b}| - |\boldsymbol{a}| \leq |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| \quad \text{ゆえに} \quad -(|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|) \leq |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|.$$

ゆえに $\Big| |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| \Big| \leq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$. ■

解答 55. 任意の i について

$$a_i^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2 = |\boldsymbol{a}|^2.$$

ゆえに $|a_i| \leq |\boldsymbol{a}|$. これがすべての i について成り立つので、$\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} |a_i| \leq |\boldsymbol{a}|$.

右側の不等式は

$$|\boldsymbol{a}| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{e}_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \, |\boldsymbol{e}_i| = \sum_{i=1}^n |a_i| \leq n \max_{i=1,\cdots,n} |a_i|.$$

あるいは

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq n \max_{i=1,\ldots,n} a_i^2 = n \left(\max_{i=1,\ldots,n} |a_i| \right)^2.$$

ゆえに

$$|\boldsymbol{a}| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\ldots,n} |a_i|.$$

$\sqrt{n} \leq n$ であるから、$\displaystyle|\boldsymbol{a}| \leq n \max_{i=1,\ldots,n} |a_i|$ を得る。■

解答 56. (1) $x \in \Omega$ とするとき、$\forall \varepsilon > 0$ に対して $x \in B(x;\varepsilon) \cap \Omega$ であるから $B(x;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$. ゆえに $x \in \overline{\Omega}$. ゆえに $\Omega \subset \overline{\Omega}$. (2) $x \in \overline{\Omega_1}$ とするとき、$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$B(x;\varepsilon) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ であるから、$B(x;\varepsilon) \cap \Omega_2 \supset B(x;\varepsilon) \cap \Omega_1$. ゆえに $B(x;\varepsilon) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. ゆえに $x \in \overline{\Omega_2}$. ゆえに $\overline{\Omega_1} \subset \overline{\Omega_2}$. ■

解答 57. $I = (\alpha, \beta)$ とするとき、$\overline{I} = [\alpha, \beta]$ であることを示す。一般に $A \subset \overline{A}$ が成り立つので、(i) $\alpha, \beta \in \overline{I}$, (ii)$x < \alpha$ または $x > \beta$ ならば $x \notin \overline{I}$, の 2 つを示せば良い。

(i) の証明。ε を任意の正数とするとき、$\varepsilon' := \min\{\varepsilon, \beta - \alpha\}$, $x_1 := \alpha + \varepsilon'/2$, $x_2 := \beta - \varepsilon'/2$ とおくと、$\varepsilon' > 0$, $x_1 \in I \cap B(\alpha;\varepsilon)$, $x_2 \in I \cap B(\beta;\varepsilon)$ が成り立つ。ゆえに $I \cap B(\alpha;\varepsilon) \neq \emptyset$, $I \cap B(\beta;\varepsilon) \neq \emptyset$ である。ゆえに $\alpha, \beta \in \overline{I}$.

(ii) の証明。$x < \alpha$ とするとき、$\varepsilon := \alpha - x$ とおくと、$\varepsilon > 0$, $B(x;\varepsilon) \cap I = \emptyset$ であるから、$x \notin \overline{I}$. 同様に $x > \beta$ とするとき、$\varepsilon := \beta - x$ とおくと、$\varepsilon > 0$, $B(x;\varepsilon) \cap I = \emptyset$ であるから、$x \notin \overline{I}$. ■

解答 58. 問28 と同じである。まず任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $b_n \geq 0$ であるから、$|b_n| = b_n$ が成り立つ。

任意の正数 ε に対して、ある自然数 N が存在して、$n \geq N$ を満たす任意の自然数 N に対して、

$$|b_n - 0| < \varepsilon.$$

ゆえに $b_n = |b_n| < \varepsilon$. ゆえに

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{A}| \leq b_n < \varepsilon.$$

これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}$ であることを示している。■

解答 59. $\Rightarrow$ は簡単なので、$\Leftarrow$ のみ証明する。ε を任意の正数とするとき、$\dfrac{\varepsilon}{m} > 0$ であるので、各 i $(1 \le i \le m)$ に対して、$(\exists N_i > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N}\colon n \ge N_i)$

$$(\sharp) \qquad |a_{n,i} - A_i| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

$N := \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ とおくとき、$N \in \mathbb{N}$ で、$n \ge N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(\sharp)$ が成り立つので、

$$|\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{A}| \le m \max_{i=1,\cdots,m} |a_{n,i} - A_i| < m \cdot \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon.$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}$. ■

解答 60. (準備中)

解答 61.

(1) $1, \sqrt{2}, \log 3, \pi/4, e^5, 6 \in \mathbb{R}$ であるので $f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ である。ゆえに $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

(2) $F(x,y) = 3x + 2y + 1$, $G(z) = \exp z$ とおく。$F(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、$F\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto F(x,y) \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で連続である。また $G\colon \mathbb{R} \ni z \mapsto G(z) \in \mathbb{R}$ は連続である。ゆえにそれらの合成である $g = G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。

(3) $Q(x,y) = x^2 + 2x + 3$, $P(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ とおくと、$P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ である。ゆえに $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。また $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $P(x,y) \ge 1$ であるから、$P(x,y) \ne 0$. ゆえに $h = \dfrac{Q}{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。
$Q(x) = x^2 + 2x + 3$ として、1 変数多項式とするのではないことに注意する。

(4) $f(x,y) = x^2 + y^2$ とおくと、$f(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。一方 $f(\mathbb{R}^2) = [0,\infty)$ である。$g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(z) = \sqrt{z}$ で定めると、g は連続である。ゆえに合成関数 $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。また $h\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 \in \mathbb{R}$ は定数関数だから連続である。ゆえに $F = h + g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto 1 + \sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$ は連続である。そして $F(\mathbb{R}^2) = [1,\infty)$. 対数関数 $G\colon (0,\infty) \ni z \mapsto \log z \in \mathbb{R}$ は連続である。$F(\mathbb{R}^2) \subset (0,\infty)$ であるから、G と F は合成可能で、$\varphi = G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \log(1 + \sqrt{x^2+y^2}) \in \mathbb{R}$ は連続である

(5) $F_1(x,y) = x^3 - 3xy^2 \in \mathbb{R}$, $F_2(x,y) = 3x^2y - y^3 \in \mathbb{R}$ とおくと、$F_1(x,y), F_2(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ であるから、関数 $F_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ と $F_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。ゆえに $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は連続である。■

解答 62. $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ であるとは

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) < L$$

が成り立つことをいう。■

解答 63.

(1) k を実数とするとき、$y = kx$ に沿った極限をしらべる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+k^3x^2+x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+k^3)x^3+(1+k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+k^3)x+(1+k^2)}{1+k^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2} = 1.$$

これから収束するならば極限は 1 と分かる。

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} - 1\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

$x^2 \le x^2+y^2$, $y^2 \le x^2+y^2$ であるから、

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} - 1\right| \le |x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|+|y| \to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

(極座標も有効) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$r \to 0$ であり、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta + r^2}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(r\cos^3\theta + r\sin^3\theta + 1\right).$$

この極限は 1 である。実際

$$\left|\left(r\cos^3\theta + r\sin^3\theta + 1\right) - 1\right| = |r|\left|\cos^3\theta + \sin^3\theta\right| \le |r|\left(\left|\cos^3\theta\right| + \left|\sin^3\theta\right|\right) \le 2r \to 0 \quad (r\to 0).$$

(2) 放物線 $kx = y^2$ に沿った極限を考えてみると解決する。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ kx=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

これは k に依存しているから、極限は存在しない。■

(3) $u = x+y$, $v = x-y$ という変数変換は全単射であり、$(x,y)\to(0,0)$ のとき $(u,v)\to(0,0)$ である。

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{x^2-y^2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\sin u \sin v}{uv} = 1.\blacksquare$$

解答 64.

(1) $f(x,y) := 3x^2+4xy+5y^2$ は多項式関数であるから、$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である。特に $(1,2)$ で連続であるから、$(x,y)\to(1,2)$ のときの極限は、$f(1,2)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = 3\cdot 1^2 + 4\cdot 1\cdot 2 + 5\cdot 2^2 = 3+8+20 = 31.$$

(2) $f(x,y) := \dfrac{2+3xy}{4x^2+5y^2}$ は有理式で、その分母が 0 にならない範囲 $\Omega := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ に対して、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が定義されて連続である。特に $(0,1)\in\Omega$ で連続であるから、$(x,y)\to(0,1)$ のときの極限は、$f(0,1)$ に等しい:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = \frac{2+3\cdot 0\cdot 1}{4\cdot 0^2 + 5\cdot 1^2} = \frac{2}{5}.$$

(3) f は有理関数で、$(0,0)$ で分母が 0 になることに注意する。$(x,y)\to(0,0)$ のとき 分母 $=x^2+y^2\to+0$, 分子 $=1\not\to 0$ であるから、極限は存在しない。

(別解) f は分母が 0 になる点を除いた $\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で定義され、連続である。$\widetilde{f}:=\dfrac{1}{f}$ とおくと、$\forall(x,y)\in\Omega$ $\widetilde{f}(x,y)=x^2+y^2>0$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\widetilde{f}(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0^2+0^2=0$. ゆえに命題 4.13 から $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\widetilde{f}(x)}=\infty$.

(4) $(x,y)\to(0,0)$ のとき、分子 $=x+y\to 0$, $x^2+y^2\to+0$, 分母 $=\log(x^2+y^2)\to-\infty$ であるから、$\dfrac{0}{-\infty}$ で、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}=0.$$

もう少し丁寧にやると、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{\log\left(x^2+y^2\right)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\times\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\log\left(x^2+y^2\right)}=0\cdot 0=0.$$

第 2 因子が 0 であることは、合成関数の極限で OK だが (例えば $r:=\sqrt{x^2+y^2}$ とおき、$\dfrac{1}{\log r^2}\to 0$ $(r\to+0)$ を示すのは簡単)、有界であることを言うのも簡単だから、次のような解答もある。

$x^2+y^2\le\frac{1}{2}$ のとき、$\log(x^2+y^2)\le\log\frac{1}{2}=-\log 2<0$ より $|\log(x^2+y^2)|\ge\log 2$ に注意すると、

$$\left|\frac{x+y}{\log(x^2+y^2)}\right|\le\frac{|x+y|}{\log 2}\to 0\quad((x,y)\to(0,0)).$$

(5) いわゆる不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。近づく方向を限定して考えてみると何か分かることがある。
x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0}1=1.$$

y 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to0}\frac{-y}{y}=\lim_{y\to0}(-1)=-1.$$

これら 2 つの極限が一致しないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ は存在しない。

(6) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{y=0\\ (x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to0}1=1.$$

y 軸に沿って近づけた場合

$$\lim_{\substack{x=0\\ (x,y)\to(0,0)}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{y\to0}0=0.$$

これら 2 つの極限が一致しないので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在しない。

(7) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。x 軸, y 軸や、$y = kx$ (k は定数) にそっての極限は、すべて 0 であることが分かる。実際例えば

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{1+k^2} = 0.$$

これから 0 に収束しそうだと見当をつけて証明を考える。

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = x^2\frac{y^2}{x^2+y^2} \le x^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = x^2 \to 0^2 = 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

はさみうちの原理から、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

(8) これも不定形 $\dfrac{0}{0}$ である。

(式が意味を持つには $xy \ne 0$ でないといけないので、関数の定義域を次の集合 A にすると良い。もしも $\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ という問題だったら、$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\ne 0\} = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ とする。)

$$A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy\ne 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\ne 0\wedge y\ne 0\right\}$$

とおいて、$f\colon A\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y) := xy$$

で定める。$(0,0)\notin\Omega$, $(0,0)\in\mathbb{R}^2=\overline{\Omega}$ に注意しよう。$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0\cdot 0 = 0$ (連続な多項式関数の極限であるから代入すれば良い) であるから

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\Omega}} xy = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0.$$

$g\colon\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ を $g(z) := \dfrac{\sin z}{z}$ で定めると、$\displaystyle\lim_{z\to 0} g(z) = 1$ となることは良く知られている。

$f(\Omega) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ であるから、f と g は合成可能である。

ゆえに合成関数の極限に関する定理から

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = \lim_{z\to 0} g(z) = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1.$$

ϵ-δ 論法でやると、以下のようになる。

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\exists\delta' > 0$ が存在して

$$(\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad |\theta|\le\delta' \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{\sin\theta}{\theta} - 1\right| \le \varepsilon.$$

$\delta := \sqrt{2\delta'}$ とおくと、$\delta > 0$ である。そして $|(x,y)-(0,0)| < \delta$ を満たす任意の $(x,y)\in A$ に対して

$$xy\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad\wedge\quad |xy| \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) < \frac{\delta^2}{2} = \delta'.$$

ゆえに
$$\left|\frac{\sin(xy)}{xy}-1\right|\le\varepsilon.$$
ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{xy}=1$. ■

解答 65.

(1) ε を正数とする。$(x,y)\neq(0,0)$ とするとき、
$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|&=\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|=|x|\frac{y^2}{x^2+y^2}\le|x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|x|\\&\le\sqrt{x^2+y^2}=|(x,y)-(0,0)|.\end{aligned}$$
$\delta:=\varepsilon$ とおくと、$\delta>0$ であり、$|(x,y)-(0,0)|<\delta$ とするとき、
$$|f(x,y)-f(0,0)|<\delta=\varepsilon.$$
($(x,y)=(0,0)$ のときは $f(x,y)=f(0,0)$ なので $|f(x,y)-f(0,0)|=0$ であることに注意。) ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$. ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

(2) (1) と同様にして
$$|f(x,y)-f(0,0)|\le x^2.$$
x^2 は x,y の多項式であるから、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2=0^2=0$. 挟み撃ちの原理から
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0).$$
ゆえに f は $(0,0)$ で連続である。

(3) (略解) k を任意の実数として、$y=kx$ に沿った極限を調べると、
$$\lim_{\substack{y=kx\\(x,y)\to(0,0)}}f(x,y)=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$
であり、これは k によって異なる値を取るので、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ は存在しない。ゆえに f は $(0,0)$ で連続ではない。

(4) 分母が $-\infty$ に発散することに気付けば、極限は $0=f(0,0)$ であることはすぐ分かる。ゆえに連続である。(もう少し詳しく言うと、$|(x,y)|<\frac{1}{e}$ とするとき、$x^2+y^2<e^{-2}$ であるから、$\log(x^2+y^2)<\log e^{-2}=-2$. ゆえに $-\frac{1}{2}<\frac{1}{log(x^2+y^2)}<0$. これから $|f(x,y)-f(0,0)|\le\frac{|x|+|y|}{2}$ が導かれる。)

(5) $y=kx$ に沿った極限は、みな 0 になるが、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ を証明しようとしても上手く行かない。$x=r\cos\theta$, $r=\sin\theta$ としても出来るが、$y=-x+x^3$ に沿っての極限を考えてみる。
$$\lim_{\substack{y=-x+x^3,(x,y)\neq(0,0)\\(x,y)\to(0,0)}}(f(x,y)-f(0,0))=\lim_{\substack{x\neq0\\x\to0}}\frac{x(-x+x^3)}{x^3}=\lim_{\substack{x\neq0\\x\to0}}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
これが 0 に収束しないことはすぐ分かる ($x\to+0$ とすると $-\infty$ に発散する)。■

解答 66.

(1) k を実数とするとき、$y=kx$ に沿った極限をしらべる。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+k^3x^2+x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+k^3)x^3+(1+k^2)x^2}{(1+k^2)x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+k^3)x+(1+k^2)}{1+k^2} = \frac{1+k^2}{1+k^2} = 1.$$

これから収束するならば極限は 1 と分かる。

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x^3|}{x^2+y^2}+\frac{|y^3|}{x^2+y^2} = |x|\frac{x^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

$x^2\le x^2+y^2$, $y^2\le x^2+y^2$ であるから、

$$\left|\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2}-1\right| \le |x|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+|y|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|+|y|\to 0 \quad ((x,y)\to(0,0)).$$

ゆえに

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

(極座標も有効) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと、$(x,y)\to(0,0)$ のとき、$r\to 0$ であり、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+x^2+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^3\theta+r^3\sin^3\theta+r^2}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(r\cos^3\theta+r\sin^3\theta+1\right).$$

この極限は 1 である。実際

$$\left|\left(r\cos^3\theta+r\sin^3\theta+1\right)-1\right| = |r|\left|\cos^3\theta+\sin^3\theta\right| \le |r|\left(\left|\cos^3\theta\right|+\left|\sin^3\theta\right|\right) \le 2r\to 0 \quad (r\to 0).$$

(2) 放物線 $kx=y^2$ に沿った極限を考えてみると解決する。

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ kx=y^2}}\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

これは k に依存しているから、極限は存在しない。■

解答 67. $I_n=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$ $(n\in\mathbb{N})$ とすると、$\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は減少する区間列であるが、$\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$ である。■

解答 68. C 言語のプログラムを示す。例えば `2 2 1e-15` と入力すると、2 の正の 2 乗根 $\sqrt{2}$ の 15 桁近い精度の近似値が求まる。

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double power(double x, int m)
{
  int i;
  double p;
  // x^m を素朴に計算 (もっと工夫できるけれど)
  p = 1;
  for (i=0; i < m; i++)
    p *= x;
```

```
  return p;
}

int main(void)
{
  int m;
  double p, a, b, c, eps;
  printf("m, p, eps: "); scanf("%d%lf%lf", &m, &p, &eps);
  printf("m=%d, p=%g, eps=%g\n", m, p, eps);
  a = 0;
  if (p > 1)
    b = p;
  else
    b = 1;
  while ((b-a) >= eps) {
    c = (a + b) / 2;
    if (power(c,m)<p)
      a = c;
    else
      b = c;
    printf("%20.15f %20.15f %e\n", a, b, b-a);
  }
  return 0;
}
```

解答 69. 背理法を用いる。f が a で連続ではないと仮定すると、

$$(\exists\varepsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in\Omega:|x-a|<\delta)\,|f(x)-f(a)|\ge\varepsilon.$$

各自然数 $n=1,2,\dots$ に対して、$\delta:=\frac{1}{n}$ とおくと、$\delta>0$ であるから、$(\exists a_n\in\Omega)\ |a_n-a|<\frac{1}{n}$ かつ $|f(a_n)-f(a)|\ge\varepsilon$. こうして作った $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 内の点列で、$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ を満たすが、$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=f(a)$ は成り立たない。これは仮定と矛盾する。ゆえに f は a で連続である。■

解答 70. とある教科書の説明は、正の数 a に対して 2 乗して a になるような数を a の平方根といい、そのうち正であるものを $\sqrt{a}$ と表す。辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さは 2 乗すると 2 になるので、$\sqrt{2}$ である。こんな感じであった。正の数 a の平方根と $\sqrt{a}$ の定義はしてあるが、平方根が存在することは、$a=2$ の場合しか確認せず、話を進めている。寝た子は起こさないように… ■

解答 71.

(1) f が狭義単調増加であるから、その制限 $\widetilde{f}$ も狭義単調増加である。一般に狭義単調増加関数は単射であるから、$\widetilde{f}$ は単射である。

(2) $y\in[A,B]$ とする。$y=A$ であれば $x=a$, $y=B$ であれば $x=b$ とすると、$\widetilde{f}(x)=f(x)=y$. 以下 $A<y<B$ の場合を考える。$F(x):=\widetilde{f}(x)-y$ $(x\in[a,b])$ とおくと、$F\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であり、$F(a)=\widetilde{f}(a)-y=f(a)-y=A-y<0$, $F(b)=\widetilde{f}(b)-y=f(b)-y=B-y>0$. 中間値の定理から、ある $x\in(a,b)$ が存在して、$F(x)=0$. このとき $\widetilde{f}(x)-y=0$. すなわち $\widetilde{f}(x)=y$. ゆえに $\widetilde{f}$ は全射である。

ここまでで $\widetilde{f}$ は全単射と証明できたので、逆関数 $\widetilde{f}^{-1}\colon[A,B]\to[a,b]$ が存在する。

(3) 任意の $y\in(A,B)$ に対して、$x:=\widetilde{f}^{-1}(y)$ とおくと、$a<x<b$ が成り立つ。$0<\varepsilon<\min\{x-a,b-x\}$ を満たす任意の ε に対して、

$$\delta:=\min\left\{\widetilde{f}(x+\varepsilon)-\widetilde{f}(x),\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(x-\varepsilon)\right\}$$

とおくと、$\delta > 0$ であり、$|y - y'| < \delta$ ならば、

$$\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y')\right| < \varepsilon$$

が成り立つ[60]。

$y = A, B$ のときもほぼ同様である。例えば、$y = A$ のときは、$x = a$. $0 < \varepsilon < b - a$ を満たす任意の ε に対して、$\delta := \widetilde{f}(a + \varepsilon) - \widetilde{f}(a)$ とおけば、$\varepsilon > 0$ であり、$|y - y'| < \delta$ ならば $\left|\widetilde{f}^{-1}(y) - \widetilde{f}^{-1}(y')\right| < \varepsilon$ が成り立つ。■

解答 72. (1) $a_n := n$ としたときの $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (2) $a_n := \begin{cases} n & (n \text{ が奇数}) \\ \dfrac{1}{n} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$ としたときの $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

解答 73. $\{\boldsymbol{a}_n\} n \in \mathbb{N}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意の Cauchy 列とする。$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} := \boldsymbol{a_n}$ とおくとき、任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n - a_m| \leq |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m|, \quad |b_n - b_m| \leq |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m|$$

が成り立つので、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は $\mathbb{R}$ の Cauchy 列である。$\mathbb{R}$ の完備性から、ある $a, b \in \mathbb{R}$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

このとき $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}.$$

ゆえに $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束列である。以上から、$\mathbb{R}^2$ は完備である。■

解答 74.

例 6.3 $f(K) = [0, 1)$ であり、$\sup f(K) = 1$ である。$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup f(x_n)$ となる K 内の数列として、$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ が取れる。実際、$0 \leq x_n < 1$ であるから、$x_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$, $f(x_n) = x_n = 1 - \frac{1}{n} = 1$ $(n \to \infty)$. $\{x_n\}$ は部分列を取らなくても収束する: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. つまり、定理の証明中の記号で $c = 1$. しかし f は c で連続でないので、

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad (= 1 = \sup f(K))$$

が導かれない。

手短に言うと、「f が $c = 1$ で連続でないので、$f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ が導かれない。」

[60] グラフを描いて考えれば、ほぼ自明であるが、一応書いておくと、$|y' - y| < \delta$ より $y - \delta < y' < y + \delta$. $y = \widetilde{f}(x)$ に注意すると、δ の定義より、$\delta \leq \widetilde{f}(x + \varepsilon) - \widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x + \varepsilon) - y$, $\delta \leq \widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x - \varepsilon) = y - \widetilde{f}(x)$ であるから、$\widetilde{f}(x - \varepsilon) < y - \varepsilon$, $y + \delta \leq \widetilde{f}(x + \varepsilon)$. ゆえに $\widetilde{f}(x - \varepsilon) < y' < \widetilde{f}(x + \varepsilon)$. $\widetilde{f}^{-1}$ も狭義単調増加であるから、$x - \varepsilon < \widetilde{f}^{-1}(y') < x + \varepsilon$. $x = \widetilde{f}^{-1}(y)$ に注意すると、$\left|\widetilde{f}^{-1}(y') - \widetilde{f}^{-1}(y)\right| < \varepsilon$.

例 6.6　$f(K)=[0,\pi/2)$ であり、$\sup f(K)=\dfrac{\pi}{2}$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sup f(x_n)$ となる K 内の数列として、$x_n=n$ $(n\in\mathbb{N})$ が取れる。実際、$0\le x_n$ であるから、$x_n\in K$, $f(x_n)=\tan^{-1}n=\frac{\pi}{2}=1$ $(n\to\infty)$. ところが $\{x_n\}$ は有界でないので、どんな部分列も収束しない ($\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列とするとき、$x_{n_k}=n_k\ge k$ であるから、$x_{n_k}\to\infty$ $(k\to\infty)$.

つまり、「K が有界でないので、$\{x_n\}$ が収束部分列を持たない (言い換えると、任意の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ に対して、$\displaystyle\lim_{k\to\infty}x_{n_k}$ が存在しない)。」 ■

解答 75. $a\le x_1<x_2\le b$ とすると、平均値の定理により $\exists c\in(x_1,x_2)$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1).$$

もしも $f'>0$ in (a,b) であれば $f'(c)>0$, $x_2-x_1>0$ であるから、$f(x_2)>f(x_1)$. これは f が狭義単調増加であることを示す。

もしも $f'\ge 0$ in (a,b) であれば $f'(c)\ge 0$, $x_2-x_1>0$ であるから、$f(x_2)\ge f(x_1)$. これは f が単調増加であることを示す。

もしも $f'\equiv 0$ in (a,b) であれば $f'(c)=0$ であるから、$f(x_2)=f(x_1)$. これは f が定数関数に等しいことを示す。 ■

解答 76. 平均値の定理より，$(\forall h\colon 0<|h|<\min\{b-c,c-a\})$ $(\exists\theta\in(0,1))$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c+\theta h).$$

$h\to 0$ のとき、$c+\theta h\to c$ である。実際、

$$|(c+\theta h)-c|=|\theta h|=|\theta|\;|h|=\theta\,|h|\le|h|\to 0$$

であるから。$\displaystyle\lim_{\substack{x\ne c\\ x\to c}}f'(x)=A$ であるから、$\displaystyle\lim_{h\to 0}f'(c+\theta h)=A$. ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=A.$$

これは f が c で微分可能で、$f'(c)=A$ であることを示している。■

解答 77. $x_0\in V(a;\varepsilon)$ とすると、$|x_0-a|<\varepsilon$. $x_0\in A$ を証明するため、背理法を用いる。もしも $x_0\in A^c$ とすると、$\varepsilon=\inf\{|x-a|\mid x\in A^c\}\le|x_0-a|$ であるから、$\varepsilon\le|x_0-a|$. これは $|x_0-a|<\varepsilon$ と矛盾する。ゆえに $x_0\in A$. 従って $V(a;\varepsilon)\subset A$. ■

解答 78. (準備中)

解答 79.

(1) $\emptyset$ は 1 つも要素を持たないので、

$$(\forall x\in\emptyset)(\exists\varepsilon>0)B(x;\varepsilon)\subset\emptyset\qquad(\text{これは}\quad\forall x\quad x\in\emptyset\Rightarrow((\exists\varepsilon>0)B(x;\varepsilon)\subset\emptyset)\quad\text{ということ})$$

は真である ($x\in\emptyset$ は偽なので $x\in\emptyset\Rightarrow\cdots$ は真)。ゆえに $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。$x\in\mathbb{R}^n$ とするとき、$\varepsilon=1$ とおくと、$\varepsilon>0$ であり、

$$B(x;\varepsilon)=B(x;1)\subset\mathbb{R}^n$$

が成り立つ。ゆえに $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に属する任意の U_λ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとする。$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ とするとき、$(\exists\lambda_0\in\Lambda)\ x\in U_{\lambda_0}$. U_{λ_0} は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)\ B(x;\varepsilon)\subset U_{\lambda_0}$. このとき、$B(x;\varepsilon)\subset\bigcup_{\lambda}U_\lambda$. ゆえに $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) U_1, U_2 は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとする。$x\in U_1\cap U_2$ とすると、$x\in U_1$ かつ $x\in U_2$. U_1 は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$(\exists\varepsilon_1>0)\ B(x;\varepsilon_1)\subset U_1$. U_2 は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$(\exists\varepsilon_2>0)\ B(x;\varepsilon_2)\subset U_2$. $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ とおくと、$\varepsilon>0$ であり、$B(x;\varepsilon)\subset B(x;\varepsilon_1)\subset U_1$ かつ $B(x;\varepsilon)\subset B(x;\varepsilon_2)\subset U_2$. ゆえに $B(x;\varepsilon)\subset U_1\cap U_2$. ゆえに $U_1\cap U_2$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。■

解答 80. $\Lambda:=\mathbb{N}$, $U_m=(-1/m,1/m)$ $(m\in\mathbb{N})$ とすると、U_m は $\mathbb{R}^1$ の開集合であるが、$\bigcap_{m\in\mathbb{N}}U_m=\{0\}$ は $\mathbb{R}^1$ の開集合ではない。■

解答 81.

(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x$ で定めると f は連続である ($f(x)=x$ は x の多項式であるから)。ゆえに $(\alpha,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha<f(x)<\beta\}$, $(-\infty,\beta)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)<\beta\}$, $(\alpha,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)>\alpha\}$, は $\mathbb{R}$ の開集合である。(なお $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2>-1\}$ であるから、$(-\infty,\infty)$ も $\mathbb{R}$ の開集合である。)

(2) $\mathbb{R}^n$ の開球とは、ある $a\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ に対して $B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid|x-a|<r\}$ と表される集合のことをいう。$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=|x-a|^2=(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2$, $\beta:=r^2$ と定めると、f は連続であり、$B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)<\beta\}$. ゆえに B は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

(3) $f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$ とおくと、両方とも x, y の多項式であるから、$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ と $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続関数である。

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,\ y>0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid f(x,y)>0\right\}\cap\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)>0\right\}$$

であうから、第 1 象限は二つの開集合の共通部分であり、位相の公理の (3) から開集合である。■

解答 82. すみませんが、図を描くのは省略させてもらいます (だれか TikZ とか使って描いてくれないかなあ)。

(1) $\emptyset$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。これは**命題 8.5** で済んでいる。

(2) $\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。これは**命題 8.5** で済んでいる。

(3) $\{(0,0)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

このことを定義に基づき確認しておく。$A:=\{(0,0)\}$, $a:=(0,0)$ とおくと、$a\in A$. しかし任意の正数 ε に対して、$b:=(\varepsilon/2,0)$ とおくと、$|a-b|=\varepsilon/2<\varepsilon$ であるので、$b\in B(a;\varepsilon)$ であるが、$b\notin A$. ゆえに $B(a;\varepsilon)\not\subset A$. 以上より $(\forall a\in A)\ (\exists\varepsilon>0)\ B(a;\varepsilon)\subset A$ は成り立たないので、A は開集合ではない。

(4) $\{(0,0),(1,1)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

前問と同様に証明できる。

(5) 開集合である。

$A := (1,2)\times(3,4) = U_1\cap U_2$, $U_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x<2\}$, $U_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3<y<4\}$. **定理** 8.6 (1) を使えば、$U_1$ と U_2 が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが分かり、**定理** 8.5 (3) を使えば、A が $\mathbb{R}^2$ の開集合であることが分かる。

(6) $[1,2]\times(3,4)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

このことを定義に基づき確認しておく。$A := [1,2]\times(3,4)$, $a := (1,7/2)$ とおく。$a\in A$ であるが、任意の正数 ε に対して，$B(a;\varepsilon)\not\subset A$. 実際、$b := (1-\varepsilon/2, 7/2)$ とおくと、$|a-b| = \varepsilon/2<\varepsilon$ であるから、$b\in B(a;\varepsilon)$ であるが、$1-\varepsilon/2<1$ であるから、$b\notin A$. 以上より $(\forall a\in A)$ $(\exists\varepsilon>0)$ $B(a;\varepsilon)\subset A$ は成り立たないので、A は開集合ではない。

(7) $[1,2]\times[3,4]$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

前問と同様に証明できる。

(8) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 5<x^2+y^2<6\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

$A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 5<x^2+y^2<6\}$, $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2+y^2$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2)$, $a := 5$, $b := 6$ とおくと、$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<f(x,y)<b\}$. $f(x,y)$ は 2 変数 x,y の実係数多項式であるから、$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続関数である。ゆえに**定理** 8.6 より、A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

(9) $(0,\infty)\times(0,\infty)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

$A := (0,\infty)\times(0,\infty)$, $f_1\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f_1(x,y) := x$, $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f_2(x,y) := y$, $U_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f_1(x,y)>0\}$, $U_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f_2(x,y)>0\}$ とおくと、($f_1(x,y)$ も $f_2(x,y)$ も 2 変数 x,y の実係数多項式であるから、$f_1\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ も $f_2\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ も連続関数であるので) U_1 と U_2 は **定理** 8.6 (1) より、$\mathbb{R}^2$ の開集合である。そして $A = U_1\cap U_2$ であるから、**定理** 8.5 (3) より、A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

(10) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3\le y\le x^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではない。

(略証) $A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3\le y\le x^2\}$, $a := (0,0)$ とおく。$a\in A$ であるが、任意の正数 ε に対して、$B(a;\varepsilon)\not\subset A$ であることが示せる。

(11) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。

$A := \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2+y^2$ とおくと、$f(x,y)$ は 2 変数 x, y の実係数多項式であるから、$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続関数であり、$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)>0\}$ であるから、**定理** 8.6 (1) より、A は $\mathbb{R}^2$ の開集合である。■

解答 83. (準備中。宿題にして解説を書いたので、ここに取り込む。以下は気がついたこと。)
定義に戻って考えることにする。Ω が開集合でないとは、

$$(\exists a\in\Omega)(\forall\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\not\subset\Omega$$

が成り立つことだが、これは

$$(\exists a\in\Omega)(\forall\varepsilon>0)B(a;\varepsilon)\cap\Omega^c\neq$$

と同値である。a としては、Ω の境界に属する点を選べば良い。境界が何であるかは証明しなくても良いので簡単であろう。

ときどき、「Ω は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるので、開集合ではない」と論じる人がいるが、$\mathbb{R}^n$ や $\emptyset$ のように、閉集合かつ開集合である集合が存在するので、それだけでは間違いである。ただし連結性について学ぶと、「$\mathbb{R}^n$ は連結であるから、$\mathbb{R}^n$ の部分集合で開集合かつ閉集合であるものは、全空間 $\mathbb{R}^n$ と空集合 $\emptyset$ に限る。ゆえに「全空間でも空集合でもない部分集合 Ω が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であれば、それは開集合でない。」は真である。■

解答 84. $\boxed{\text{ア}}=\boxed{f^{-1}(W)}$, $\boxed{\text{イ}}=\boxed{W}$, $\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\mathbb{R}^n\text{ の開集合}}$, $\boxed{\text{エ}}=\boxed{\exists}$, $\boxed{\text{オ}}=\boxed{f^{-1}(W)}$ ■

解答 85.

(1) $\emptyset^c=\mathbb{R}^n$ であり、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

$(\mathbb{R}^n)^c=$ であり、$\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(2) U_λ がすべて $\mathbb{R}^n$ の閉集合であるとする。

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(U_\lambda^c\right).$$

$(U_\lambda)^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(U_\lambda^c\right)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) F_1 と F_2 が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であると仮定すると、F_1^c と F_2^c は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから、$(F_1\cap F_2)^c=F_1^c\cup F_2^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。ゆえに $F_1\cap F_2$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。■

解答 86.

(1) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x$ で定めると f は連続である ($f(x)=x$ は x の多項式であるから)。ゆえに $[\alpha,\beta]=\{x\in\mathbb{R}\mid\alpha\le f(x)\le\beta\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合である。

(2) $\mathbb{R}^n$ の閉球とは、ある $a\in\mathbb{R}^n$, $r>0$ に対して $B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid|x-a|\le r\}$ と表される集合のことをいう。$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=|x-a|^2=(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2$, $\beta:=r^2$ と定めると、f は連続であり、$B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)\le\beta\}$. ゆえに B は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

(3) f を (2) と同じように定め、$\beta:=0$ とおくと、

$$\{a\}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)\le\beta\}$$

であるから、$\{a\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。■

解答 87. (この解答は粗い。)

(1) $\emptyset$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。これは証明済みである。

(2) $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。これは証明済みである。

(3) $\{(0,0)\}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。1 点からなる集合が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることは、問 86 で証明済みである。

(4) $\{(0,0),(1,1)\}=\{(0,0)\}\cup\{(1,1)\}$ で、1 点からなる集合が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることと、2 つの $\mathbb{R}^n$ の閉集合の和集合は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることから導かれる。

(5) $(1,2)\times(3,4)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではない。

(6) $[1,2]\times(3,4)$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではない。

(7) $[1,2]\times[3,4]$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である。

$$[1,2]\times[3,4]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2\wedge 3\le y\le 4\right\}=F_1\cap F_2,$$
$$F_1:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2\right\},\quad F_2:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3\le y\le 4\right\}$$

と表せる。$f(x,y)=x$, $g(x,y)=y$ はともに x と y の多項式であるから、f と g は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数であるので、F_1 と F_2 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。ゆえにその共通部分である $[1,2]\times[3,4]$ も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(8) $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

(9) $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。

(10) $F:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3\le y\le x^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

$$F=F_1\cap F_2,\quad F_1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^3-y\le 0\},\quad F_2:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y-x^2\le 0\}$$

と表せるが、$f(x,y)=x^3-y$, $g(x,y)=y-x^2$ はともに x と y の多項式であるから、f と g は $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数であるので、F_1 と F_2 は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。ゆえにその共通部分である F も $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(11) $\mathbb{R}^2$ の閉集合ではない。■

解答 88.

(1) $F:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<1\}$ とすると、これは $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではない。$f\colon F\to\mathbb{R}$ を $f(x)=1$ $(x\in F)$ で定めると、これは定数関数であるから連続であるが、$\{x\in F \mid f(x)\ge 0\}=F$. これは $\mathbb{R}^n$ の閉集合ではない。

(2) (準備中)

解答 89. 補集合 $\left(\overline{\Omega}\right)^c$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示す。$\overline{\Omega}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\forall\varepsilon>0)B(x;\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\}$ であるから、その補集合は (条件を否定して)

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Omega}\right)^c&=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\exists\varepsilon>0)B(x;\varepsilon)\cap\Omega=\emptyset\}\\&=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\exists\varepsilon>0)B(x;\varepsilon)\subset\Omega^c\}.\end{aligned}$$

ゆえに $x\in\left(\overline{\Omega}\right)^c$ とすると、$(\exists\varepsilon>0)$ $B(x;\varepsilon)\subset\Omega^c$. このとき、実は $B\left(x;\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset\left(\overline{\Omega}\right)^c$ である。実際 $y\in B\left(x;\frac{\varepsilon}{2}\right)$ とするとき、

$$B\left(y;\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset B(x;\varepsilon)\subset\Omega^c$$

であるから、$y\in(\overline{\Omega})^c$. ゆえに $\left(\overline{\Omega}\right)^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である。

問 56 から、F を Ω を含む任意の閉集合とするとき、$\Omega\subset\overline{\Omega}\subset\overline{F}$. $\overline{F}=F$ であるから、$\overline{\Omega}\subset F$. すなわち $\overline{\Omega}$ は、Ω を含む任意の閉集合 F に含まれる。この問の前半を用いると、$\overline{\Omega}$ は Ω を含む閉集合であるから、$\overline{\Omega}$ は Ω を含む最小の閉集合である。■

解答 90. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、$f(K)$ の要素からなる点列であるとする。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f(a_n)=b_n$ を満たす $a_n\in K$ が取れる。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合 K 内の点列であるから、命題 9.7) (i)⇒(ii) により、ある $a\in K$ と、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. このとき $\lim_{k\to\infty} b_{n_k}=\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k})=f(a)$. すなわち $\{b_n\}$ の部分列 $\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、$f(K)$ の要素 $f(a)$ に収束する。命題 9.7) (ii)⇒(i) により、$f(K)$ は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合である。■

解答 91.

証明　(定理 9.7 を用いた証明)

まず f の値域 $f(K)=\{y\mid(\exists x\in K)y=f(x)\}$ が上に有界である、すなわち

$$(\exists U\in\mathbb{R})(\forall x\in K)\quad f(x)\le U$$

が成り立つことを示す。これが成り立たないと仮定すると、

$$(\forall U\in\mathbb{R})(\exists x\in K)\quad f(x)>U.$$

ゆえに各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $x\in K$ かつ $f(x)>n$ となる x が存在する。それを 1 つ選んで a_n とおくと、

$$a_n\in K,\quad f(a_n)>n.$$

こうして K 内の点列 $\{a_n\}$ を作ると、K は点列コンパクトであるから、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a\in K$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. f の連続性から $\lim_{k\to\infty} f(a_{n_k})=f(a)$. 特に $\{f(a_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるが、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $f(a_{n_k})>n_k\ge k$ であるから、矛盾が生じる。ゆえに $f(K)$ は上に有界である。

Weierstrass の上限公理 (定理 1.1) から、$f(K)$ は上限 S を持つ。つまり (i) $(\forall x\in K)$ $f(x)\le S$　(ii) $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists x\in K)$ $S-\varepsilon<f(x)\le S$.

$n=1,2,\cdots$ に対して $\varepsilon=\dfrac{1}{n}$ として (ii) を用いると、$a_n\in K$, $S-\dfrac{1}{n}<f(a_n)\le S$ を満たす a_n が存在する。こうして K 内の点列 $\{a_n\}$ を作ると、K は点列コンパクトであるから、$\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a\in K$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a$. $S-\dfrac{1}{n_k}<f(a_{n_k})\le S$ であるので、$k\to\infty$ として $S\le f(a)\le S$. ゆえに $f(a)=S$. (i) より、$\forall x\in K$ に対して $f(a)\ge f(x)$. ゆえに $S=f(a)$ は最大値である。■

証明の解説　まず最大値は存在するかどうか明らかでないが、上限 S については、上に有界でありさえすれば必ず存在するので、議論がしやすい、ということがある。K 内の点列 $\{a_n\}$ で、$f(a_n)\to S$ $(n\to\infty)$ を満たすものは上に見たように (上限の定義を思い出せば) 簡単に作れる。K の有界性から、$\{a_n\}$ の収束部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。$a:=\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ として、

$$S=\lim_{k\to\infty} f(x_{a_k})=f(a).$$

最後の等式は f の連続性による。K が閉集合であるから、$a\in K$ である。ゆえに $f(a)\in f(K)$ であり、S は $f(K)$ の上限であったから、$f(a)$ は $f(K)$ の最大値である。■

(前問を用いた証明) $f(K)$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合である。有界であるから、$f(K)$ の上限 S が存在する。$f(K)$ は閉集合であるから、S は $f(K)$ に含まれる (ここは行間を少し開けたままにしておく)。ゆえに S は $f(K)$ の最大値である。■

証明の解説　短すぎて狐につままれたような感じがするかもしれない。迂回してここにたどり着いたので、決して短い道ですんだわけではない。トポロジーを学ぶと前問の一般化版「コンパクトの連続関数による像はコンパクト」というのは、常識になるので、この (前問を用いた証明) が頭の中に定着する。数学は学ぶほどものが簡単に見えて来る好例。■

解答 92. $[a,b]$ は $\mathbb{R}$ の有界閉集合であるから、前問によって、$\varphi([a,b])$ は $\mathbb{R}^m$ の有界閉集合である。■

解答 93.

(1) $K=\mathbb{R}$, $f(x)=\tan^{-1}x$ $(x\in\mathbb{R})$ とするとき、K は $\mathbb{R}$ の閉集合で、$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続関数であるが、$f(K)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではない。

(2) $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in\mathbb{R})$ とするとき、K は $\mathbb{R}$ の有界集合で、$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続関数であるが、$f(K)=(1,\infty)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合ではない。■

解答 94. $g(x,y,z,w):=x^2+y^2+z^2+w^2$ $((x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4)$ とおくと、f も g も多項式関数であるから、$\mathbb{R}^4$ で連続である。

$S=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\mid g(x,y,z,w)=1\}$ が成り立ち、g が $\mathbb{R}^4$ で連続であることから、S は $\mathbb{R}^4$ の閉集合である。

$R:=1$ とおくと、$(x,y,z,w)\in S$ とするとき、

$$|(x,y,z,w)|=\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}=1=R$$

であるから、$|(x,y,z,w)|\le R$. ゆえに S は有界である。

以上より、S は $\mathbb{R}^4$ の有界閉集合であり、$f\colon S\to\mathbb{R}$ は連続であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の S における最大値が存在する。■

解答 95.

(1) $f(x,y)$, $g(x,y)$ は 2 変数 x, y の実係数多項式であるから、$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続である。

(2) K は有界である。実際、$R:=1$ とおくと、$(x,y)\in K$ ならば、

$$|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{g(x,y)}\le\sqrt{1}=1=R.$$

また $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は連続であるから、$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)\le 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(3) まず f の極値を求める。$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-1\\ 4y\end{pmatrix}$ であるから、$\nabla f(x,y)=0\Leftrightarrow(x,y)=(1/2,0)$. Hesse 行列は

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

で、これは $(1/2,0)$ で正値であるから、f は $(1/2,0)$ で狭義の極小値 $f(1/2,0)=1/4-1/2+0=-1/4$ を取る。

K の境界 ∂K での f の最大値、最小値を求めよう。∂K 上の点 (x,y) は $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ と書けるので、

$$f(x,y)=f(\cos\theta,\sin\theta)=\cos^2\theta-\cos\theta+2\sin^2\theta=2-\cos^2\theta-\cos\theta=2-(\cos\theta+1/2)^2.$$

$\cos\theta=-1/2$ のとき最大値 $9/4$, $\cos\theta=1$ のとき最小値 0.

K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であり、f は K で連続であるから Weierstrass の最大値定理によって、f の K 上の最大値、最小値が存在する。

f が K の内点で最大値を取るならば、それは f の $\mathbb{R}^2$ における極大値であるが、それは存在しないので、f は K の内点では最大値を取らず、境界 ∂K 上で最大値を取る。それは ∂K 上の最大値になるので、$9/4$ である。$x=-1/2$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f が K の内点 (x,y) で最小値を取るならば、それは f の $\mathbb{R}^2$ における極小値であるので、$(x,y)=(1/2,0)$, $f(1/2,0)=-1/4$. 一方、f が境界 ∂K 上で最小値を取るならば、それは ∂K 上の最小値になるので、0 である。$0>-1/4$ であるから、0 は最小値になりえない。ゆえに $(x,y)=(1/2,0)$ のとき、f は最小値 $-1/4$ を取る。■

解答 96. (略解) $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geq 0\land y\geq 0\land x+y\leq 1\}$ である。

(1) 任意の $(x,y)\in K$ に対して、$0\leq y\leq 1-x$ であるから、$x^2+y^2\leq x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1\leq 1$ (詳しくは各自)。ゆえに $R=1$ とおくと、任意の $(x,y)\in K$ に対して、$|(x,y)|\leq R$ が成り立つ。ゆえに K は有界である。

(2) $K_1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geq 0\}$, $K_2:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\geq 0\}$, $K_3:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y\leq 1\}$ はいずれも多項式関数の等号つき不等式で定義されているので、$\mathbb{R}^2$ の閉集合である。$K=K_1\cap K_2\cap K_3$ であるから、K は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

(3) f は多項式関数であるから、$\mathbb{R}^2$ で連続である。Weierstrass の最大値定理により、f の K における最大値と最小値が存在することが分かる。

K の内点で極値を持つならば、そこで $\nabla f=0$ となる。$\nabla f(x,y)=0$ となる (x,y) を探すと、($\mathbb{R}^2$ 全体で極値を探しても唯一つ) $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ で、$f\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{2}{5}$. (Hesse 行列の符号を調べると、これが極小値であることが分かる。)

K の境界 ∂K は、$B_1=\{(x,0)\mid x\in[0,1]\}$, $B_2=\{(0,y)\mid y\in[0,1]\}$, $B_3=\{(x,1-x)\mid x\in[0,1]\}$ からなる。これらの集合上では、1 変数関数に帰着されるので、高校数学で解析が出来る。その結果、B_1, B_2, B_3 での最大値はそれぞれ、2, 1, 2 で、$\displaystyle\max_{\partial K}f=2$. また B_1, B_2, B_3 での最小値はそれぞれ、$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$ で、$\displaystyle\min_{\partial K}f=\dfrac{1}{2}$.

以上から K における最大値は 2, 最小値は $\dfrac{2}{5}$. ■

解答 97. (準備中)

解答 98. (準備)

B　逆関数の微分法

1 変数関数の場合の

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

に相当する定理がある。

定理 B.1 (逆関数の微分法) U と V は $\mathbb{R}^n$ の開集合で、$\varphi\colon U \to V$ は全単射、$a \in U$, $b = \varphi(a)$, φ は a で、nφ^{-1} は b で全微分可能であるならば、

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = \left(\varphi'(a)\right)^{-1}.$$

(左辺の $^{-1}$ は逆関数を表し、右辺の $^{-1}$ は逆行列を表す。)

注意: 上の定理では微分可能な逆関数の存在を仮定しているが、実は $\det \varphi'(a) \neq 0$ という条件が成り立てば、局所的に微分可能な逆関数の存在が導かれるという、**逆関数定理**がある (非常に重要！)。それはこの講義科目の終盤に解説する予定である。

証明 逆関数の定義により、

$$\varphi^{-1}\left(\varphi(x)\right) = x \quad (x \in U).$$

φ は a で、φ^{-1} は $b = f(a)$ で全微分可能であるから、合成関数の微分法より、

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(b)\varphi'(a) = I \quad (I \text{ は } n \text{ 次の単位行列})$$

が成り立つ。ゆえに $\left(\varphi^{-1}\right)'(b) = \varphi'(a)^{-1}$. ■

問 $\varphi(x) = x$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ とするとき、$\varphi'(x) = I$ であることを示せ。

(解法 1) 一般に「$f(x) = Ax + b$ ならば $f'(x) = A$」であるから、$\varphi(x) = x = Ix + 0$ より、$\varphi'(x) = I$.

(解法 2) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ とおくと、$\varphi_i(x) = x_i$ $(i = 1, \dots, n)$.

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} x_i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

であるから、$\varphi'(x) = (\delta_{ij}) = I$. ■

次の例で、逆関数の微分法を使って $\left(\varphi^{-1}\right)'$ を計算しているが、微分可能性を証明するには、本当は逆関数の定理のお世話になる必要があるだろう。

例 B.2 (極座標変換の逆変換のヤコビ行列 (とても重要)) $\varphi\colon (0, \infty) \times (0, 2\pi) \ni \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0); x \in [0, \infty)\}$ は明らかに C^1 級であるから (実は C^∞ 級である)、全微分可能である。

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

逆関数の微分法によって、$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(x,y)$ の全微分係数は、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} &= \left(\varphi^{-1}\right)'(x,y) = \varphi'(r,\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{\cos\theta\cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta}\begin{pmatrix} r\cos\theta & +r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ゆえに[61]

$$r_x = \cos\theta, \quad r_y = \sin\theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos\theta}{r}. \blacksquare$$

(**以下はやや脱線** — 無視してよろしい) この結果を逆関数の微分法を使わずに求めてみよう。$r = \sqrt{x^2+y^2}$ であるから、r_x と r_y は比較的簡単に得られる。

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
r_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

これらがそれぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ に等しいことは容易に分かる[62]。θ の導関数の方は少し難しい。割と多くのテキストに

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

と書かれているが[63]、これは $\pmod{\pi}$ でしか正しくない式である。本当は、$\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ が主値 ($(-\pi/2,\pi/2)$ 内の値) を意味するとして、

$$\theta = \begin{cases}
\tan^{-1}\dfrac{y}{x} & ((x,y) \text{ が第 1 象限内あるいは } x \text{ 軸の正の部分上の点}) \\
\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + \pi & (x<0, \text{ 言い換えると } (x,y) \text{ が第 2,3 象限内あるいは } x \text{ 軸の負の部分上の点}) \\
\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + 2\pi & ((x,y) \text{ が第 4 象限内の点}) \\
\dfrac{\pi}{2} & (x=0 \text{ かつ } y>0) \\
\dfrac{3\pi}{2} & (x=0 \text{ かつ } y<0)
\end{cases}$$

[61] こういう計算をするとき、ヤコビ行列の成分の並べ方を間違えると、とんでもない結果になってしまうことに注意しよう。

[62] 例えば $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} = \dfrac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta.$

[63] 本当に困ったことである。C 言語のプログラムで、デカルト座標を極座標に直すには、`r=sqrt(x*x+y*y); theta=atan2(y,x);` のようにする。`theta=atan(y/x);` ではマズイ — というのは常識的なことなのだが、数学書の方が旧態依然のままなのは情けない。

となるはずである。

$$\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

であることから、

$$\theta_x=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad \theta_y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

が導けるが、少々面倒である (例えば y 軸上でどうすれば良いか分かりますか?[64])。これがそれぞれ $-\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\dfrac{\cos\theta}{r}$ に等しいことは容易に確められる。■

例 B.3 (Laplacian の極座標表示 (再び)) C^2 級の関数 $f\colon(x,y)\mapsto f(x,y)$ があるとき、

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad g(r,\theta):=f(x,y)$$

で g を定める。すなわち、

$$g(r,\theta):=f(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

このとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

が成り立つ。上では、右辺を変形していって左辺になることで示した。

応用上は、 $\triangle f=f_{xx}+f_{yy}$ が先にあって、これを g とその偏導関数で表したいので、以下のように左辺を変形していって右辺になることを示す方が望ましい。まず x, y についての 1 階偏導関数

$$f_x=g_rr_x+g_\theta\theta_x=g_r\cos\theta-g_\theta\frac{\sin\theta}{r},$$
$$f_y=g_rr_y+g_\theta\theta_y=g_r\sin\theta+g_\theta\frac{\cos\theta}{r}$$

から、

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

以下は (面倒ではあるが、機械的計算で)

$$\begin{aligned}
f_{xx}&=\frac{\partial}{\partial x}f_x=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(g_r\cos\theta-g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(g_r\cos\theta-g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(g_r\cos\theta-g_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)\\
&=\cos\theta\left(g_{rr}\cos\theta-g_{\theta r}\frac{\sin\theta}{r}-g_\theta\frac{-\sin\theta}{r^2}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(g_{r\theta}\cos\theta+f_r(-\sin\theta)-g_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r}-g_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)\\
&=g_{rr}\cos^2\theta-\frac{2g_{r\theta}\cos\theta\sin\theta}{r}+\frac{g_{\theta\theta}\sin^2\theta}{r^2}+\frac{g_r\sin^2\theta}{r}+\frac{2g_\theta\cos\theta\sin\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

[64] 例えば、$x=0$, $y>0$ の範囲では、偏微分の定義から $\theta_y=0=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ となることは容易に分かるが、$\theta_x=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ となることは、偏導関数の右側からの極限と、左側からの極限がともに $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ であることを確め、「$f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ が連続で、$c\in(a,b)$ 以外では微分可能で、$\lim\limits_{\substack{x\neq c\\ x\to c}}f'(x)=D$ であれば、f は c で微分可能で、$f'(c)=D$.」という定理を用いる。

同様に

$$f_{yy} = g_{rr}\sin^2\theta + \frac{2g_{r\theta}\cos\theta\sin\theta}{r} + \frac{g_{\theta\theta}\cos^2\theta}{r^2} + \frac{g_r\cos^2\theta}{r} - \frac{2g_\theta\cos\theta\sin\theta}{r^2}.$$

ゆえに

$$f_{xx} + f_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}. \blacksquare$$

C　条件付き極値問題 (Lagrange の未定乗数法)

C.1　2 変数の場合

まず 2 変数関数の場合に説明する。

これまで扱った極値問題では、定義域が基本的には開集合であった。すると

$$\text{内点 } a \text{ が } f \text{ の極値点} \Longrightarrow a \text{ は } f \text{ の停留点}, \quad \text{i.e. } \nabla f(a) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix} = 0.$$

という命題が成り立ち、極値点を探すことは比較的簡単であった。以下では、関数 f の極値を条件

$$g(x,y) = 0 \tag{17}$$

の下で求めることを考える。すなわち g の零点集合

$$N_g := \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$$

に f を制限して考える。これは普通、開集合にはならない。よって、f の停留点 ($f'(a) = 0$ となる点 a のこと) を探しても意味がない。

例 C.1 条件 $g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下で

$$f(x,y) := x^2 + 3xy + y^2$$

の最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　条件 $g(x,y) = 0$ を $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ と y について解いて代入して、x のみの関数についての最大最小問題に直せば解ける。ここで陰関数が出て来ていることに気がつくだろうか？(余談: これは 2 次形式なので、2 次形式の取り扱いに詳しければ、微積分を一切使わないで解くことも可能である。また、$g = 0$ は単位円周で、三角関数を使ってパラメーター付けできるから、それを使って 1 変数関数の最大最小問題にすることも出来る。) ■

例 C.2 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $y = x^2$ 上の点と点 $(0,1)$ との距離の極値を求めよ。これは

$$\begin{cases} f(x,y) := \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ g(x,y) := x^2 - y \end{cases}$$

とする条件付き極値問題である。

この場合、$g(x,y) = 0$ は $y = x^2$ と解ける。これを f に代入して出来る

$$h(x) := f(x, x^2) = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2}$$

についての普通の極値問題に帰着できる。 ■

陰関数定理の節で述べたように、すべての方程式 $g(x,y)=0$ から陰関数 $y=\varphi(x)$ が具体的に求まるとは限らないので、上の2つの例のような解き方は、運が良くない限り出来ないわけである。そこで、次の定理の出番となる。

定理 C.3 (条件つき極値問題に対する Lagrange の未定乗数法, Lagrange (1788 年)) Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合、f と g を Ω で定義され $\mathbb{R}$ に値を持つ C^1 級の関数として、

$$N_g := \{(x,y)\in\Omega \mid g(x,y)=0\}$$

とおいたとき

$$\nabla g \neq 0 \quad \text{on } N_g$$

が成り立つとする。また条件 $g(x,y)=0$ の下で、f は $a=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in N_g$ で極値を取るとする (すなわち、$\exists\varepsilon>0$ s.t. $f(a)=\max\{f(x)\mid x\in B(a;\varepsilon)\cap N_g\}$ または $f(a)=\min\{f(x)\mid x\in B(a;\varepsilon)\cap N_g\}$)。このとき $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t.

$$\nabla f(a)=\lambda\nabla g(a)$$

i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(a),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}(a).$$

注意 C.4 (1) λ のことを **Lagrange の未定乗数** (**Lagrange multiplier**) という。

(2) 極値点の座標 α, β, 未定乗数 λ は、連立方程式

$$\begin{cases} g(\alpha,\beta)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}(\alpha,\beta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta)=\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}(\alpha,\beta) \end{cases}$$

の解であり、これから具体的に求まる場合が多い (未知数 3 個、方程式 3 個)。この場合は条件付き極値問題が解けるわけである。この方法を **Lagrange の未定乗数法**と呼ぶ。この条件は

$$F(x,y,\lambda):=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

とおくと

$$F_\lambda=F_x=F_y=0 \quad \text{i.e. } \nabla F=0$$

と書ける。ここで ∇ は (x,y,λ) に関する勾配 (gradient) を表す。この形で定理を述べている本も多い。■

証明　仮定

$$\nabla g(a)\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

より

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a)\neq 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a)\neq 0.$$

(i) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a) \neq 0$ の場合. 陰関数の定理から、点 a の近傍で

$$g(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=\varphi(x)$$

と y について解けて

$$\varphi'(x) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

となる。そこで

$$h(x) := f(x,\varphi(x))$$

とおくと

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \left(-\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\varphi(x))} \right). \end{aligned}$$

h は α で極値となるから $h'(\alpha)=0$. $(\alpha,\varphi(\alpha))=(\alpha,\beta)=a$ に注意して

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(a)} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

ここで λ を

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a)} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(a) = 0$$

とおくと

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) = 0.$$

まとめると

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

(ii) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a) \neq 0$ の場合. 今度は $g(x,y)=0$ を x について解けばよい。後は同様である。■

問 C.5 上の定理は 2 変数関数に関するものだが、n 変数関数に一般化して、証明せよ。

極値の条件の図形的な解釈 $c=f(a)$ に対して、f のレベル・セット $L_c=\{(x,y)\in\Omega \mid f(x,y)=c\}$ を考える。条件

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad \nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$$

は、$N_g=\{(x,y) \mid g(x,y)=0\}$ と L_c が接することを意味する ($\nabla f(a)$ は L_c の法線ベクトル、$\nabla g(a)$ は N_g の法線ベクトルだから)。こうなることは次のように考えても納得できる。

点 (x,y) が N_g に沿って、$a=(\alpha,\beta)$ から動くとき、$g(x,y)=g(\alpha,\beta)=0$ であるから

$$0 = g(x,y) - g(\alpha,\beta) \fallingdotseq \left(\nabla g(a), \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix} \right).$$

f は $a=(\alpha,\beta)$ で極値を取るので、$(x,y)\in N_g$ が (α,β) に近いとき、$f(x,y)$ は $f(\alpha,\beta)$ に非常に近いと考えられる。ゆえに

$$0 \fallingdotseq f(x,y)-f(\alpha,\beta) \fallingdotseq \left(\nabla f(a), \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right).$$

よって $\nabla f(\alpha,\beta)$ と $\nabla g(\alpha,\beta)$ は、ともに $\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}$ に直交する。これから

$$\nabla g(\alpha,\beta) \parallel \nabla f(\alpha,\beta).$$

ゆえに f の等高線 L_c と N_g は接している。■

C.2 n 変数, d 個の制約条件の場合

一般の n 変数関数で、制約条件も複数の場合に拡張した定理を (証明抜きで) 掲げておこう。

定理 C.6 (Lagrange の未定乗数法, n 変数で制約条件 d 個の場合) Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ を C^1 級の関数、d を $1\le d<n$ なる自然数、

$$\boldsymbol{g}=\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix}:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^d$$

を C^1 級の関数で

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{g}'(x)=d \quad (\forall x\in\Omega)$$

を満たすもの、$a\in\Omega$ で $\boldsymbol{g}(a)=0$, f は条件 $\boldsymbol{g}=0$ の下で a で極値を取る、とすると $\exists\boldsymbol{\lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^d$ s.t.

$$\nabla f(a)=\sum_{j=1}^{d}\lambda_j\nabla g_j(a), \quad \text{また (もちろん)} \quad \boldsymbol{g}(a)=0. \tag{18}$$

注意 C.7 やはり

$$F(x,\boldsymbol{\lambda}):=f(x)-\sum_{j=1}^{d}\lambda_j g_j(x)$$

とおくと、方程式は (18) は次と同値になる:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(a,\boldsymbol{\lambda})=0 & (i=1,\cdots,n) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j}(a,\boldsymbol{\lambda})=0 & (j=1,\cdots,d). \end{cases}$$

(これは、F のすべての変数についての gradient が 0 と書けることに注意。) ■

C.3 例題

Lagrange の未定乗数法の例を二つほどあげる。いずれも意味が明らかな (高校数学でも答が出る) 問題である。

例題 C.1 方程式 $ax+by+c=0$ ($(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{R}$) で表される平面内の曲線を L とする。点 (x,y) が直線 L 上を動くときの、関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

解答 (求めるものは原点と直線 L との距離の平方になることは (直観的にすぐ) 分かるだろうから、微分法を用いなくても「解ける」問題であるが、Lagrange の未定乗数法で求めてみる。)

1. 最小値が存在することの証明 (この問題の場合は、図形的な意味が分かるので「明らか」であるが、そうでない場合もあるので、きちんと書くとどうなるか、紹介する意味で以下に示す。実は良く出て来る論法である。) L 上の点 (x_0,y_0) を一つ取り (存在することは自明)、正数 R を $R^2=x_0^2+y_0^2$ で定め、$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le R^2\}$ とおく。L を

$$L=L\cap\mathbb{R}^2=L\cap(D\cup D^c)=(L\cap D)\cup(L\cap D^c)$$

と分解すると、$L\cap D$ は $\mathbb{R}^2$ の空でない有界閉集合であるから、関数 f は $L\cap D$ において最小値 $m=f(\alpha,\beta)$ を持つ。ところで $(\alpha,\beta)\in D$ であるから、$m=f(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2\le R^2$. 一方、$L\cap D^c$ においては、$f(x,y)=x^2+y^2>R^2$ であるから、m は f の L 全体における最小値であることが分かる。

2. 唯一の極値は最小値である 前段で最小値が存在することが分かったが、最小値は極値であるから、もしも極値が一つしか無いことが分かれば、それが最小値である。

3. f の条件付き極値を求める 関数 $g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $g(x,y):=ax+by+c$ で定義すると、

$$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\ne 0.$$

したがって、条件 $g(x,y)=0$ の下での f の極値点は (もし存在するならば) Lagrange の未定乗数法で求まる。未定乗数を λ とおくと、方程式は、

$$\begin{aligned}
0&=f_x(x,y)-\lambda g_x(x,y),\\
0&=f_y(x,y)-\lambda g_y(x,y),\\
0&=g(x,y).
\end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned}
0&=2x-\lambda a,\\
0&=2y-\lambda b,\\
0&=ax+by+c
\end{aligned}$$

となるから、解は

$$\lambda=-\frac{2c}{a^2+b^2},\quad x=-\frac{ac}{a^2+b^2},\quad y=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

ただ一つだけである。

このように Lagrange の未定乗数法で求められた点が極値点であるかどうかは、一般にはすぐには分からないが、この場合は前段の議論から、これは極値点であり、さらには最小点に他ならないことが分かる[65]。すなわち

$$(x, y) = \left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2} \right)$$

のとき、f は最小値

$$f\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}, \frac{-bc}{a^2+b^2} \right) = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

を取る。■

問 C.8 直線 $ax+by+c=0$ $((a,b) \neq (0,0))$ と点 (x_0, y_0) との距離は、$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であることを示せ。

問 C.9 平面 $ax+by+cz+d=0$ $((a,b,c) \neq (0,0,0))$ と点 (x_0, y_0, z_0) との距離は、$\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ であることを示せ。

例題 C.2 方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b は正の定数) 表される平面内の楕円を E とする。点 (x,y) が直線 E 上を動くときの、関数 $f(x,y) = x+y$ の最大値、最小値を求めよ。

解答 これも図形的に考えると意味は明瞭で、Lagrange の未定乗数法を講義しなかった年度にこの問題の 3 次元版を期末試験に出したことがある (接平面をきちんと求めて、使いこなせるかというのが、出題のねらい)。

まず E は有界閉集合であるから、連続関数 f は E 上で最大値、最小値を持つことが分かる。また

$$g(x,y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

とおくと、

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \end{pmatrix}$$

であり、$g(x,y)=0$ を満たす任意の (x,y) に対して

$$\nabla g(x,y) \neq 0$$

であることが分かる。ゆえに条件 $g(x,y)=0$ の下での関数 f の極値は、Lagrange の未定乗数法で求まる。方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(x,y) - \lambda g_x(x,y), \\ 0 &= f_y(x,y) - \lambda g_y(x,y), \\ 0 &= g(x,y). \end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \lambda \frac{2x}{a^2}, \\ 0 &= 1 - \lambda \frac{2y}{b^2}, \\ 0 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \end{aligned}$$

[65]「犯人は確かに存在し、この部屋の中にいる」、「(もし存在するならば) 犯人は男性である」、「この部屋の中に男性は一人だけいる」ならば、この部屋にいる唯一の男性が犯人である。

であり、

$$(x,y,\lambda)=\pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)\quad(\text{複号同順}).$$

$$f\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\pm\sqrt{a^2+b^2}\quad(\text{複号同順}).$$

f が最大値、最小値を持つことは既に分かっているから、これらがその最大値、最小値に他ならない。すなわち、$(x,y)=(a^2/\sqrt{a^2+b^2},b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ のとき最大値 $\sqrt{a^2+b^2}$, $(x,y)=(-a^2/\sqrt{a^2+b^2},-b^2/\sqrt{a^2+b^2})$ のとき最小値 $-\sqrt{a^2+b^2}$. ■

問 C.10 $f(x,y):=x+y$, $g(x,y):=\dfrac{x^2}{4}-y^2-1$, $N_g:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)=0\}$ とする。

(1) N_g の概形を描け。

(2) N_g 上の点 $(2\sqrt{2},1)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) Lagrange の未定乗数法により、N_g 上での f の極値の候補をすべて求めよ。

(4) N_g 上での f の値の範囲を求めよ。

問 C.11 (最短距離は垂線で実現される) $\mathbb{R}^3$ の開集合 Ω で定義された C^1 級関数 $g\colon\Omega\to\mathbb{R}$ が、$\nabla g(x,y,z)\neq 0$ ($(x,y,z)\in\Omega$) を満たすとする。また $P(a,b,c)$ は $\mathbb{R}^3$ 内の定点とする。このとき $N_g:=\{(x,y,z)\in(x,y,z)\in\Omega\mid g(x,y,z)=0\}$ は曲面となるが、N_g 上の点 $Q(x_0,y_0,z_0)$ で、P からの距離が最小となるものが存在するならば、それは P から N_g に下ろした垂線の足であることを示せ。

(**注意**　多くの場合に「最短距離＝垂線の長さ」が成り立つことを知っていると思うが、これは上に示すような形で (かなり一般に) 成り立ち、証明も出来る、ということである。難しいことを問われているようだが、$\overrightarrow{PQ}=(x_0-a,y_0-b,z_0-c)$ が、法線ベクトル $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ と平行ということで、やってみるとすごく簡単である。) ■

問 C.12 (相加平均と相乗平均) n を任意の自然数とする。n 個の任意の正数 x_1, x_2, …, x_n に対して、不等式

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$$

が成り立ち、等号が成立するためには

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

が必要十分であることを示せ (相加平均 $\geq$ 相乗平均)。

(**注意**　これは凸関数の性質を用いて証明するのが簡単であるが、Lagrange の未定乗数法によって証明することも出来る。) ■

問 C.13 (対称行列の対角化) スピヴァックの有名な教科書 [17] に載っている次の問題 (**5-17**) の (a) を解け。(普通、固有値は特性多項式の根として特徴づけられて存在証明されるが、ここでは固有値と固有ベクトルを、条件付きの最大値問題の解として得ようということである。いわゆる Rayleigh の原理の基礎となる事実。)

$T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を対称線型変換, $A = (a_{ij})$ を T の行列とする ($a_{ij} = a_{ji}$).

(a) $f(x) = \langle Tx, x\rangle = \sum a_{ij}x^ix^j$ に対し，$D_kf(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x^j$ であることを示せ．$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ 上での f の最大値を考えることにより，$Tx = \lambda x$ となる $x \in S^{n-1}$ および $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ.

(b) この x に対し，$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle = 0\}$ と置くとき，$T(V) \subset V$ および $T\colon V \to V$ が対称線型変換であることを示せ.

(c) T の固有ベクトルから成る $\mathbb{R}^n$ の基底が存在することを示せ.

(b), (c) は多くの線形代数のテキストに書いてあるので探せば見つかると思う。自力で (b), (c) を解いてみたくなった人のために: 対称線型変換の定義については、やはり問題 (**4-11**) 中で定義されている。

T を V 上の内積，$f\colon V \to V$ を線型変換とする．$x, y \in V$ に対して $T(x, f(y))) = T(f(x), y)$ が成り立つとき，f を T に関する**対称変換**と言う．$v_1, \cdots, v_n$ が T に関する正交基底 (正規直交基底のこと)，この基底に関する f の行列 $A = (a_{ij})$ が対称行列 (すなわち $a_{ij} = a_{ji}$) であることを示せ.

D　陰関数定理を覚える

結構長いから、段階的に詳細化するのが一つの手である。これを説明してみよう。 陰関数定理とは、授業でも言ったのだが、2 変数の

$$F(x, y) = 0$$

を 1 つの変数 (ここで y とする) について

$$y = \varphi(x)$$

のように解くための定理であり、そのために一番重要な仮定が

$$\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

である[66]。つまり、もの凄く乱暴に言うと

第 1 近似

$\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ ならば、$F(x, y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ と解ける。

これを見ると、(a, b) って一体なんだろう？φ って一体なんだろう？「解ける」とはどういうことか？と疑問が湧いて来る (そうでないといけない)。例えば、まず (a, b) について少し書き

[66] この仮定がもしも覚えにくければ、F が 1 次関数、つまり $F(x, y) = Ax + By + c$ の場合を考えると良いかもしれない。つまり $Ax + By + c = 0$ から、$By = -Ax - c$ としておいて、次にやりたいのは B^{-1} を左からかけること。そのためには $\det B \neq 0$ という仮定をおきたい。そして $B = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ である。ということで、仮定が $\det \dfrac{\partial F}{\partial t} \neq 0$ であるのはもっともらしい。

足すことにしよう。$F(x,y)=0$ が「全体で」解けることは一般には望めなくて、注目している点の近くだけで解けることくらいしか期待できない。その注目している点が (a,b) ということだ。それは $F(x,y)=0$ の上にある。そこで次のようにする。

第 2 近似

$F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ ならば、$F(x,y)=0$ は、(a,b) のある近傍で $y=\varphi(x)$ と解ける。

φ というのは、陰関数で、この存在を主張しているのが大事なところ、という話もした。そこでそれをはっきり言ってみよう。

第 3 近似

$F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ ならば、ある C^1 級の関数 φ が存在して、(a,b) のある近傍で、$F(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

大部よくなって来た。採点基準は実は結構甘いのであまり言いたくないが、それによるとこの状態の答案には (満点はやらないが) 結構イイ点がつく、とだけ言っておこう。次がちょっと大変だ。ある近傍と言うのが $U\times V$ である。その U,V というのが、φ については定義域と終域、つまり $\varphi\colon U\to V$ で、U は a の開近傍、V は b の開近傍ということである。これらは一部だけ書いて全部は書かないというのは変なので、次は一気に書くことが増える (と言っても分量で 1 行未満の増加)。

第 4 近似

$F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U\to V$ が存在して、$\forall(x,y)\in U\times V$ について、$F(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

お好みならば、黒板文体もあるな。

第 4 近似′

$F(a,b)=0$, $\det\dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0\Longrightarrow(\exists U\colon a$ のある開近傍$)$ $(\exists V\colon b$ のある開近傍$)$ $(\exists\varphi\colon U\to V$ C^1 級$)$ s.t. $\forall(x,y)\in U\times V\quad F(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$.

そろそろ F についても、ちゃんと書かないとまずいだろう。

Ω は $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ の開集合で、$F\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b)\in\Omega$ とする。

というのを書き足す。C^1 というのは、そんなに難しくないであろう。$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ や $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ が出て来るのだから。x が m 次元ベクトル、y が n 次元ベクトルとするとき、F の値も n 次元ベクトルというのが押えておきたいところである。これも授業中にしゃべったが、そうしておくことで、$\dfrac{\partial F}{\partial y}$ が正方行列になって (そうでないと det も考えられない)、まともな逆が存在する可能性か生じるのである (ここら辺は線形代数がちゃんと身についているかだな)。

第 5 近似

Ω は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の開集合で、$F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b) \in \Omega$ とする。$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U \to V$ が存在して、$\forall (x,y) \in U \times V$ について、$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ が成り立つ。

後は $U \times V \subset \Omega$ を入れるくらいか。導関数の公式 $\varphi'(x) = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$ は書いておかなくても、φ が C^1 と分かっていれば後から自前で出せる (出せないといけない)。

第 6 近似

Ω は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の開集合で、$F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級の写像とし、$(a,b) \in \Omega$ とする。$F(a,b)=0$, $\det \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ ならば、a のある開近傍 U, b のある開近傍 V, ある C^1 級の関数 $\varphi\colon U \to V$ が存在して、$\forall (x,y) \in U \times V$ について、$F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$, $U \times V \subset \Omega$ が成り立つ。

これで一応の出来上がり。

E　多変数実数値関数に関する中間値の定理

多変数関数では、区間 $[a,b]$ をどのように一般化するかが問題である。結論を先に言うと、ある意味で区間を一般化した「連結集合」を用いる。

定義 E.1 (連結集合) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ とするとき、Ω が**連結** (**connected**) であるとは、Ω 内の任意の 2 点 x, y に対して、Ω 内の連続曲線で x と y を結ぶものが存在する、すなわち

$$(\forall x \in \Omega)\ (\forall y \in \Omega)\ (\exists \varphi\colon [0,1] \to \Omega \text{ 連続}) \quad \varphi(0)=x \text{ かつ } \varphi(1)=y$$

が成り立つことをいう。

注意 E.2 (連結性の定義について) 実は、一般の位相空間論においては、連結性は、上とは違った (あまり直観的でない) やり方で定義される。上の定義の条件を満足する集合は、**弧状連結**(こじょうれんけつ) (**arcwise connected**) と呼ばれるのが普通である。しかし、$\mathbb{R}^n$ の開集合においては、連結＝弧状連結なので、ここでは簡単で直観的な定義法を採用した。連結性の一般的な定義については、講義科目「トポロジー」で学ぶことが出来る。■

$\Omega \subset \mathbb{R}$ とするとき、Ω が連結であるためには、Ω が区間であることが必要十分である。

問　そのことを証明せよ。

定理 E.3 ((多変数関数に関する) 中間値の定理) Ω は $\mathbb{R}^n$ の連結な部分集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は連続ならば、次のことが成り立つ。

$$(\forall a \in \Omega)\ (\forall b \in \Omega)\ (\forall k \in \mathbb{R}\colon f(a) < k < f(b))\ (\exists c \in \Omega) \quad f(c)=k.$$

(板書の図が大事なのです…手書きのを取り込むかな？)

証明　Ω が連結であるという仮定から、a と b を結ぶ Ω 内の曲線 φ が取れる:

$$\varphi\colon [\alpha,\beta] \to \Omega \text{ 連続}, \quad \varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)=b.$$

このとき $f \circ \varphi\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ は、連続関数の合成なので連続関数であり、

$$f \circ \varphi(\alpha) = f(\varphi(\alpha)) = f(a) < k < f(b) = f(\varphi(\beta)) = f \circ \varphi(\beta).$$

ゆえに 1 変数関数の中間値の定理から

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ s.t. } f \circ \varphi(\gamma) = k.$$

そこで $c := \varphi(\gamma)$ とおけば、 $f(c) = k$ となる。 ■

F ロピタルの定理

(工事中)

ロピタルの定理は必要不可欠とは言えない (と筆者は信じるが)、有名であるので、簡単に紹介しておくことにする。

この節の内容は、杉浦 [2] 第 II 章 §2 を参考にした。

命題 F.1 (Cauchy の第二平均値定理) $I = [a, b]$, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ は連続で、f と g は開区間 (a, b) で微分可能、$g(a) \neq g(b)$, そして

($\sharp$) f' と g' は (a, b) で同時に 0 にならない $\quad (i.e., (\forall x \in (a, b)) \quad f'(x) \neq 0 \vee g'(x) \neq 0)$

と仮定する。このとき

$$(\exists c \in (a, b)) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

注意 (a, b) で $g' \neq 0$ であるならば、もちろん ($\sharp$) は成立する。

証明 $\varphi(x) := f(x)\,(g(b) - g(a)) - g(x)\,(f(b) - f(a))$ $(x \in I)$ とおくと、φ は $I = [a, b]$ で連続かつ (a, b) で微分可能、そして

$$\varphi(a) = f(a)\,(g(b) - g(a)) - g(a)\,(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - g(a)f(b),$$

$$\varphi(b) = f(b)\,(g(b) - g(a)) - g(b)\,(f(b) - f(a)) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$$

であるから、$\varphi(a) = \varphi(b)$. ゆえに Rolle の定理が適用できて、

$$(\exists c \in (a, b)) \quad 0 = \varphi'(c) = f'(c)\,(g(b) - g(a)) - g'(c)\,(f(b) - f(a))$$

であるから、仮定 ($\sharp$) と $g(b) \neq g(a)$ より $g'(c) \neq 0$ が導かれ、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \blacksquare$$

命題 F.2 (ロピタルの定理: 有限の a に近付けるとき、分母分子の極限が 0 の場合) f と g は $\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) で定義されて微分可能、

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} f(x) = \lim_{\substack{x>a\\x\to a}} g(x) = 0,$$

$$(\exists\delta>0)(\forall x\in(a,a+\delta))\quad g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0.$$

さらに

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が確定するならば ($A\in\mathbb{R}$, $A=\infty$, $A=-\infty$ いずれの場合も)

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

この命題は右極限だけを問題にしているが、左極限に対しても当然同様の命題が成り立つ。ゆえに両側極限についても同様の命題が成り立つ。

証明

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x\in(a,b)) \\ 0 & (x=a), \end{cases} \qquad \widetilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x\in(a,b)) \\ 0 & (x=a) \end{cases}$$

で定義した $\widetilde{f}$ と $\widetilde{g}$ を考えるが、簡単のため、それぞれ f, g と書くことにする。

$\forall x\in(a,b)$ に対して、Cauchy の第二平均値定理の仮定が満たされるので、$\exists c_x\in(a,x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

条件 $x>a$ を保ちつつ $x\to a$ とするとき、$c_x>a$, $c_x\to a$ となるので、

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{\substack{x>a\\x\to a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.\blacksquare$$

系 F.3 (ロピタルの定理: 無限大に近付けるとき、分母分子の極限が 0 である場合) f と g は $\mathbb{R}$ の開区間 (a,∞) で定義されていて微分可能、

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,$$

$$(\exists R\in(a,\infty))(\forall x\in(R,\infty))\quad g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0.$$

さらに

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が確定するならば ($A\in\mathbb{R}$, $A=\infty$, $A=-\infty$ いずれの場合も)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

もちろん $x\to-\infty$ の場合も同様のことが成立する。

証明　一般性を失うことなく $a>0$ と仮定して良い。$t=1/x$ という変数変換を行う。すなわち

$$F(t) := f\left(\frac{1}{t}\right),\quad G(t) := g\left(\frac{1}{t}\right)\quad (t\in(0,1/a))$$

で F と G を定義すると、F と G は $(0,1/a)$ で定義されて微分可能、

$$F'(t)=-t^{-2}f'\left(\frac{1}{t}\right),\quad G'(t)=-t^{-2}g'\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$\lim_{t\to+0}F(t)=\lim_{t\to+0}G(t)=0,$$

$$(\exists R'\in(0,1/a))(\forall t\in(0,R'))\quad G(t)\neq 0\wedge G'(t)\neq 0,$$

さらに

$$\lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

ゆえに

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=A.■$$

命題 F.4 (ロピタルの定理: 有限の a に近付けるとき、分母が無限大に発散する場合) f と g は $\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) で定義されて微分可能、

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}}g(x)=\infty,$$

$$(\exists\delta>0)(\forall x\in(a,a+\delta))\quad g(x)\neq 0\wedge g'(x)\neq 0.$$

さらに

$$(\exists A\in\mathbb{R})\quad \lim_{\substack{x>a\\x\to a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

が成り立つならば

$$\lim_{\substack{x>a\\x\to a}}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

証明　$0<\varepsilon<1$ を満たす任意の ε に対して、仮定 $\lim_{\substack{x>a\\x\to a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ より、$\delta>0$ を十分小さく取ると、$\forall x\in(a,a+\delta]$ に対して、

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}.$$

この δ に対して

$$\sup_{x\in(a,a+\delta]}\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|\leq|A|+\frac{\varepsilon}{3}\leq|A|+1.$$

必要ならば δ を小さく取り直すことにより、任意の $x\in(a,a+\delta]$ に対して、$g'(x)\neq 0$ として良い。平均値の定理より、任意の $x\in(a,a+\delta)$ に対して、$g(x)-g(a+\delta)\neq 0$.

　このとき $\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$ より、b' を $a<b'<a+\delta$ かつ a に十分近く取ると

$$\left|\frac{f(a+\delta)}{g(x)}\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{かつ}\quad\left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right|(1+|A|)\leq\frac{\varepsilon}{3}\quad(a<x<b')$$

とできる。各 $x\in(a,b')$ に対しコーシーの平均値の定理から、$\xi_x\in(x,a+\delta)$ が存在して

$$\frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

これを恒等式

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \cdot \frac{f(x)-f(a+\delta)}{g(x)-g(a+\delta)}$$

に代入して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f(a+\delta)}{g(x)} - \frac{g(a+\delta)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

ゆえに $x \in (a, b')$ に対して

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| + \left|\frac{f(a+\delta)}{g(x)}\right| + \left|\frac{g(a+\delta)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\right| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \blacksquare$$

この他にも $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ の場合、さらに $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ の場合などがある。$2^3 = 8$ 個の場合がある？全部証明を清書しろと言われたら、ちょっと憂鬱。

例 F.5 $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ 形の不定形である．$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. ■

例 F.6 $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$ は $\frac{0}{0}$ 形の不定形．$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2} = \infty$. ■

$f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ のとき $f(x)g(x)$ の極限を $0 \cdot \infty$ 形の不定形という．$\infty - \infty$ 形，0^0 形，∞^0 形，1^∞ 形なども同様の意味である．これらも適当な変形を行うことにより $0/0$ 形や ∞/∞ 形に帰着できる．

例 F.7 $\lim_{x\to +0} x \log x$ は $0 \cdot \infty$ 形の不定形．次のように変形すれば ∞/∞ 形に帰着して求まる．$\lim_{x\to +0} x \log x = \lim_{x\to +0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$. ■

例 F.8 $\lim_{x\to +0} (\mathrm{cosec}\ x - \cot x)$ は $\infty - \infty$ 形の不定形．これを次のように変形すれば $0/0$ 形に帰着して極限が求められる．

$$\lim_{x\to +0} (\mathrm{cosec}\ x - \cot x) = \lim_{x\to +0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0. \blacksquare$$

例 F.9 $\lim_{x\to +0} x^x$ は 0^0 形の不定形．x^x の対数をとれば（先ほどの例より）$\lim_{x\to +0} x \log x = 0$ となるので $\lim_{x\to +0} x^x = \lim_{x\to +0} e^{x \log x} = 1$. ■

例 F.10 $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ は 1^∞ 形の不定形．対数を取ったときの極限は

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}/\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1.\end{aligned}$$

したがって $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ となる（指数関数を微分するときにこの極限値を使うので循環論法のきらいはあるが）．■

例 F.11 (不定形でない場合の誤った適用例) $\lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$ であるが分母分子を微分して極限を取ると $\lim_{x\to +0} -\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$. ■

このような使い方をしてはならない.

余談 F.12 • ロピタルとは誰？Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661–1704). 微分積分学に関する最初のテキストの「著者」である。

- ロピタルの定理は誰が発見した？実はヨハン・ベルヌーイ。
- この定理の仮定を正確に覚えられない人が多い。当然、仮定の条件をチェックしようとしない人が多いことになる。
- 使えない場合に使おう (要するに間違いになる) とする人が後を絶たない。
- 不定形でない場合、$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ の場合は、a の十分近くで $g(x) \neq 0$ となり簡単だけれど、$\lim_{x\to a} g(x) = 0$ の場合は用心深く歩く必要がある。$\forall x \neq a\ g(x) \neq 0 \land g'(x) \neq 0$ は定理の仮定として必要になる。これをチェックすることが必要なのか？疑わしきは罰せず？
- 私の師匠はロピタルの定理がお気にめさない (らしい)。
- 命題 F.4 を適用するような場合に、$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ のチェックをしていないのでダメだ、とか言い出す採点者もいたりして… (先生、それは不要です)
- そもそも、これを使うことで簡単に解けるような問題は入試に出すべきでない、という意見をお持ちの先生は多い。
- 一方、ほとんどの場合に、この定理を使わなくても極限を求めることは難しくない。
- 私自身は最初は中立的 (小うるさいことは言わなくて良いじゃないか) だったのだけれど、段々嫌になってきました (苦笑)。