# 数学解析 第 9 回

～ 多変数関数の極限・連続性 (第 3 回), 極限の存在 (第 1 回) ～

桂田 祐史

2020 年 7 月 6 日

# 目次


1. 本日の内容&連絡事項
2. 点列の極限と多変数関数の極限・連続性
   - $\infty$ のからむ lim
   - 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)
3. 極限の存在
   - 区間縮小法
   - 中間値の定理
   - Bolzano-Weierstrass の定理
4. 問 5 の解説
5. 5.3 のクイズの答え

# 本日の内容&連絡事項

- 本日の授業内容
  多変数関数の極限の応用として、微分に関する条件の確認の話をする。その後、数列の極限の存在の話に移る。ここは区間縮小法、中間値の定理、$\mathbb{R}$ の完備性、Bolzano-Weierstrass の定理、…と盛り沢山である。
- 宿題 5 の解説をする。
- 授業アンケートをする。

# 4.7 $\infty$ のからむ lim

(ざっと見るだけにする。「数列のとき、1 変数関数のときと大体同じ」と感じてもらうことを期待している。)

# 4.7 $\infty$ のからむ lim

(ざっと見るだけにする。「数列のとき、1 変数関数のときと大体同じ」と感じてもらうことを期待している。)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする時

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U,$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) < L$$

と定義する。

# 4.7 $\infty$ のからむ lim

(ざっと見るだけにする。「数列のとき、1 変数関数のときと大体同じ」と感じてもらうことを期待している。)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とする時

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall U \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) > U,$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall L \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in \Omega : |x - a| < \delta) \quad f(x) < L$$

と定義する。

例えば次の定理が成り立つ (証明は各自に任せる)。

**命題**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\Omega}$ とするとき、以下の (1), (2) が成り立つ。

1. $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ であれば、$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$
2. $(\forall x \in \Omega)\ f(x) > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = 0$ であれば $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

# 4.7 $\infty$ のからむ lim　$|x| \to \infty$

多次元では $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ は意味を持たないが、$|x| \to \infty$ を考えることはある。

多次元では $x \to \infty$ や $x \to -\infty$ は意味を持たないが、$|x| \to \infty$ を考えることはある。

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の非有界な部分集合, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{\Omega}$, $A \in \mathbb{R}^m$ とするとき

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall x \in \Omega : |x| > R) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Cf.** 複素関数 $f(z)$ についての $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z)$

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

- $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で $x_j$ について**偏微分可能**であるとは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 $i$ 成分が $\delta_{ij}$ に等しいベクトル)。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする。

(i) $\boldsymbol{a} \in \Omega$, $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で $x_j$ について**偏微分可能である**とは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_j) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 $i$ 成分が $\delta_{ij}$ に等しいベクトル)。

(ii) $1 \le j \le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で $x_j$ について**偏微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で $x_j$ について偏微分可能であることをいう。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)

$\Omega$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 (開集合については後述)、$f\colon\Omega\to\mathbb{R}^m$ とする。

(i) $\boldsymbol{a}\in\Omega$, $1\le j\le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で $x_j$ について**偏微分可能**であるとは、極限

$$\boldsymbol{f}_{x_j}(\boldsymbol{a})=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}):=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_j)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{h}$$

が存在することをいう ($\boldsymbol{e}_j$ は第 $i$ 成分が $\delta_{ij}$ に等しいベクトル)。

(ii) $1\le j\le n$ としたとき、$\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で $x_j$ について**偏微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a}\in\Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で $x_j$ について偏微分可能であることをいう。

(iii) $\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で $C^1$ **級** (連続的微分可能) であるとは、任意の $j\in\{1,\cdots,n\}$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で $x_j$ について偏微分可能であり、偏導関数 $\Omega\ni\boldsymbol{x}\mapsto\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ が $\Omega$ で連続なこと、すなわち次式が成り立つことをいう。

$$(\forall\boldsymbol{a}\in\Omega)\quad\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\quad\left(\Leftrightarrow\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}\left|\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})-\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right|=0\right).$$

- $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

  が成り立つことをいう。このとき、$A$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の $(i,j)$ 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能**であるとは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})-A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

  が成り立つことをいう。このとき、$A$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の $(i,j)$ 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。
- (v) $\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で **(全) 微分可能**であるとは、任意の $\boldsymbol{a}\in\Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能である**とは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

 が成り立つことをいう。このとき、$A$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の $(i,j)$ 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

- (v) $\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で **(全) 微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「$C^1$ 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

# 4.8 偏微分、全微分, $C^1$ 級 (超特急の復習)　続き

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能である**とは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

  が成り立つことをいう。このとき、$A$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の $(i,j)$ 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

- (v) $\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で **(全) 微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「$C^1$ 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

3 つの lim が出て来るが、(i) は 1 変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも 0 になるかどうかが問題) である。

- (iv) $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で **(全) 微分可能である**とは、ある $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ が存在して、

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0$$

が成り立つことをいう。このとき、$A$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における**ヤコビ行列**と呼び、$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ と表す。実は $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$ の $(i,j)$ 成分は $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ である。

- (v) $\boldsymbol{f}$ が $\Omega$ で **(全) 微分可能である**とは、任意の $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して、$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a}$ で全微分可能であることをいう。

「$C^1$ 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能かつ連続」が成り立つ。

以上は既に学んだはず。

3 つの lim が出て来るが、(i) は 1 変数関数の極限、(iii) と (iv) は多変数関数の極限 (どちらも 0 になるかどうかが問題) である。
実際には、 $C^1$ 級であることを確かめて、それで全微分可能であることが分かる、というのが多い。

# 5 極限の存在

ここまでは、数列の極限についての定理といっても、収束するという条件が仮定の中に入っていることが多かった。例外は「上に有界な単調増加数列は収束する (極限が存在する)。」という定理である。

# 5 極限の存在

ここまでは、数列の極限についての定理といっても、収束するという条件が仮定の中に入っていることが多かった。例外は「上に有界な単調増加数列は収束する (極限が存在する)。」という定理である。

これ以降は、数列の極限が存在する (収束する)」ことがテーマとなる定理が多い。

# 5.1 区間縮小法

極限の存在を示すために、次の定理は使いやすい。

# 5.1 区間縮小法

極限の存在を示すために、次の定理は使いやすい。

## 定理 (区間縮小法の原理)

$\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列で、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le b_n$$

が成り立つとき、次の (1),(2) が成立する。

1. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は収束し、極限をそれぞれ $A$, $B$ とするとき
$$A \le B \quad \text{かつ} \quad [A, B] \subset [a_n, b_n].$$
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であれば、$A = B$ (つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$).

$I_n := [a_n, b_n]$ とおくと、$I_n$ は閉区間であり、

$$\{a_n\}\text{ が単調増加かつ }\{b_n\}\text{ が単調減少} \Leftrightarrow I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

区間は縮小する (正確には大きくならない) が、共通部分 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [A, B]$ であり、空集合にはならない、という定理である。

念のため数理リテラシーの復習: $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in I_n\}.$$

# 5.1 区間縮小法　証明の前に解説

$I_n := [a_n, b_n]$ とおくと、$I_n$ は閉区間であり、

$$\{a_n\} \text{が単調増加かつ} \{b_n\} \text{が単調減少} \Leftrightarrow I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

区間は縮小する (正確には大きくならない) が、共通部分 $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [A, B]$ であり、空集合にはならない、という定理である。

念のため数理リテラシーの復習: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n := \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})\ x \in I_n\}.$

ここで閉区間という条件は重要である。例えば $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ のとき、

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$$

であるが、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset.$$

もし $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ であれば、

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}.$$

# 5.1 区間縮小法　証明

**証明**　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束する。極限を $A$ とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

# 5.1 区間縮小法　証明

**証明**　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束する。極限を $A$ とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。極限を $B$ とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \le b_n.$$

**証明**　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \leq b_n \leq b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束する。極限を $A$ とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。極限を $B$ とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \leq b_n.$$

一方、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ であったから、$n \to \infty$ として $A \leq B$.

**証明**　(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n \le b_n \le b_1$$

であるから、$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束する。極限を $A$ とすると (それは上限であるから)

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \le A.$$

同様に $\{b_n\}$ は、下に有界な単調減少数列であるので、収束する。極限を $B$ とすると、

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad B \le b_n.$$

一方、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \le b_n$ であったから、$n \to \infty$ として $A \le B$.

(ii) もし $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であれば、

$$B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

であるから、$A = B$.

**定理 (中間値の定理)**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

# 5.2 中間値の定理　定理, 証明のパート 1

**定理 (中間値の定理)**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

**証明**

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。

**定理 (中間値の定理)**

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

**証明**

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。

## 定理 (中間値の定理)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

**証明**

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし $f(c_0) \leq 0$ ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。

# 5.2 中間値の定理　定理, 証明のパート 1

## 定理 (中間値の定理)

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は連続、$f(a) > 0$, $f(b) < 0$ とするとき、ある実数 $c \in (a, b)$ が存在して、$f(c) = 0$.

**証明**

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad c_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

とおく。もし $f(c_0) > 0$ ならば、

$$a_1 := c_0, \quad b_1 := b_0$$

とおく。またもし $f(c_0) \leq 0$ ならば

$$a_1 := a_0, \quad b_1 := c_0$$

とおく。いずれの場合も

$$c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$$

とおく。

(次のスライドに続く)

# 5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

# 5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \leq 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a, b]$ に収束する。

# 5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \leq 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a, b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、$f$ は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0.$$

# 5.2 中間値の定理　証明のパート 2

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a, b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、$f$ は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \ge 0.$$

$b_n \to c$ であり、$f$ は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \le 0.$$

以下、同じ操作を続けて、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を作ったとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a \le a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1} \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$
$$f(a_n) > 0, \quad f(b_n) \le 0$$

が成り立つ。

区間縮小法から、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は共通の極限 $c \in [a,b]$ に収束する。

$a_n \to c$ であり、$f$ は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \ge 0.$$

$b_n \to c$ であり、$f$ は連続であるから

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \le 0.$$

ゆえに $f(c) = 0$.

値が 0 であることから $c \ne a, b$. ゆえに $c \in (a,b)$. □

# 5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める**二分法** (bisection method) というアルゴリズムそのものである。

# 5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める**二分法** (bisection method) というアルゴリズムそのものである。

中間値定理の使い方については、高校数学でもある程度以上経験があるであろう。(したがって例は省略する。)

# 5.2 中間値の定理

上の定理の証明中の手順は、方程式 $f(x) = 0$ の近似解を求める**二分法** (bisection method) というアルゴリズムそのものである。

中間値定理の使い方については、高校数学でもある程度以上経験があるであろう。(したがって例は省略する。)

1 変数の場合に、**連続関数の逆関数の存在・連続性は、しばしば中間値の定理を使って証明できる**。

- $f(x) = x^2$ $(x \in [0, \infty))$ の逆として、$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $f(x) = \sin x$ $(x \in [-\pi/2, \pi/2])$ の逆として、$f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$ (主値)
- $f(x) = e^x$ $(x \in [0, \infty))$ の逆として、$f^{-1}(x) = \log x$

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ の**完備性**を証明する。

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ の**完備性**を証明する。

さらに **Weierstrass の最大値定理**を証明する。この辺がこの科目の山場であると言えるだろう。

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理

次に区間縮小法を用いて **Bolzano-Weierstrass の定理**を証明する。この定理は、初めて学ぶ人には、ご利益が今一つ分かりにくいと想像する。そこで少し宣伝する。

それを使って $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^N$ **の完備性**を証明する。

さらに **Weierstrass の最大値定理**を証明する。この辺がこの科目の山場であると言えるだろう。

**定理 (Bolzano-Weierstrass の定理)**

有界な数列は収束部分列を持つ。すなわち、実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$(\exists R \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |x_n| \le R$$

を満たすならば

$$(\exists \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ の部分列})(\exists c \in \mathbb{R}) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c.$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

$a_n$ は $-1$ と $1$ の近くに密集する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

$a_n$ は $-1$ と $1$ の近くに密集する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。
$n_k = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

$n_k = 2k-1$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1 \quad (k \to \infty).$$

$a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ とする。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{5}{4}, \quad \cdots$$

$a_n$ は $-1$ と $1$ の近くに密集する。$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束しない (各自示せ)。
$n_k = 2k$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

$n_k = 2k - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ とおくと、

$$a_{n_k} = a_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \to -1 \quad (k \to \infty).$$

この場合は、数列が簡単だったから定理を使わずに、収束部分列を具体的に構成できた。 □

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理　クイズ

部分列に慣れてもらいたい、ということで。

部分列に慣れてもらいたい、ということで。

**クイズ**

1. どんな部分列も収束しない数列の例をあげよ。
2. 有界ではないが、収束部分列を持つような数列の例をあげよ。

(解答例を、この PDF の末尾に書いておきます。)

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　前半

$a_1 := -R$, $b_1 := R$ とおく。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in [a_1, b_1]$.
$c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ とおくと、次のいずれかが成立する。

- (a) $x_n \in [a_1, c_1]$ となる $n$ は無限個存在する。
- (b) $x_n \in [c_1, b_1]$ となる $n$ は無限個存在する。

(a) が成立するとき、$a_2 := a_1$, $b_2 := c_1$ とおく。
(a) が成立しないとき ((b) が成立する)、$a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$ とおく。
どちらの場合も、$x_n \in [a_2, b_2]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

以下同様にして、$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定める。

# 5.3 Bolzano-Weierstrass の定理の証明　後半

次の (a), (b), (c) が成り立つ。

- (a) $\{a_n\}$ は単調増加数列、$\{b_n\}$ は単調減少数列である。
- (b) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n < b_n, \quad b_n - a_n = \frac{2R}{2^{n-1}}.$$

- (c) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、$x_n \in [a_k, b_k]$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無限個存在する。

最初の二つから、区間縮小法の原理によって、ある $c \in [a, b]$ が存在して、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

$n_1 := 1$ とおく。

$k \geq 2$ に対して、$n_1, \cdots, n_{k-1}$ まで定まったとき、$(n > n_{k-1}) \wedge x_n \in [a_k, b_k]$ を満たす $n \in \mathbb{N}$ ((c) から無限個存在する) のうちで、最小のものを $n_k$ とおく。

こうして $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を作ると、各項が自然数である狭義単調増加数列となる。ゆえに $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列である。

$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ であるから、はさみうちの原理より $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$. □

# 問 5 の解説

問 5 の解説は手書きで行います (動画を見て下さい)。

(うっかり、連続ではないが収束すると言う問題を入れ忘れたので)
追加の練習問題 (v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ (解答は次のスライド)

$k$ を任意の実数として、$(x, y)$ を $y = kx$ あるいは $x = ky^2$ に沿って $(0, 0)$ に近づけるときの lim を求めると、0 である (これは簡単なので任せる)。

ゆえに $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ が収束するならば、極限は 0 以外にはありえない。

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} - 0\right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \frac{(x^2+y^4)y^2}{x^2+y^4} = y^2 \to 0 \quad ((x, y) \to (0, 0))$$

であるから、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0. \quad \square$$

# 5.3 のクイズの答え

(a) $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$ とすると、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\infty$ に発散する。特に収束はしない。

(b) $a_n = (1 + (-1)^n)n$ $(n \in \mathbb{N})$ とする。$n = 1, 2, 3, \cdots$ の順に 0, 2, 0, 4, 0, 6, $\cdots$. 有界ではないが、$n_k = 2k$ とするとき、$a_{n_k} = 0$ であるから、$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束する。