数学解析 第 12 回

～ 開集合と閉集合 (2), コンパクト性と Weierstrass の最大値定理 ～

桂田 祐史

2020 年 7 月 27 日

目次

本日の内容&連絡事項

- 期末レポートについて注意事項説明
- 本日は、前回の続き (閉集合の点列による特徴付け) を済ませたあと、コンパクト性と Weierstrass の最大値定理を解説し、予定された 12 回分の講義を終了する。
- 宿題 7 を出します (内容は先週公開したものから変更なし)。締め切りは 7 月 30 日 18:00. Oh-o! Meiji に提出。ネットワーク障害など起こっていない限り、そのタイミングで解答 PDF を公開します。

期末レポート注意事項

1. Oh-o! Meiji で 7 月 31 日 (土曜)12:00 課題発表。課題 PDF は早めに保存しておくこと。授業 WWW サイト link にも置いておきます。
2. 締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。A4 サイズの PDF で、なるべく単一のファイルにして下さい。10MB の容量制限以上のサイズになった場合は、複数の PDF にして、追加提出して下さい。コンピューターで数式が正しく書けない場合は無理をせず、手書きで解答したものをスキャンした PDF を提出して下さい。
3. 何か問題が起こった場合は、出来るだけ早くメールで連絡・相談して下さい。障害などが起こった場合は、締め切りの延期等をする可能性があります。
4. メールアドレスは、Oh-o! Meiji の「シラバスの補足」に書いてありますが、それも早めにメモしておくことを勧めます。
5. 質問に対する回答や、締め切りの延期などは、Oh-o! Meiji と授業 WWW サイトで公開し、公開したことを Oh-o! Meiji のお知らせ機能を使って通知します。

7.10 閉集合の点列による特徴づけ

定理 (閉集合の点列による特徴づけ)

$F \subset \mathbb{R}^N$ に対して、次の (i),(ii) は同値である。

(i) F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である。

(ii) F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

7.10 閉集合の点列による特徴づけ

定理 (閉集合の点列による特徴づけ)

$F \subset \mathbb{R}^N$ に対して、次の (i),(ii) は同値である。

(i) F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である。

(ii) F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

証明 (i)⇒(ii) (i) (F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合) を仮定する。$\{a_n\}$ は F 内の点列、$a \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。$a \in F$ を背理法で示そう。$a \notin F$ と仮定すると、$a \in F^{\complement}$ で、$F^{\complement}$ は $\mathbb{R}^N$ の閉集合であるから

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \subset F^{\complement}.$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ より、十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して、$a_n \in B(a;\varepsilon)$ となる。ゆえに $a_n \in F^{\complement}$. これは $a_n \in F$ であることに矛盾する。ゆえに $a \in F$.

7.10 閉集合の点列による特徴づけ (証明続き)

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が $\mathbb{R}^N$ の閉集合でないと仮定すると、F^C は $\mathbb{R}^N$ の開集合ではないので、ある $a \in F^C$ が存在して

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a; \varepsilon) \not\subset F^C.$$

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が $\mathbb{R}^N$ の閉集合でないと仮定すると、$F^{\complement}$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合ではないので、ある $a \in F^{\complement}$ が存在して

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \not\subset F^{\complement}.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ を意味する。

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ として、これを用いると、

$a_n \in B(a;\frac{1}{n}) \cap F$ となる a_n が存在する。

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が $\mathbb{R}^N$ の閉集合でないと仮定すると、F^C は $\mathbb{R}^N$ の開集合ではないので、ある $a \in F^C$ が存在して

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \not\subset F^C.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ を意味する。

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、$\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ として、これを用いると、

$a_n \in B(a; \frac{1}{n}) \cap F$ となる a_n が存在する。こうして作った $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は F 内の点列で、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす。(ii) を仮定しているので $a \in F$.

再掲 (ii)

F 内の任意の点列 $\{a_n\}$ に対して、$\{a_n\}$ が $\mathbb{R}^N$ で収束するならば、その極限は F に属する。

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定して、(i) を背理法で示す。F が $\mathbb{R}^N$ の閉集合でないと仮定すると、F^C は $\mathbb{R}^N$ の開集合ではないので、ある $a \in F^C$ が存在して

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad B(a;\varepsilon) \not\subset F^C.$$

これは $B(a;\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$ を意味する。

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、$\varepsilon := \dfrac{1}{n}$ として、これを用いると、

$a_n \in B(a; \frac{1}{n}) \cap F$ となる a_n が存在する。こうして作った $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は F 内の点列で、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たす。(ii) を仮定しているので $a \in F$. これは $a \in F^C$ に矛盾する。ゆえに F は $\mathbb{R}^N$ の閉集合である。 □

定理 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明

定理 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明　証明は、1 次元のときとほぼ同様である。まず (1 次元のときと同様に)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。

定理 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明　証明は、1 次元のときとほぼ同様である。まず (1 次元のときと同様に)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理 (ただし多次元版) によって、収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。

定理 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明　証明は、1 次元のときとほぼ同様である。まず (1 次元のときと同様に)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理 (ただし多次元版) によって、収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。$c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおくと、収束列の部分列は同じ極限を持つことから

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \sup_{x\in K} f(x).$$

定理 (Weierstrass の最大値定理 (多次元版))

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値、最小値が存在する。

証明　証明は、1 次元のときとほぼ同様である。まず (1 次元のときと同様に)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{x\in K} f(x)$$

を満たす K 内の点列 $\{x_n\}$ が存在する。K は有界であるから、
Bolzano-Weierstrass の定理 (ただし多次元版) によって、収束部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在する。$c := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ とおくと、収束列の部分列は同じ極限を持つことから

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = \sup_{x\in K} f(x).$$

K は閉集合であるから、上の定理により $c \in K$. f は c で連続であるから

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(c).$$

ゆえに $f(c) = \sup f(x)$. ゆえに $f(c)$ は f の最大値である。

多次元の場合、最大・最小問題は１次元のように簡単には解けない。

多次元の場合、最大・最小問題は１次元のように簡単には解けない。
増減表の多次元への拡張はできないことが大きい。

多次元の場合、最大・最小問題は１次元のように簡単には解けない。増減表の多次元への拡張はできないことが大きい。微積分の入門テキストには、「極値を求めて極大極小を判定せよ。」という問題が多い

多次元の場合、最大・最小問題は 1 次元のように簡単には解けない。増減表の多次元への拡張はできないことが大きい。微積分の入門テキストには、「極値を求めて極大極小を判定せよ。」という問題が多い (最大値、最小値を求めよ、とは言ってない)。

$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合における最大値・最小値を求める問題は比較的簡単である。

例題 1　xy 平面上で, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする三角形 (内部と周を含む) を K とするとき、関数 $f(x,y)=2x^3+6xy^2-2x$ の K における最大値と最小値を求めよ.

多次元の場合、最大・最小問題は 1 次元のように簡単には解けない。増減表の多次元への拡張はできないことが大きい。微積分の入門テキストには、「極値を求めて極大極小を判定せよ。」という問題が多い (最大値、最小値を求めよ、とは言ってない)。

$\mathbb{R}^n$ の有界閉集合における最大値・最小値を求める問題は比較的簡単である。

例題 1　xy 平面上で, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ を頂点とする三角形 (内部と周を含む) を K とするとき、関数 $f(x,y)=2x^3+6xy^2-2x$ の K における最大値と最小値を求めよ.

解答の方針　K は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であるから、Weierstrass の最大値定理によって、f の K 上の最大値と最小値が存在することがわかる。K の内部で最大・最小になる可能性は、$f'(x,y)=0$ から調べることができる。内部で最大・最小にならない場合、K の内部を除いた境界 ∂K (これは 3 辺の合併) で最大・最小になるが、∂K での f の最大・最小は 1 変数関数の問題として調べることができる。

類題　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積が最大のものを求めよ

類題　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積が最大のものを求めよ (三角形版の等周問題 —

類題　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積が最大のものを求めよ (三角形版の等周問題 — 答は正三角形)。

類題　正数 s が与えられたとき、周の長さが $2s$ である三角形のうちで面積が最大のものを求めよ (三角形版の等周問題 — 答は正三角形)。

解答の方針　3 辺を a, b, c とすると、面積 S はヘロンの公式

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で求められる。$a+b+c=2s$ であるから、2 変数関数の最大値問題となる。“自然に考えると” 定義域 Δ (自分で考えてみよう) は開集合であるが、有界閉集合 $\overline{\Delta}$ 上の最大値を求めれば解決する。

例題 2　$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$, $f(x, y, z) = x + y + z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるので、Weierstrass の最大値定理により、K における f の最大値・最小値が存在することが分かる。

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるので、Weierstrass の最大値定理により、K における f の最大値・最小値が存在することが分かる。最大値、最小値はそれぞれ極大値、極小値であるから、Lagrange の未定乗数法で極値の 1 つとして探し出せる。後は少し考えるだけで解ける。 □

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ \middle|\ \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるので、Weierstrass の最大値定理により、K における f の最大値・最小値が存在することが分かる。最大値、最小値はそれぞれ極大値、極小値であるから、Lagrange の未定乗数法で極値の 1 つとして探し出せる。後は少し考えるだけで解ける。 □

K が $\mathbb{R}^3$ の閉集合であることは、もうノーヒントで分かってほしい。K が有界であることは、直観的に原点中心半径 3 の閉球に含まれることから分かる。

例題 2　$K=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1\right\}$, $f(x,y,z)=x+y+z$ とするとき、f の K における最大値、最小値を求めよ。

解答の方針　**Lagrange の未定乗数法**という、条件付き極値問題を解くための方法を学んだはずである。それは極値であるための 1 つの必要条件を述べた定理であり (極値の探索法というべき？)、それ自身は、最大値・最小値について直接は言及していない。K は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるので、Weierstrass の最大値定理により、K における f の最大値・最小値が存在することが分かる。最大値、最小値はそれぞれ極大値、極小値であるから、Lagrange の未定乗数法で極値の 1 つとして探し出せる。後は少し考えるだけで解ける。 □

K が $\mathbb{R}^3$ の閉集合であることは、もうノーヒントで分かってほしい。K が有界であることは、直観的に原点中心半径 3 の閉球に含まれることから分かる。念のため証明しておく。$\boldsymbol{x}=(x,y,z)\in K$ とするとき、

$$|\boldsymbol{x}|^2=x^2+y^2+z^2\le 9\left(\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)=9\cdot 1=9 \quad ゆえに \quad |\boldsymbol{x}|\le 3. \quad \square$$

例題 3　方程式 $ax + by + cz + d = 0$ $((a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},\ d \in \mathbb{R})$ で表される空間内の曲面 (平面) を P とする。点 (x, y, z) が P 上を動くとき、$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の最小値が存在することを示せ。

例題 3　方程式 $ax + by + cz + d = 0$ $((a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},\ d \in \mathbb{R})$ で表される空間内の曲面 (平面) を P とする。点 (x, y, z) が P 上を動くとき、$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の最小値が存在することを示せ。

幾何学的に考えて、原点 O から平面 P に下ろした垂線 OH の長さの 2 乗が f の最小値と分かり、そのことを証明するのも難しくはないが、最小値の存在を Weierstrass の最大値定理を用いて証明してみよう。

解答　P 上の点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を 1 つ取り、$R := \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, $D := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x, y, z) \le R^2\right\}$ とおく。P を

$$P = P \cap \left(D \cup D^{\complement}\right) = (P \cap D) \cup (P \cap D^{\complement}) \quad (A \text{ より近い点, 遠い点})$$

と分解すると、$P \cap D$ は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合であるから、f は $P \cap D$ における最小値 $m = f(\alpha, \beta, \gamma)$ を持つ。$(\alpha, \beta, \gamma) \in D$ であるから、$m = f(\alpha, \beta, \gamma) \le R^2$. 一方 $P \cap D^{\complement}$ においては、$f(x, y, z) > R^2$ であるから、m は f の P 全体における最小値である。

8.3 コンパクト集合

「コンパクト」という言葉は「トポロジー」で学ぶ。「数学解析」の授業ではその説明を省略し、次の定理も (i) ⇔ (ii) のみ証明する。

定理 ($\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合の特徴づけ)

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 K について、次の 3 つの条件は互いに同値である。

1. (i) K は有界閉集合である。
2. (ii) K 内の任意の点列は収束部分列を持ち、その極限は K に属する。(この条件を満たすとき、K は**点列コンパクト**であるという。)
3. (iii) K の任意の開被覆に対し、有限部分被覆が存在する。(この条件を満たすとき、K は**コンパクト** (compact) であるという。)

(i)⇔(iii) は **Heine-Borel の定理**と呼ばれる。

8.3 コンパクト集合

「コンパクト」という言葉は「トポロジー」で学ぶ。「数学解析」の授業ではその説明を省略し、次の定理も (i) $\Leftrightarrow$ (ii) のみ証明する。

定理 ($\mathbb{R}^N$ のコンパクト集合の特徴づけ)

$\mathbb{R}^N$ の部分集合 K について、次の 3 つの条件は互いに同値である。

1. (i) K は有界閉集合である。
2. (ii) K 内の任意の点列は収束部分列を持ち、その極限は K に属する。(この条件を満たすとき、K は**点列コンパクト**であるという。)
3. (iii) K の任意の開被覆に対し、有限部分被覆が存在する。(この条件を満たすとき、K は**コンパクト** (compact) であるという。)

(i)$\Leftrightarrow$(iii) は **Heine-Borel の定理**と呼ばれる。

証明　**(i)$\Rightarrow$(ii)** K は有界であるから、Bolzano-Weierstrass より収束部分列を持つ。K は閉集合であるから、その極限は K に属する。

(ii)⇒(i) (ii) を仮定する。

(K が閉集合であること) K 内の点列 $\{a_n\}$ が収束すれば、その極限 a は必ず K に含まれることを示せば K が閉集合であると分かる (閉集合の点列による特徴づけ)。仮定 (ii) から、部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a'\in K$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a'$. ところで、一般に収束列の部分列は同じ極限を持つ収束列であるから、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 極限の一意性から $a = a'$. ゆえに $a\in K$.

(ii)⇒(i)　(ii) を仮定する。

(K が閉集合であること) K 内の点列 $\{a_n\}$ が収束すれば、その極限 a は必ず K に含まれることを示せば K が閉集合であると分かる (閉集合の点列による特徴づけ)。仮定 (ii) から、部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a'\in K$ が存在して、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a'$. ところで、一般に収束列の部分列は同じ極限を持つ収束列であるから、$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 極限の一意性から $a = a'$. ゆえに $a \in K$.

(K が有界であること) 背理法で証明する。K が有界でないと仮定すると、

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a_n \in K) \quad |a_n| > n.$$

こうして作った $\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は、

$$|a_{n_k}| > n_k \geq k$$

を満たすので収束しない ($\{a_{n_k}\}$ は収束するならば有界であるが、非有界なので矛盾する)。

この項を閉じるにあたり　微積分のテキストに現れる定理に、有界閉集合という条件が良く出て来るが、そのほとんどが、コンパクト空間についての定理に一般化される。Weierstrass の最大値定理も、「連続関数によるコンパクト空間の像はコンパクト」という定理の特別な場合とみなすことができる。次項では、連続関数の定積分の存在などを調べるときに役立つ一様連続性を紹介する。

8.4 一様連続性

一様連続性は、積分の基本的な議論をするときに必須の概念である。

定義 (一様連続性)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。f が Ω で**一様連続**であるとは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega)(\forall x' \in \Omega : |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$$

が成り立つことをいう。

Cf. f が Ω で連続とは

$$(\forall x \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x' \in \Omega : |x - x'| < \delta) \quad \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon.$$

(δ が x より前に出て来るかどうかがポイント。)

定理 (「コンパクト集合上の連続関数は一様連続」の特別な場合)

K は $\mathbb{R}^N$ の有界閉集合、$f\colon K \to \mathbb{R}^m$ は連続とするとき、f は K で一様連続である。

証明　背理法による。f が K で一様連続でないと仮定すると、ある正の数 ε が存在して

$$(\forall\delta>0)(\exists x\in K)(\exists x'\in K:|x-x'|<\delta)\quad\left|f(x)-f(x')\right|\geq\varepsilon.$$

$n=1,2,\cdots$ に対して $\delta:=\frac{1}{n}$ とすると、ある x_n, y_n が存在して

$$x_n\in K,\quad y_n\in K,\quad |x_n-y_n|<\frac{1}{n},\quad |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon.$$

こうして $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、(K の点列コンパクト性により) ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $a\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=a.$$

K は閉集合であるから、$a\in K$ である。このとき $\{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ も a に収束する。実際

$$\begin{aligned}|y_{n_k}-a|&=|y_{n_k}-x_{n_k}+x_{n_k}-a|\leq|y_{n_k}-x_{n_k}|+|x_{n_k}-a|\\&\leq\frac{1}{n_k}+|x_{n_k}-a|\to 0\quad(k\to\infty).\end{aligned}$$

f は a で連続であるから、

$$f(x_{n_k})\to f(a),\quad f(y_{n_k})\to f(a)\quad(k\to\infty).$$

任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon$ が (もちろん) 成り立つ。$k\to\infty$ とすると

$$0=|f(a)-f(a)|\geq\varepsilon>0.$$

これは矛盾である。ゆえに f は K で一様連続である。

今後の展望　「数学解析」この後に (1)

今年度は意識的に昨年度と同じ内容の講義をするようにこころがけた。例年は 14 回講義で、今年度は今日が 12 回目の講義である。

例年最後の 2 回は、Riemann 式の積分の定義とその基本的な性質を述べている。現時点でも

「数学解析 講義ノート」 ▸ link

が用意されているが、解説動画を用意するので随時参考にして下さい。

微積分に関係する解析学といっても幅広く深い内容がある。この講義では、ある程度話題もしぼり、説明の仕方もほどほどの準備で済むものを選び、"同様にすむ" ところは「同様にできます」で流して、半期で切り抜けるようにしている。当然のことながら、説明すれば有意義なことは他に色々ある。

駆け足で説明することでより多くの内容を紹介する誘惑もあったが、確実な理解をしてもらうこと、またそのための方法を身につけてもらうことを第一に考えて、講義内容を決めている。

「数学解析」の内容の多くは、距離空間、位相空間に一般化できる。現象数理学科でも「トポロジー」という科目で学ぶことができる。連結性やコンパクト性は、一般的な観点から学ぶと良いと思う。

以下、解析学を学ぶという観点から、今後のことを話そう。

級数について学ぶべきことがあるが、それらは「複素関数・同演習」で解説する。

現行カリキュラムを作った当初は、「数学解析」で**陰関数定理**、**逆関数定理**について解説することになっていた。いまでも講義ノートにはその内容が含まれている。陰関数定理、逆関数定理には、次のようなことが言えると思う。

(i) 証明にそれなりの手間 (1 コマ以上?) がかかるが、それだけ聞いてもピンと来ない。
(ii) その使い方を理解するにも、応用ごとにある程度の時間がかかる。

超特急で講義しても有益ではないかもしれない、と考えて最近は講義していない。

今後も解析学を学ぶ場合は、何と言っても**関数解析**を学ぶことに目を向けるべきと考える。これは無限次元空間の解析学である。単純化して述べると、関数列の収束などを考えるには、関数の適当な集合を選び、そこに位相を定めた**関数空間**を導入するのが有効だが、関数空間はたいていの場合に無限次元空間であるので、$\mathbb{R}^N$ で議論したときとは相当様子が違って来る。関数解析は、偏微分方程式に対する**変分法**や、**Fourier 解析**などにおける議論を整理するために、20 世紀に入って生まれた分野である。

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{r\to 0} r^2\left(\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\phi\sin\phi\right) = 0$$

とするのは正しいかどうか微妙です。採点する立場になると、**とても悩ましい**。「個々に固定した θ について収束する」では不十分で、「θ について一様に収束する」ことが必要です。それは多分きちんと説明するのが大変でしょう。
次のように書くことを強く勧めます。

$$\left|\frac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2}\right| = \left|r^2\left(\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\phi\sin\phi\right)\right| \le r^2 \to 0$$

θ を含んでいない r の式で上から抑えて、それが 0 に収束することをいう。

$$|y||z| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{(間違い！)}$$

yz は多項式関数なので連続だから、$\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} yz = 0\cdot 0 = 0$. ゆえに

$\lim \quad |yz| = |0| = 0$