

# 数学解析 第9回

～ 多変数関数の極限・連続性 (第3回), 極限の存在 (第1回) ～

桂田 祐史

2020年7月6日

# 目次

- 1 本日の内容&連絡事項
- 2 点列の極限と多変数関数の極限・連続性
  - $\infty$  のからむ  $\lim$
  - 偏微分、全微分,  $C^1$  級 (超特急の復習)
- 3 極限の存在
  - 区間縮小法
  - 中間値の定理
  - Bolzano-Weierstrass の定理
- 4 問5の解説
- 5 5.3のクイズの答え

- 本日の授業内容  
多変数関数の極限の応用として、微分に関する条件の確認の話をする。その後、数列の極限の存在の話に移る。ここは区間縮小法、中間値の定理、 $\mathbb{R}$  の完備性、Bolzano-Weierstrass の定理、…と盛り沢山である。
- 宿題 5 の解説をする。
- 授業アンケートをする。

## 4.7 $\infty$ のからむ $\lim$

(ざっと見るだけにする。「数列のとき、1変数関数のときと大体同じ」と感じてもらうことを期待している。)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{\Omega}$  とする時

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) < L$$

と定義する。

例えば次の定理が成り立つ (証明は各自に任せる)。

### 命題

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \bar{\Omega}$  とするとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

- ①  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  であれば、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$ .
- ②  $(\forall x \in \Omega) f(x) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  であれば  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ .

## 4.7 $\infty$ のからむ $\lim \quad |x| \rightarrow \infty$

多次元では  $x \rightarrow \infty$  や  $x \rightarrow -\infty$  は意味を持たないが、 $|x| \rightarrow \infty$  を考えることはある。

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の非有界な部分集合,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \overline{\Omega}$ ,  $A \in \mathbb{R}^m$  とするとき

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in \Omega : |x| > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Cf.** 複素関数  $f(z)$  についての  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$

## 4.8 偏微分、全微分、 $C^1$ 級 (超特急の復習)

$\Omega$  は  $\mathbb{R}^n$  の開集合 (開集合については後述)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  とする。

- ①  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $1 \leq j \leq n$  としたとき、 $\mathbf{f}$  が  $\mathbf{a}$  で  $x_j$  について偏微分可能であるとは、極限

$$f_{x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}$$

が存在することをいう ( $\mathbf{e}_j$  は第  $j$  成分が  $\delta_{ij}$  に等しいベクトル)。

- ②  $1 \leq j \leq n$  としたとき、 $\mathbf{f}$  が  $\Omega$  で  $x_j$  について偏微分可能であるとは、任意の  $\mathbf{a} \in \Omega$  に対して、 $\mathbf{f}$  が  $\mathbf{a}$  で  $x_j$  について偏微分可能であることをいう。

- ③  $\mathbf{f}$  が  $\Omega$  で  $C^1$ 級 (連続的微分可能) であるとは、任意の  $j \in \{1, \dots, n\}$  に対して、 $\mathbf{f}$  が  $\Omega$  で  $x_j$  について偏微分可能であり、偏導関数  $\Omega \ni \mathbf{x} \mapsto \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x})$  が  $\Omega$  で連続なこと、すなわち次式が成り立つことをいう。

$$(\forall \mathbf{a} \in \Omega) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \quad \left( \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right| = 0 \right).$$

## 4.8 偏微分、全微分、 $C^1$ 級 (超特急の復習) 続き

- iv)  $f$  が  $\mathbf{a}$  で (全) 微分可能であるとは、ある  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  が存在して、

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - A\mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、 $A$  を  $f$  の  $\mathbf{a}$  におけるヤコビ行列と呼び、 $f'(\mathbf{a})$  と表す。実は  $f'(\mathbf{a})$  の  $(i, j)$  成分は  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})$  である。

- v)  $f$  が  $\Omega$  で (全) 微分可能であるとは、任意の  $\mathbf{a} \in \Omega$  に対して、 $f$  が  $\mathbf{a}$  で全微分可能であることをいう。

「 $C^1$ 級  $\Rightarrow$  全微分可能  $\Rightarrow$  偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

3つの  $\lim$  が出て来るが、(i) は1変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも0になるかどうか問題) である。

実際には、 $C^1$ 級であることを確かめて、それで全微分可能であることが分かる、というのが多い。

## 5 極限の存在

ここまでは、数列の極限についての定理といっても、収束するという条件が仮定の中に入っていることが多かった。例外は「上に有界な単調増加数列は収束する (極限が存在する)。」という定理である。

これ以降は、**数列の極限が存在する (収束する)** ことがテーマとなる定理が多い。

## 5.1 区間縮小法

極限の存在を示すために、次の定理は使いやすい。

### 定理 (区間縮小法の原理)

$\{a_n\}$  は単調増加数列、 $\{b_n\}$  は単調減少数列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq b_n$$

が成り立つとき、次の (1),(2) が成立する。

①  $\{a_n\}, \{b_n\}$  は収束し、極限をそれぞれ  $A, B$  とするとき

$$A \leq B \quad \text{かつ} \quad [A, B] \subset [a_n, b_n].$$

②  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  であれば、 $A = B$  (つまり  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ).

## 5.1 区間縮小法 証明の前に解説

$I_n := [a_n, b_n]$  とおくと、 $I_n$  は閉区間であり、

$\{a_n\}$  が単調増加かつ  $\{b_n\}$  が単調減少  $\Leftrightarrow I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$

区間は縮小する (正確には大きくなる) が、共通部分  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [A, B]$  であり、空集合にはならない、という定理である。

念のため数理リテラシーの復習:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N}) x \in I_n\}$ .

ここで閉区間という条件は重要である。例えば  $I_n = (0, \frac{1}{n})$  のとき、

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

であるが、

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset.$$

もし  $I_n = [0, \frac{1}{n}]$  であれば、

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

## 5.1 区間縮小法 証明

証明 (i) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n \leq b_n \leq b_1$$

であるから、 $\{a_n\}$  は上に有界な単調増加数列であるので収束する。極限を  $A$  とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq A.$$

同様に  $\{b_n\}$  は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。極限を  $B$  とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \leq b_n.$$

一方、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $a_n \leq b_n$  であったから、 $n \rightarrow \infty$  として  $A \leq B$ .

(ii) もし  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$  であれば、

$$B - A = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

であるから、 $A = B$ .

□

## 5.2 中間値の定理 定理, 証明のパート 1

### 定理 (中間値の定理)

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  は連続、 $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$  とするとき、ある実数  $c \in (a, b)$  が存在して、 $f(c) = 0$ .

### 証明

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし  $f(c_0) > 0$  ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし  $f(c_0) \leq 0$  ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。いずれの場合も

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく。

(次のスライドに続く)

## 5.2 中間値の定理 証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を作ったとき、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \leq 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は共通の極限  $c \in [a, b]$  に収束する。  
 $a_n \rightarrow c$  であり、 $f$  は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \geq 0.$$

$b_n \rightarrow c$  であり、 $f$  は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \leq 0.$$

ゆえに  $f(c) = 0$ .

値が 0 であることから  $c \neq a, b$ . ゆえに  $c \in (a, b)$ . □

## 5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式  $f(x) = 0$  の近似解を求める**二分法** (bisection method) というアルゴリズムそのものである。

中間値定理の使い方については、高校数学でもある程度以上経験があるであろう。(したがって例は省略する。)

1変数の場合に、**連続関数の逆関数の存在・連続性は、しばしば中間値の定理を使って証明できる。**

- $f(x) = x^2$  ( $x \in [0, \infty)$ ) の逆として、 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sin x$  ( $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) の逆として、 $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$  (主値)
- $f(x) = e^x$  ( $x \in [0, \infty)$ ) の逆として、 $f^{-1}(x) = \log x$

## 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理** を証明する。この定理は、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って  $\mathbb{R}$  や  $\mathbb{R}^N$  の**完備性**を証明する。

さらに **Weierstrass の最大値定理** を証明する。この辺がこの科目の山場であると言えるだろう。

### 定理 (Bolzano-Weierstrass の定理)

有界な数列は収束部分列を持つ。すなわち、実数列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n| \leq R$$

を満たすならば

$$(\exists \{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ の部分列})(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c.$$

## 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理 部分列の例

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \dots$$

$a_n$  は  $-1$  と  $1$  の近くに密集する。 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は収束しない (各自示せ)。  
 $n_k = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

$n_k = 2k - 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \rightarrow -1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

この場合は、数列が簡単だったから定理を使わずに、収束部分列を具体的に構成できた。 □

部分列に慣れてもらいたい、ということで。

### クイズ

- ① どんな部分列も収束しない数列の例をあげよ。
- ② 有界ではないが、収束部分列を持つような数列の例をあげよ。  
(解答例を、この PDF の末尾に書いておきます。)

## 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明 前半

$a_1 := -R, b_1 := R$  とおく。任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $x_n \in [a_1, b_1]$ .

$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$  とおくと、次のいずれかが成立する。

Ⓐ  $x_n \in [a_1, c_1]$  となる  $n$  は無限個存在する。

Ⓑ  $x_n \in [c_1, b_1]$  となる  $n$  は無限個存在する。

(a) が成立するとき、 $a_2 := a_1, b_2 := c_1$  とおく。

(a) が成立しないとき ((b) が成立する)、 $a_2 := c_1, b_2 := b_1$  とおく。

どちらの場合も、 $x_n \in [a_2, b_2]$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は無限個存在する。

以下同様にして、 $\{a_n\}, \{b_n\}$  を定める。

## 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明 後半

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

- Ⓐ  $\{a_n\}$  は単調増加数列、 $\{b_n\}$  は単調減少数列である。
- Ⓑ 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

- Ⓒ 任意の  $k \in \mathbb{N}$  に対して、 $x_n \in [a_k, b_k]$  となる  $n \in \mathbb{N}$  は無限個存在する。  
最初の二つから、区間縮小法の原理によって、ある  $c \in [a, b]$  が存在して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

$n_1 := 1$  とおく。

$k \geq 2$  に対して、 $n_1, \dots, n_{k-1}$  まで定まったとき、 $(n > n_{k-1}) \wedge x_n \in [a_k, b_k]$  を満たす  $n \in \mathbb{N}$  ((c) から無限個存在する) のうちで、最小のものを  $n_k$  とおく。

こうして  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  を作ると、各項が自然数である狭義単調増加数列となる。  
ゆえに  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  は  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の部分列である。

$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$  であるから、はさみうちの原理より  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = c$ . □

## 問5の解説

問5の解説は手書きで行います (動画を見て下さい)。

(うっかり、連続ではないが収束するという問題を入れ忘れたので)

追加の練習問題 (v)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$  (解答は次のスライド)

## 問5の解説 追加の問題(v)の解答

$k$  を任意の実数として、 $(x, y)$  を  $y = kx$  あるいは  $x = ky^2$  に沿って  $(0, 0)$  に近づけるときの  $\lim$  を求めると、0 である (これは簡単なので任せる)。

ゆえに  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$  が収束するならば、極限は 0 以外にはありえない。

$$\left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} - 0 \right| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \leq \frac{(x^2 + y^4) y^2}{x^2 + y^4} = y^2 \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0))$$

であるから、

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} = 0. \quad \square$$

## 5.3 のクイズの答え

- Ⓐ  $a_n = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とすると、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  の任意の部分列  $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  は  $\infty$  に発散する。特に収束はしない。
- Ⓑ  $a_n = (1 + (-1)^n)n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$  の順に  $0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots$ 。有界ではないが、 $n_k = 2k$  とするとき、 $a_{n_k} = 0$  であるから、 $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  は  $0$  に収束する。