数学解析 第 10 回

～ 極限の存在 (第 2 回), Weierstrass の最大値定理 ～

桂田 祐史

2020 年 7 月 13 日

目次

1. 本日の内容&連絡事項
2. 期末レポートについて
3. 5. 極限の存在 (後半)
   - Cauchy 列と $\mathbb{R}$ の完備性
   - 点列版 Bolzano-Weierstrass の定理, $\mathbb{R}^N$ の完備性
     - 有界, Cauchy 列の定義
     - 収束列、有界、Cauchy 列は成分ごとに判定可
     - $\mathbb{R}^N$ の完備性
     - 点列版 Bolzano-Weierstrass の定理
4. 6. Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)
   - 定理を紹介
   - 証明
   - 例
   - 使いみち
5. 問 6 の紹介, その他

本日の内容＆連絡事項

- 期末レポートについて説明する。
- 本日の授業内容
  §5「極限の存在」の後半、$\mathbb{R}$ の完備性と、$\mathbb{R}^N$ の完備性、$\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理を説明し、§6 で有界閉区間上の連続関数の最大値の存在を主張する Weierstrass の最大値定理の 1 次元版を証明する。
- 宿題 6 を出す。

期末レポートについて

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、▶ 授業 WWW サイトでも公開します。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、▸ 授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
  (PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、▸ 授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料やノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、▸ 授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料やノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの (なるべく 1 つの)PDF で提出してもらいます。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、▸ 授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料やノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの (なるべく 1 つの)PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して追加提出して下さい。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料やノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの (なるべく 1 つの)PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して追加提出して下さい。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば how_to_pdf で説明した方法で縮小出来るかもしれません。

期末レポートについて

- 課題の提示は 7 月 31 日 (土曜) 12:00, Oh-o! Meiji のレポート・システムを使って行います。なるべく当日アクセスして PDF を保存しておくことを勧めます。
- 提出締め切りは 8 月 3 日 (月曜) 18:00 です。
(PDF 化などに手間がかかることもあるので、3 時間前くらいまでに解答は済ませておくことを勧めます。)
- 課題文自体は、授業 WWW サイトでも公開します。
- 内容は問題を解いて解答をレポートする、というものです。問題の量は従来の期末試験程度で、60 分程度の時間で解答できるはずです。もちろん締め切りに間に合う限り、もっと時間をかけても構いません。
- 解答しているときに、講義資料やノート、参考書などを見ても構いませんが、他人と相談することはしないで下さい。事前によく復習しておくことを勧めます。
- A4 サイズの (なるべく 1 つの)PDF で提出してもらいます。
- ファイルサイズは Oh-o! Meiji では、10MB までという制限があります。それを超えた場合、ファイル・サイズを縮小するか、複数のファイルに分割して追加提出して下さい。
- 自分の宿題のファイルのサイズを確認しておいて下さい。1MB を大きく超える人は対策を考えて下さい。スキャンして作った PDF の場合、例えば how_to_pdf で説明した方法で縮小出来るかもしれません。
- 何かトラブルが起こった場合は、なるべく早くメールで連絡して下さい。

定義 (Cauchy 列)

$\{a_n\}$ を数列とする。$\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (Cauchy sequence, 基本列) であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

定義 (Cauchy 列)

$\{a_n\}$ を数列とする。$\{a_n\}$ が **Cauchy 列** (Cauchy sequence, 基本列) であるとは、

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。

(距離空間という言葉は知らないかもしれないが) 一般の距離空間において、上と同様に Cauchy 列が定義できる。任意の Cauchy 列が収束するような距離空間は**完備** (complete) である、という。

命題 (収束列は Cauchy 列)

任意の収束列は Cauchy 列である。

命題 (収束列は Cauchy 列)

任意の収束列は Cauchy 列である。

Proof.

$\{a_n\}$ が A に収束すると仮定する。ε を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

命題 (収束列は Cauchy 列)

任意の収束列は Cauchy 列である。

Proof.

$\{a_n\}$ が A に収束すると仮定する。ε を任意の正の数とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq N$, $m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - A + A - a_m| \\ &\leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

命題 (収束列は Cauchy 列)

任意の収束列は Cauchy 列である。

Proof.

$\{a_n\}$ が A に収束すると仮定する。ε を任意の正の数とするとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であるから、

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq N,\ m \geq N$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - A + A - a_m| \\ &\leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに $|a_n - a_m| < \varepsilon$. ゆえに $\{a_n\}$ は Cauchy 列である。 □

定理 ($\mathbb{R}$ の完備性)

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

証明　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。

定理 ($\mathbb{R}$ の完備性)

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

証明　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。
第 1 段　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。

定理 ($\mathbb{R}$ の完備性)

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

証明　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。
第 1 段　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。

定理 ($\mathbb{R}$ の完備性)

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

証明　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。
第 1 段　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N| .$$

定理 ($\mathbb{R}$ の完備性)

任意の Cauchy 列は収束列である。すなわち $\mathbb{R}$ は完備である。

証明　$\{a_n\}$ は Cauchy 列と仮定する。
第 1 段　$\{a_n\}$ は有界であることを示す。まず Cauchy 列であるから、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < 1$$

が成り立つ。このとき $n \geq N$ を満たす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N| .$$

そこで

$$R := \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$$

とおくと、R は実数であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n| \leq R$ が成り立つ。

第 2 段　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 A が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

第 2 段　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 A が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

第 3 段　$\{a_n\}$ は A に収束することを示す。

第 2 段　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 A が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

第 3 段　$\{a_n\}$ は A に収束することを示す。

　ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

第 2 段　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 A が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

第 3 段　$\{a_n\}$ は A に収束することを示す。

ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \geq N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$n \geq N$, $k \geq N$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \geq k \geq N$ が成り立つから

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

第 2 段　$\{a_n\}$ は有界であるから、Bolzano-Weierstrass の定理により、$\{a_n\}$ は収束部分列を持つ。すなわち、ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と実数 A が存在して

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

第 3 段　$\{a_n\}$ は A に収束することを示す。

ε を任意の正の数とする。$\{a_n\}$ は Cauchy 列であるから、ある自然数 N が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N)(\forall m \in \mathbb{N} : m \ge N) \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$n \ge N$, $k \ge N$ を満たす任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対して、$n_k \ge k \ge N$ が成り立つから

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon.$$

(この左辺を番号 k についての数列とみなすと) $k \to \infty$ のとき

$$|a_n - A| \le \varepsilon.$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ であることを示している。 □

完備性は非常に重要である。特にそれを用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad (\text{絶対収束級数は収束する})$$

が証明できる (これから「優級数が収束すれば収束」，Weierstrass の M-test などが導かれる — これらは、一般に完備ノルム空間 (**Banach 空間**) で成り立つ)。

完備性は非常に重要である。特にそれを用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \quad (\text{絶対収束級数は収束する})$$

が証明できる (これから「優級数が収束すれば収束」, Weierstrass の M-test などが導かれる — これらは、一般に完備ノルム空間 (**Banach 空間**) で成り立つ)。

級数については、この講義では論じる時間の余裕がないが、秋学期の「複素関数」では詳しく説明する。

多次元の場合への一般化を目指す。

多次元の場合への一般化を目指す。

Bolzano-Weierstrass の定理, Cauchy 列の収束性 (空間の完備性) などは、$\mathbb{R}^N$ の点列の場合にも成り立つ。

多次元の場合への一般化を目指す。

Bolzano-Weierstrass の定理, Cauchy 列の収束性 (空間の完備性) などは、$\mathbb{R}^N$ の点列の場合にも成り立つ。

まず、数列の場合と同様に、$\mathbb{R}^N$ の点列の「有界」、「Cauchy 列」を定義する。

(i) $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が**有界** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})\ |\boldsymbol{a}_n| \le R$.

(ii) $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が **Cauchy 列** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $(\forall m \in \mathbb{N}\colon\ m \ge N)\ |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m| < \varepsilon$.

5.5.2 収束列、有界、Cauchy 列は成分ごとに判定可

多くのことが成分ごとに考えれば良い。記述の簡単化のため $N=2$ で説明する。

命題

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^N (= \mathbb{R}^2)$ の点列であるとき、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

0. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が収束列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束列 (これは証明済み)
1. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が有界
2. $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が Cauchy 列

証明 (1) 一般に成り立つ次の不等式からすぐ分かる。

$$|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le \sqrt{2}\max\{|a_n|, |b_n|\}.$$

(2) 一般に成り立つ次の不等式からすぐ分かる。

$$|a_n - a_m|, |b_n - b_m| \le |\boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_m| \le \sqrt{2}\max\{|a_n - a_m|, |b_n - b_m|\}. \quad \square$$

定理 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。

定理 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。

証明　(やはり $N = 2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

定理 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。

証明　(やはり $N = 2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

$\mathbb{R}$ の完備性から、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はどちらも収束する。

定理 ($\mathbb{R}^N$ の完備性)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。

証明 (やはり $N = 2$ の場合に示す。)

$\{\boldsymbol{a}_n\}$ が Cauchy 列であれば、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ で定まる $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は Cauchy 列である。

$\mathbb{R}$ の完備性から、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はどちらも収束する。

ゆえに $\{\boldsymbol{a}_n\}$ は収束する。 □

5.5.4 点列版 Bolzano-Weierstrass の定理

定理 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

定理 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

証明　$\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。

$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

定理 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

証明 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists \{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B \in \mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

定理 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

証明 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A\in\mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists\{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B\in\mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

$\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\{a_{n_k}\}_k$ の部分列であるから、$\displaystyle\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} = A$.

定理 ($\mathbb{R}^N$ における Bolzano-Weierstrass の定理)

$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{\boldsymbol{a}_n\}$ が有界ならば、$\{\boldsymbol{a}_n\}$ のある部分列 $\{\boldsymbol{a}_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して、収束する。

証明　$\{\boldsymbol{a}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列として、$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ とおく。

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は有界である ($|a_n|, |b_n| \le |\boldsymbol{a}_n| \le R$)。
$\mathbb{R}$ における Bolzano-Weierstrass の定理より

$$(\exists\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{a_n\} \text{ の部分列})\,(\exists A \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

$\{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は有界であるから、やはり Bolzano-Weierstrass の定理によって

$$\left(\exists\{b_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}} : \{b_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ の部分列}\right)(\exists B \in \mathbb{R}) \quad \lim_{j\to\infty} b_{n_{k_j}} = B.$$

$\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ は $\{a_{n_k}\}_k$ の部分列であるから、$\lim_{j\to\infty} a_{n_{k_j}} = A$.
ゆえに

$$\lim_{j\to\infty} \boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} \begin{pmatrix} a_{n_{k_j}} \\ b_{n_{k_j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad \square$$

この証明は 2 次元の場合に行ったが、同じやり方で、任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathbb{R}^N$ で「同様に」出来ることは分かるであろう。

例 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin \dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。

例 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin \dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$

$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin \frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

例 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$

$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

$\sin\frac{4k\pi}{3}$ は周期 3 である。そこで $k_j = 3j$, つまり $n_{k_j} = 6j$ とすると

$$b_{n_{k_j}} = b_{6j} = \frac{1}{36j^2} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

例 ((定理を使わず) 具体的に収束部分列が作れる例)

$$\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n + \frac{1}{n} \\ \sin\dfrac{2n\pi}{3} + \dfrac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

とする。$n_k = 2k$ とすると

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty),$$
$$b_{n_k} = b_{2k} = \sin\frac{4k\pi}{3} + \frac{1}{4k^2} \quad (\text{収束しない}).$$

$\sin\frac{4k\pi}{3}$ は周期 3 である。そこで $k_j = 3j$, つまり $n_{k_j} = 6j$ とすると

$$b_{n_{k_j}} = b_{6j} = \frac{1}{36j^2} \to 0 \quad (j \to \infty).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{a}_{n_{k_j}} = \begin{pmatrix} a_{6j} \\ b_{6j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{6j} \\ \dfrac{1}{36j^2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。
(ゼミでそう言うんだけど、学生はなかなか覚えてくれないのだ…)

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)

以下の定理 (とその多次元版) が、「数学解析」の中で一番重要な結果である (と私は考えている)。名前をつけないテキストが少なくないが、この講義では、「**Weierstrass の最大値定理**」と呼ぶことにする。

関数の最大値の**存在を主張**している定理である。関数の最大値の存在を示すとき、90% 以上がこの定理を使うのではないだろうか。
(ゼミでそう言うんだけど、学生はなかなか覚えてくれないのだ…)

定理 ((1 次元版) Weierstrass の最大値定理)

$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $K=[a,b]$ とする。$f\colon K\to\mathbb{R}$ は連続とするとき、f の K における最大値が存在する。すなわち

$$(\exists c\in K)(\forall x\in K)\quad f(c)\ge f(x).$$

f の K における最大値とは、f の値域 $f(K)=\{f(x)\mid x\in K\}$ の最大値のことをいう。

同じ仮定から、f の K における最小値の存在も成立する。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　証明

証明　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　証明

証明　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

証明　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

- $f(K)$ が上に有界の場合は、S は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

証明　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

(i) $f(K)$ が上に有界の場合は、S は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

(ii) $f(K)$ が上に有界でない場合は、$S = \infty$ であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n \in K) \quad f(x_n) > n.$$

証明　まず次が成り立つことを示す。

$$(\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : K \text{ 内の数列}) \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup f(K).$$

実際、$S := \sup f(K)$ とおくとき、

(i) $f(K)$ が上に有界の場合は、S は $f(K)$ の上限であるから、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(\exists x_n \in K) \quad S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S.$$

(ii) $f(K)$ が上に有界でない場合は、$S = \infty$ であり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$(\exists x_n \in K) \quad f(x_n) > n.$$

このように $\{x_n\}$ を作ると、(i), (ii) いずれの場合も

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$$

が成り立つ。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　証明 後半

$\{x_n\}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　証明 後半

$\{x_n\}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

実は $c \in K$ である。実際、$x_{n_k} \in K$ より $a \le x_{n_k} \le b$ であるから、$k \to \infty$ とすると、(順序の保存によって) $a \le c \le b$. ゆえに $c \in [a,b] = K$.

$\{x_n\}$ は $[a, b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

実は $c \in K$ である。実際、$x_{n_k} \in K$ より $a \le x_{n_k} \le b$ であるから、$k \to \infty$ とすると、(順序の保存によって) $a \le c \le b$. ゆえに $c \in [a, b] = K$.

f は c で連続であること、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$ であることから

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = S.$$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　証明 後半

$\{x_n\}$ は $[a, b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

実は $c \in K$ である。実際、$x_{n_k} \in K$ より $a \le x_{n_k} \le b$ であるから、$k \to \infty$ とすると、(順序の保存によって) $a \le c \le b$. ゆえに $c \in [a, b] = K$.

f は c で連続であること、$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = S$ であることから

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = S.$$

ゆえに S は (∞ ではなく) 実数であり、$f(K)$ の上限であることが分かる。$S = f(c) \in f(K)$ であるから、それは f の最大値である。 $\square$

$\{x_n\}$ は $[a,b]$ に含まれるので有界である。Bolzano-Weierstrass の定理から、$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して収束する。すなわち

$$(\exists c\in\mathbb{R})\quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}=c.$$

実は $c\in K$ である。実際、$x_{n_k}\in K$ より $a\le x_{n_k}\le b$ であるから、$k\to\infty$ とすると、(順序の保存によって) $a\le c\le b$. ゆえに $c\in[a,b]=K$.

f は c で連続であること、$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=S$ であることから

$$f(c)=\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right)=S.$$

ゆえに S は (∞ ではなく) 実数であり、$f(K)$ の上限であることが分かる。$S=f(c)\in f(K)$ であるから、それは f の最大値である。 $\square$

(証明の途中で $c\in K$ を示したが、その部分が多次元化するときに問題になる。)

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　例

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　例

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

- (i) $K = [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　例

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

(i) $K = [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$

(ii) $K = (0,1)$, $f(x) = x \ (x \in K)$

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

1. $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$
2. $K=(0,1)$, $f(x)=x$ $(x\in K)$
3. $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

1. $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$
2. $K=(0,1)$, $f(x)=x$ $(x\in K)$
3. $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in K)$
4. $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}(x)$

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

(i) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$

(ii) $K=(0,1)$, $f(x)=x\ (x\in K)$

(iii) $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}\ (x\in K)$

(iv) $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}(x)$

(v) $K=[0,\infty)$, $f(x)=x$

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版)　例

K が有界閉区間、f が連続という 2 条件が満たされないと、最大値が存在しないことがある。

1. (i) $K=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases} x & (0\le x<1) \\ 0 & (x=1)\end{cases}$
2. (ii) $K=(0,1)$, $f(x)=x\ (x\in K)$
3. (iii) $K=(0,1)$, $f(x)=\frac{1}{x}\ (x\in K)$
4. (iv) $K=[0,\infty)$, $f(x)=\tan^{-1}(x)$
5. (v) $K=[0,\infty)$, $f(x)=x$

例	K は有界閉区間？	f は連続？	$\sup f(K)$	$\max f(K)$
(i)	○	×	1	存在しない
(ii)	×	○	1	存在しない
(iii)	×	○	∞	存在しない
(iv)	×	○	$\pi/2$	存在しない
(v)	×	○	∞	存在しない

有界閉区間と連続、2 条件揃えば最大値が存在する、という定理は本質をついていると思われる。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

微積分では、Rolle の定理の証明に用いられ、それを使って平均値の定理、Taylor の定理が証明される。

例えば高校で微分法を学んで以来当たり前のように使っている「ある区間で $f' > 0$ ならば、f は増加関数 $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$ である」という定理は、ふつう平均値の定理を用いて証明される。したがって、Weierstrass の最大値定理が基礎になっていると言えるだろう。

6 Weierstrass の最大値定理 (1 次元版) 使いみち

解析学、幾何学で、多くのものが関数の最大値 (または最小値) として特徴づけられ、その存在がこの Weierstrass の最大値定理を使うことで示される。それはある程度数学を学ぶと、空気のように当たり前のことと納得できるが、初学者にはこの定理のありがたみはなかなか分かりにくいかもしれない。

微積分では、Rolle の定理の証明に用いられ、それを使って平均値の定理、Taylor の定理が証明される。

例えば高校で微分法を学んで以来当たり前のように使っている「ある区間で $f' > 0$ ならば、f は増加関数 ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) である」という定理は、ふつう平均値の定理を用いて証明される。したがって、Weierstrass の最大値定理が基礎になっていると言えるだろう。

(意欲のある人は、この辺のことを、自分で色々考えてみよう。)

問 6 の紹介, その他

内容的には「多変数関数の極限についての注意」で、前回の続きのような問題である。

課題文と TEX ソース

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.pdf
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/toi6.tex

参考情報

- 多変数関数の極限の問題は次の文書に問
として載っている (p. 56, 57. 少し雑だが解答も pp. 138–142 にある)。
講義ノート
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/kaiseki/kaiseki-2020.pdf
- (今後の予定) 宿題 7 を次週 (7 月 20 日) 出して、それが今学期の最後の宿題になる (締め切りは 7 月 29 日 (水曜)12:00)。その後は期末レポートに向けて準備しておいて下さい。